ELEMENTOS

DE

GEOMETRÍA

ANALÍTICA

CON ARREGLO AL PROGRAMA DE ADMISION EN LAS ESCUELAS POLITÉCNICA
Y NORMAL SUPERIOR

POR

H. SONNET
Doctor en ciencias, inspector de la Academia de Paris

G. FRONTERA
Doctor en ciencias, profesor de matemáticas en el Liceo imperial de San Luis

TRADUCIDOS AL CASTELLANO

— DE LA ÚLTIMA EDICION FRANCESA —

POR D. MANUEL MARÍA BARBERY
Profesor de matemáticas.

CUARTA TIRADA.

MADRID
CÁRLOS BAILLY-BAILLIERE
Premiado con Medalla de oro en la Exposicion de Matanzas.
Librero de la Universidad central, del Congreso de los señores Diputados y de la Academia de Jurisprudencia y Legislacion.
LIBRERÍA EXTRANJERA Y NACIONAL, CIENTÍFICA Y LITERARIA
Plaza de Santa Ana, número 10.

1884.

Tetuan de Chamartin.—Imp. de C. Bailly-Baillière.

PRÓLOGO DEL TRADUCTOR.

Casi todos los profesores que se dedican á la preparacion de los aspirantes al ingreso en las carreras especiales han adoptado desde hace mucho tiempo por obra de testo los ELEMENTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA, escritos en francés por *H. Sonnet* y nuestro compatriota el mahonés *Sr. D. G. Frontera*. Deseando yo coadyuvar á mis compañeros de profesorado en las tareas de la enseñanza y facilitar el estudio á los jóvenes que no posean bien el francés, me ocupaba en hacer una concienzuda version de este tratado al castellano cuando apareció en Francia la segunda edicion, en que sus autores han introducido notables mejoras sobre la primera. Son las principales el haber traido al testo varias teorías que en la primera edicion se hallaban en los apéndices, introducido mas órden en la esposicion de la doctrina, aumentado los ejercicios y aplicaciones y muchas teorías, particularmente en la Geometría de tres dimensiones. En vista de estas convenientes reformas me dediqué á estudiarlas detenidamente, y hoy presento al público competente el fruto de mis trabajos. He corregido muchas erratas cometidas en el testo francés, particularmente en los cálculos, y he tratado de arreglar la esplicacion á la índole de nuestro idioma; y aunque no debo suponer que sea perfecta mi obra, espero que las personas inteligentes me dispensarán la misma indulgencia que ya han tenido con otras versiones mias, y comprenderán que hay algun mérito en que un ciego se dedique á estas tareas.

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA ANALITICA.

PRIMERA PARTE.

GEOMETRÍA ANALÍTICA DE DOS DIMENSIONES.

CAPÍTULO PRIMERO.

INTRODUCCION.

§ I. — Coordenadas rectilíneas.

1. El principal objeto de la Geometría analítica es referir el estudio de las líneas planas al de las ecuaciones que determinan la posicion de sus diferentes puntos; tambien enseña á referir el de ciertos problemas de cálculo á otros sencillos de Geometría; y bajo este punto de vista principalmente, es un poderoso auxiliar del ingeniero, como harémos observar siempre que se nos presente ocasion. Pero antes de todo es menester que conozcamos la manera de fijar la posicion de un punto sobre un plano.

2. Se da el nombre de *sistema de coordenadas* á todo conjunto de magnitudes variables que sirva para fijar la posicion de un punto: hay un gran número de ellas; pero únicamente nos ocuparémos por ahora de las que están mas en uso, que son las *rectilíneas*.

3. **Posicion de un punto sobre una línea.**—Cuando haya que fijar la posicion de un punto M sobre una línea, ya sea recta ó curva, XX' (fig. 1), bastará determinar la longitud del arco MO, comprendido entre el punto M y otro O, conocido de antemano en esta línea, con tal que sepamos además á qué lado del

punto O ha de quedar el M. La longitud OM y el sentido en que esta se haya de tomar á uno ú otro lado del punto O, bastan para determinar completamente la posicion del punto M.

Fig. 1.

Por ejemplo, si se dice que OM es igual á 3 metros, que OM' vale 2 metros, y que M ha de estar á la derecha, y M' á la izquierda del punto O en la recta XX', cuya posicion se supone conocida, la del punto M quedará perfectamente determinada, tomando en dicha línea XX' 3 metros á la derecha de O, y la del M' estará en donde terminen los 2 metros, á la izquierda del mismo O.

4. Se llama *abscisa de un punto* M (fig. 1) la distancia OM que hay desde él al fijo O; y se acostumbra á tomar como *positivas* las distancias que se hayan de contar á partir de O hácia la derecha, y *negativas* las que se cuenten desde O hácia la izquierda: esto es puramente convencional, y hubiera podido establecerse lo contrario; pero el uso ha fijado el sentido de las positivas y negativas.

Origen de las abscisas es el punto fijo O, desde el cual se cuentan, tanto las abscisas positivas como las negativas.

Cuando un punto está colocado sobre una recta indefinida, puede variar el valor de su abscisa desde $-\infty$ á $+\infty$. La abscisa del origen es *cero*.

5. No solamente se abrevian los razonamientos por el convenio que acabamos de establecer, de que la abscisa sea una cantidad variable, cuya magnitud represente la distancia de un punto cualquiera M á uno fijo O, y cuyo signo indique á qué lado de O cae el M, sino que introduce en las fórmulas (*) una generalidad de que vamos á presentar un ejemplo muy sencillo.

Suponiendo que sean O y A (fig. 1) dos puntos fijos situados en la línea X'X, y M uno que se pueda mover sobre la misma; y llamando a á la distancia constante OA, x á la variable OM y x'

(*) Sobre este particular debe consultarse la excelente obra de A. Cournot, titulada: *Sobre el orígen y los límites de la correspondencia que existe entre el Álgebra y la Geometría.*

á la que haya entre A y la posicion de M, cuando este último punto se halle colocado á la derecha de A, la ecuacion

$$x=a+x' \qquad [1]$$

representará las distancias desde O á cada una de las posiciones que tome M: cuando M estuviese entre O y A, sus distancias á O estarian dadas por la fórmula

$$x=a-x' \qquad [2],$$

y, por último, si M estuviese á la izquierda de O, la ecuacion que daria las distancias desde O á cada posicion de M, seria

$$x=x'-a \qquad [3].$$

Vemos, por lo tanto, que para espresar las distancias que puede haber desde O á cada posicion del punto M, se han necesitado tres fórmulas; pero ha sido porque en las longitudes x, x' no hemos considerado mas que el valor absoluto, sin tener en cuenta su signo; y de este modo las abscisas x y x' no representan mas que distancias absolutas. Por el contrario, sujetándose al convenio esplicado en el párrafo anterior, basta cualquiera de estas tres fórmulas para dar por sí sola todas las posiciones que M puede ir ocupando en la recta XX', y sus distancias al punto O.

Supongamos, en efecto, que el punto móvil M pase de la derecha á la izquierda de A, y entonces la abscisa x', que era positiva, se convertirá en negativa; pero la fórmula [1], que era la que teniamos cuando M se hallaba á la derecha de A, se transforma en

$$x=a-x' \qquad [4]$$

con solo sustituir $-x'$ en vez de $+x'$; y mientras x' sea menor que a, la abscisa x se conservará positiva; y esto indicará que el móvil M está á la derecha de O: por otra parte, el valor absoluto de esta abscisa es el mismo que el dado por la fórmula [2]; y, por consiguiente, la distancia de O al punto M es tambien la misma que la dada por esta fórmula [2].

Cuando x' llegue á tomar un valor mayor que el de a, el de x resultará negativo, dando á conocer que la posicion de M ha de estar en este caso á la izquierda de O. Por otra parte, se tiene que

$$-x=-(x'-a),$$

y siendo el valor absoluto de x sacado de esta fórmula igual al obtenido por la (3), hace ver que la distancia que hay desde el móvil al punto O es tambien la misma que la dada por esta última fórmula. Esto hace ver que la fórmula (4), no solamente reemplaza á las otras dos, sino que, por medio de los signos de x, da á conocer la posicion que tomará el móvil M en cada caso particular respecto al punto O.

6. Posicion de un punto sobre un plano.—Para determinar sobre un plano la posicion de un punto M, se la refiere á dos rectas fijas XX′, YY′ (fig. 2), situadas en el mismo, y que se cortan formando un ángulo, que las mas veces es recto. Elegidas estas, se tiran por el punto M paralelas MQ y MP á las rectas XX′ é YY′; y en los puntos P y Q de interseccion tendrémos lo que se llama las proyecciones del punto M sobre las rectas fijas, proyecciones que se denominan *oblicuas* ó *rectangulares*, segun que es oblicuo ó recto el ángulo que forman las rectas fijas. Claro es que estará perfectamente determinada la posicion del punto M cuando se conozcan sus proyecciones P y Q; pues tirando por P una paralela á YY′, y por Q otra á XX′, tendrémos dos rectas que se cortarán precisamente, y que en su interseccion nos darán el punto buscado M.

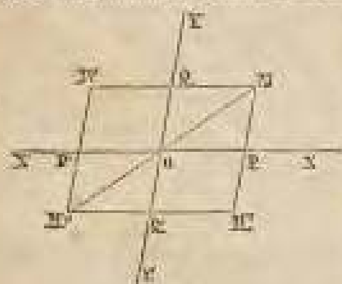


Fig. 2.

La posicion de la proyeccion P puede fijarse sobre XX′ por su abscisa OP, tomando el punto O por orígen de las abscisas; y del mismo modo puede fijarse sobre YY′ la posicion de la proyeccion Q, por medio de la longitud OQ, que deberá tomarse como positiva, cuando Q haya de estar encima de O, y como negativa, cuando Q deba hallarse debajo de O. La distancia OQ se llama la *ordenada* del punto M; *coordenadas rectilíneas* del punto M á su abscisa y su ordenada; *orígen de las coordenadas* al punto O; y á las rectas XX′ é YY′, *ejes de las coórdenadas* ó *ejes coordenados*.

La posicion de un punto sobre un plano queda perfectamente determinada cuando se conocen la abscisa y la ordenada de este punto.

OBSERVACIONES. I. Se ve claramente que con unos mismos valores de las coordenadas, pero segun la combinacion que hagamos con sus signos, se hallarán los cuatro puntos M, M′, M″, M‴, que son los vértices de un paralelógramo que tiene sus lados paralelos á los ejes. Designando por a el valor absoluto de las distancias iguales OP ú OP′, por b el de las OQ ú OQ′, y representando de una manera general por x la abscisa, y por y la ordenada del punto que se considera, se tendrá:

Para el punto M....... $x=+a$, $y=+b$,

M′...... $x=-a$, $y=+b$,

M″..... $x=+a$, $y=-b$,

M‴..... $x=-a$, $y=-b$.

II. Los puntos M y M‴, que se hallan sobre una misma recta MOM‴ que pasa por el origen, y que están á igual distancia de este origen, tienen coordenadas iguales en valor absoluto, pero de signo contrario: lo mismo sucede con los puntos M′ y M″.

III. La costumbre de representar por x las abscisas y por y las ordenadas de un mismo punto, ha hecho dar al eje XX′, sobre el que se cuentan las abscisas, el nombre de *eje de las* x, y al YY′, en que se cuentan las ordenadas, el de *eje de las* y.

IV. Las coordenadas de un punto que esté situado sobre un plano indefinido, pueden ambas variar desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Para todos los puntos situados en el eje de las x, tiene que ser forzosamente $y=0$; así como $x=0$, para los situados en el eje de las y, y, por consiguiente, $x=0$ é $y=0$ son las coordenadas del origen.

V. Tambien se puede considerar como abscisa del punto M la recta MQ, igual y paralela á la OP; y por ordenada de aquel mismo punto la recta MP, igual y paralela á la verdadera ordenada OQ.

VI. En lo sucesivo representarémos muchas veces un punto por las coordenadas que le correspondan, encerrándolas entre paréntesis; de manera que, cuando digamos que se trata del punto M (x', y'), deberémos entender que nos ocupamos de un punto M que tiene por coordenadas las x' é y'.

7. **Distancia entre dos puntos.** — Es fácil calcular la distancia que hay entre dos puntos cuando se conocen las coordenadas de estos.

Fig. 3.

Sean los dos puntos dados $M'(x', y')$ y $M''(x'', y'')$ (fig. 3): tirando $M'P'$ y $M''P''$ paralelas al eje de las y, y $M'Q$ paralela al eje de las x, y llamando θ el ángulo formado *por las partes de los ejes en que se cuentan las coordenadas positivas*, se deducirá del triángulo $M'QM''$ que

$$\overline{M'M''}^2=\overline{M'Q}^2+\overline{M''Q}^2-2.M'Q.M''Q.\cos M''QM'.$$

Pero $M'Q = P'P'' = OP'' - OP' = x''-x'$,

$M''Q = M''P'' - QP'' = M''P'' - M'P' = y''-y'$,

$M''QM' = QP''O = 180^\circ - \theta$.

Luego $\overline{M'M''}^2=(x''-x')^2+(y''-y')^2+2(x''-x')(y''-y').\cos\theta$;

por lo cual

$$M'M''=\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+2(x''-x')(y''-y').\cos\theta} \quad (1)$$

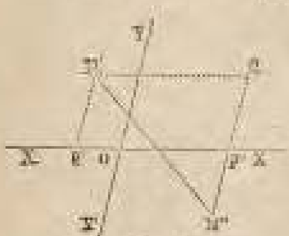


Fig. 4.

Aun cuando hemos obtenido esta fórmula en una posicion particular de los puntos $M'M''$, es fácil convencernos de que conviene á todas las posiciones de estos, con tal que tengamos presente que las coordenadas de un punto son cantidades *algebráicas*.

Supongamos, por ejemplo, que los puntos M' y M'' tengan la posicion que se ve en la figura 4: todavía podrémos deducir del triángulo $M'QM''$ que

$$\overline{M'M''}^2=\overline{M'Q}^2+\overline{M''Q}^2-2.M'Q.M''Q.\cos M''QM'.$$

Pero en este caso, se ve que $M'Q = P'P'' = OP'' + OP'$; y como $OP' = x'$ y $OP'' = -x''$, será $M'Q = x'' - x'$. Tambien tenemos $M''Q = M''P'' + QP'' = M''P'' + M'P'$; y como $M''P'' = -y''$ y $M'P' = y'$, resultará $M''Q = -(y'' - y')$; finalmente, el ángulo $M'QM'' = YOX$, ó sea igual á θ: se hallará, en cuanto sustituyamos estos valores:

$$\overline{M'M''}^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2(x'' - x')(y'' - y').\cos\theta,$$

ó bien sea

$$M'M'' = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2(x'' - x')(y'' - y').\cos\theta}.$$

Del mismo modo se veria que la fórmula (1) es aplicable á todas las posiciones que pueden tener los puntos M' y M'' sobre un plano.

Observaciones. I. En el caso de que los ejes fuesen rectangulares, sería $\cos\theta = 0$, y, por consiguiente, resultaria:

$$M'M'' = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} \qquad (2),$$

cuya fórmula tambien se puede obtener directamente con mucha facilidad.

II. Cuando uno de los puntos fuese el origen, como tendríamos, por ejemplo, que $x'' = 0$ é $y'' = 0$, resultaria, en el caso de que los ejes formasen un ángulo cualquiera, que

$$M'M'' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\theta} \qquad (3);$$

y cuando los ejes fueran rectangulares, aun se simplificaria más, resultando

$$M'M'' = \sqrt{x'^2 + y'^2} \qquad (4).$$

Ejemplo. Suponiendo que los ejes formen entre sí un ángulo de 80°, 15' y 42'', y que los valores de las coordenadas sean $x' = 0^m,321$; $y' = -0^m,136$; $x'' = -0^m,068$; $y'' = -0^m,417$, se hallará $\bar{1},7134670$ para el logaritmo de la distancia que buscámos, la que será, por consiguiente, igual á $0^m,51697...$, ó bien igual á $0^m,517$, sin error sensible.

§ II. — REPRESENTACION DE LOS LUGARES GEOMÉTRICOS POR MEDIO DE ECUACIONES.

8. Nociones preliminares. — Se llama *lugar geométrico* al conjunto de todos aquellos puntos que gozan de una misma propiedad. Estos puntos se suceden generalmente formando una línea recta ó curva.

Refiriendo la línea que represente un lugar geométrico dado á un sistema de ejes coordenados, se verá fácilmente que la ordenada de un punto depende del valor de su abscisa; por esto podemos decir que la ordenada es una funcion de la abscisa, ó, hablando con mas generalidad, que existe entre las dos coordenadas una relacion constante $f(x, y) = 0$. Esta relacion, que es preciso que pueda hallarse por la misma definicion del lugar, es lo que se llama la *ecuacion del lugar geométrico*.

Cuando la ecuacion del lugar geométrico es conocida, se puede hacer uso de ella para construir el lugar punto por punto; pues no hay mas que resolver dicha ecuacion con respecto á una de las variables, considerando como conocida á la otra; hallar todas las soluciones reales de la ecuacion que así resulta; construir todos los puntos que tengan por coordenadas estas soluciones reales, sirviéndose de los mismos ejes de que se hubiera hecho uso para hallar la ecuacion, y estos puntos pertenecerán todos al lugar geométrico.

En general, toda ecuacion de dos variables $f(x, y) = 0$, representa un lugar geométrico, si se toman las dos *variables* x é y como coordenadas *generales* de un punto que se mueve sobre un plano; pero la forma de este lugar geométrico dependerá de la posicion de los ejes coordenados que se hayan elegido. En el párrafo siguiente volverémos á ocuparnos de la construccion de los lugares representados por ecuaciones de dos variables.

La Geometría analítica de dos dimensiones está fundada en las dos ideas fundamentales que dejamos indicadas; á saber: *en la representacion de un lugar geométrico por medio de una ecuacion entre las coordenadas de sus puntos*, y recíprocamente *en representar una ecuacion con dos variables por medio de una línea*. Bien se comprende que, siempre que se conozca la ecuacion de una línea, será fácil estudiar todas las propiedades de esta con auxilio del cálculo; y tambien que es posible hallar una infinidad de líneas de diferentes formas y magnitudes, por ser infinito el número de ecuaciones con dos variables que se pueden presentar.

Vamos á fijar estas ideas generales por medio de algunos ejemplos.

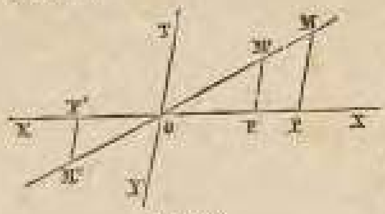


Fig. 5.

9. Línea recta. — Consideremos, en primer lugar, una recta MM' (fig. 5) que pase por el orígen O de las coordenadas. Bájense desde los diferentes puntos M, M', M''... de esta recta las ordenadas MP, M'P', M''P''..., y por la semejanza de los triángulos MOP, M'OP', M''OP''..., se tendrá

$$\frac{MP}{OP}=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{-M''P''}{-OP''}.$$

Como los numeradores de estas razones son las ordenadas, y los denominadores las abscisas de los diferentes puntos de que se trata; se ve que la relacion entre las ordenadas y las abscisas de los diferentes puntos de una recta que pasa por el orígen es una cantidad constante; y si representamos por a esta razon, podemos establecer que

$$\frac{y}{x}=a \quad \text{ó bien que} \quad y=ax$$

Llegaríamos á un resultado análogo si en vez de estar la recta en el ángulo YOX y en su opuesto, se hallase en el YOX' y en el opuesto á este por el vértice (fig. 6); pues en este caso tendríamos

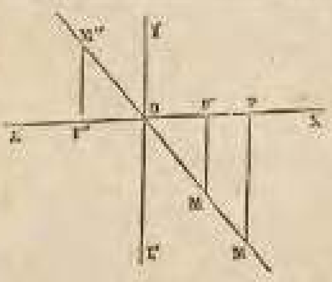


Fig. 6

$$\frac{-MP}{OP}=\frac{-M'P'}{OP'}=\frac{M''P''}{-OP''}\cdots\cdots$$

que espresa tambien que la relacion entre la ordenada y la abscisa es una cantidad constante.

La relacion constante $y=ax$, que existe entre la ordenada y la abscisa de cada uno de los puntos de una recta, es lo que se llama la *ecuacion* de la recta. Dando en esta ecuacion un valor cualquiera á x, resultará otro para y, y de este modo obtendrémos (8) el punto cuyas abscisa y ordenada son estos valores de x y de y; dando á x otro valor, resultará tambien otro para y, con lo que se determinará otro punto, y continuando del mismo modo, determinarémos tantos puntos de la recta como queramos con solo conocer su ecuacion.

Consideremos ya una recta cualquiera MM'' (fig. 7) que no pase por el origen. Tírese por el punto O una paralela NN'' á aquella, y bájense las ordenadas MP, M'P', M''P''....., que, prolongándolas si es preciso, encontrarán á la recta que hemos tirado por el origen: las distancias MN, M'N', M''N''..... serán iguales por ser paralelas comprendidas entre paralelas: representemos por b su comun valor, y supongamos que y é y' son las ordenadas de los puntos que corresponden en las rectas MM'' y NN'' á una misma abscisa x: entre estas ordenadas habrá una relacion muy sencilla, pues que tendrémos:

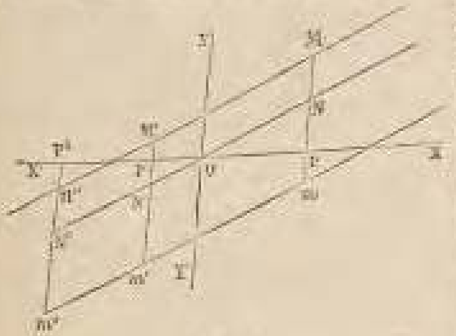


Fig. 7.

Para el punto

M.....	$MP = NP + MN$	ó bien sea	$y = y' + b$,
M'....	$M'P' = M'N' - N'P'$		$y = b + y'$,
M''....	$-M''P'' = -N''P'' + M''N''$		$y = y' + b$.

Pero como la recta NN'' pasa por el origen, tiene por ecuacion $y' = ax$: luego sustituyendo este valor en el de y, se obtiene

$$y = ax + b.$$

Esta es la relacion constante que existe entre la abscisa y la ordenada de cualquier punto de la recta MM'', y, por consecuencia, es la ecuacion de dicha recta.

En el caso de que la recta propuesta cortase, tal como la mm'', al eje de las y por debajo del origen, en vez de cortarle por encima, tambien hallaríamos la ecuacion

$$y = ax + b;$$

pero entonces representaria b una cantidad negativa.

OBSERVACIONES. Toda paralela al eje de las x tiene por ecuacion $y =$ *una cantidad constante*; porque las ordenadas de sus diferentes puntos son todas iguales, como paralelas comprendidas entre paralelas. La ecuacion de cualquier paralela al eje de las y es, por análoga razon, $x =$ *una cantidad constante*; la del eje de las x es $y = 0$; la del eje de las y, $x = 0$.

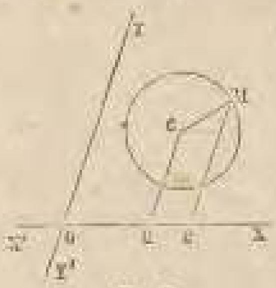


Fig. 8.

10. Circunferencia de círculo.— Consideremos ahora una circunferencia (fig. 8) de círculo colocada de cualquier manera y referida á dos ejes oblicuos que se corten en el plano del mismo círculo formando un ángulo θ. Sean $\alpha = OQ$ y $\beta = CQ$ las coordenadas del centro C, x é y las de un punto cualquiera M de la circunferencia, y r el radio de la misma. Como la distancia CM ha de ser constantemente igual á r, segun la definicion de la circunferencia, tendrémos (7)

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta = r^2 \qquad [1],$$

que es la relacion que existe entre las coordenadas de un punto cualquiera de la circunferencia, y, por lo tanto, la ecuacion de esta circunferencia.

Si los ejes fuesen rectangulares, desapareceria el término que contiene coseno θ, y la ecuacion quedaria reducida á

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \qquad [2].$$

Cuando el centro estuviese en el eje de las x, seria $\beta = 0$, y quedaria

$$(x-\alpha)^2 + y^2 = r^2 \qquad [3].$$

Si suponemos que, además de hallarse el centro sobre el eje de las x, pasa la circunferencia por el orígen, será r igual α; y haciendo las reducciones en la ecuacion anterior, llegarémos á la siguiente:

$$x^2 - 2rx + y^2 = 0 \qquad [4].$$

Por último, cuando el orígen de las coordenadas sea al mismo tiempo centro de la circunferencia, serán $\alpha=0$ y $\beta=0$, y resultará

$$x^2+y^2=r^2 \qquad [5].$$

Cada una de estas ecuaciones puede servir para construir por puntos la circunferencia que representa.

11. Elipse.—*Lugar geométrico de todos los puntos que gozan de la propiedad de que la suma de sus distancias á otros dos fijos F y F' (fig. 9) es constante é igual á una longitud dada 2a mayor que FF'.*

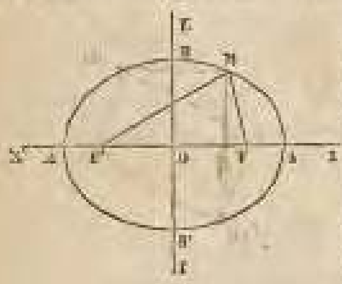


Fig. 9.

Este lugar, llamado por algunos *óvalo de jardinero*, recibe en geometría el nombre de *elipse*. Puede trazarse por un movimiento continuo, para lo cual se fijan en los puntos F y F' los estremos de un cordon cuya longitud sea exactamente igual á $2a$: se mantiene tirante el cordon por medio de un lápiz, buril ú otra punta á propósito, que, haciéndola resbalar sobre el papel, al mismo tiempo que sostiene tirante el cordon, traza el lugar geométrico de que nos ocupamos. Esta curva es cerrada y semejante á la que representa la figura 9, y es evidente su simetría con respecto á la recta FF' que une los dos puntos fijos: igualmente es simétrica con relacion á la recta levantada perpendicularmente en el medio O de la distancia FF'. Así pues, si tomamos estas dos rectas por ejes de las coordenadas, á cada valor de x corresponderán á y dos iguales y de signo contrario, como igualmente á cada valor de y corresponderán dos iguales y de contrario signo de la abscisa x. Por consiguiente, la ecuacion de este lugar geométrico no puede contener potencia alguna de grado impar de las coordenadas, lo que la simplifica mucho.

Sean x é y las coordenadas de un punto cualquiera M de este lugar; hagamos $OF=OF'=c$; unamos M con F y F', y tendrémos

$$MF'+MF=2a \qquad [1],$$

$$\overline{MF'}^2=y^2+(x+c)^2 \qquad [2],$$

$$\overline{MF}^2=y^2+(x-c)^2 \qquad [3].$$

Eliminando entre estas tres ecuaciones MF y MF′, se tendrá una relacion constante entre x é y, que será la ecuacion del lugar.

Para efectuar esta eliminacion, restarémos ordenadamente la ecuacion (3) de la (2), y resultará

$$\overline{MF'}^2-\overline{MF}^2=4cx.$$

El primer miembro es el producto de los factores MF′+MF y MF′−MF; y como el primero es igual á $2a$, puede escribirse

$$2a(MF'-MF)=4cx, \quad \text{de donde resulta} \quad MF'-MF=\frac{2cx}{a}.$$

Teniendo ya conocidos los valores de la suma y de la diferencia de MF y MF′, es fácil, valiéndonos de una regla muy conocida en álgebra, hallar el valor de cada una de aquellas; á saber:

$$MF'=a+\frac{cx}{a} \quad \text{y} \quad MF=a-\frac{cx}{a}.$$

Sustituyendo uno de estos valores, por ejemplo, el primero en la ecuacion (2), obtendrémos

$$\left(a+\frac{cx}{a}\right)^2=y^2+(x+c)^2,$$

que es la ecuacion del lugar; pero haciendo las reducciones, se convierte en

$$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2);$$

y como sabemos por el enunciado que $2a>2c$, ó, lo que es lo mismo, que $a>c$, la diferencia a^2-c^2 será forzosamente positiva; por lo cual podemos representarla por b^2, y tendrémos $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, ó dividiendo por a^2b^2 todos los términos

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4).$$

Esta ecuacion no contiene potencia alguna impar de las variables, como habiamos anunciado; y esto indica que la curva es simétrica con respecto á cada uno de los dos ejes, y á cada valor que demos á una variable corresponderán dos de la otra, que serán iguales y de signo contrario. Como los dos términos del primer miembro son esencialmente positivos, tiene que ser cada uno de ellos menor que uno, ó llegar á valer todo lo más la unidad, y esto únicamente cuando sea cero el valor del otro término: así es que x solamente puede variar desde $-a$ hasta $+a$, é y desde $-b$ á $+b$. Si hacemos $y=0$, resultará $x=\pm a$, lo que dará los puntos A y A'; del mismo modo que si hacemos $x=0$, resultará $y=\pm b$, que da los puntos B y B'. Observemos que las dos coordenadas tienen que variar en sentido inverso, por lo que es preciso que, cuando la una aumente, disminuya la otra. La forma que indica la figura 9 conviene con todas estas circunstancias.

Todavía podríamos deducir de la ecuacion (4) otras varias propiedades de la curva; pero esta investigacion formará el objeto de un capítulo especial.

12. Hipérbola. — *Lugar geométrico de todos los puntos que tienen la propiedad de que la diferencia de sus distancias á dos fijos F y F' (fig. 10) es constante é igual á una longitud dada 2a menor que FF'.*

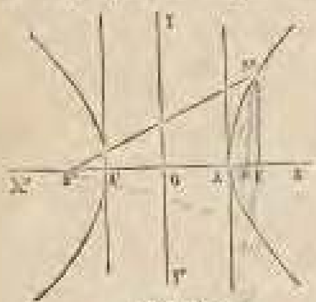


Fig. 10.

Como este lugar tiene que ser simétrico respecto á la recta FF' y á la perpendicular levantada en el medio de esta, conviene, por las razones espuestas en el núm. 11, que tomemos estas dos rectas por ejes coordenados. Este lugar geométrico es indefinido, tanto en el sentido de las x positivas y de las negativas, como en el de las y positivas y negativas tambien; pues no es otra cosa que el lugar de las intersecciones de las circunferencias que se describan haciendo centro en F y en F' con radios que se diferencien en la longitud $2a$; y podemos tomar, sin dejar de satisfacer á esta condicion, los radios tan grandes como queramos y como sea necesario para que los puntos de interseccion de las circunferencias se hallen tan distantes del origen como deseemos. Tomando en la recta FF', y á contar desde el origen, dos distancias OA y OA' iguales entre sí é igual cada una á a, los puntos A y A' donde estas distancias concluyan pertenecerán al lugar geométrico, pues tendrémos

$$AF'-AF=AA'+A'F'-AF=AA'=2a,$$

teniendo presente que $A'F'=AF$ como diferencias entre cantidades respectivamente iguales. Comparando con el punto A otro de la recta FF' comprendido entre A y O, se verá que su distancia á F' es menor, y la que hay á F mayor que las de A á estos mismos puntos; lo que hace ver que el punto comparado no está en el lugar geométrico, pues la diferencia de sus distancias á F y F' es menor que $2a$: lo mismo dirémos de todos los puntos comprendidos entre O y A': por consiguiente, desde A hasta A' no hay punto alguno que pertenezca al lugar geométrico de que nos vamos ocupando. Luego este lugar debe tener poco más ó menos la forma que indica la figura 10.

Para hallar su ecuacion, harémos un cálculo análogo en un todo al del núm. 11, y obtendrémos

$$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2);$$

pero como a es menor que c, la diferencia a^2-c^2 tiene que ser precisamente negativa; y representándola por $-b^2$, resultará

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2, \quad \text{de donde} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

En esta ecuacion se ve claramente que x no puede ser menor que a, pues de lo contrario el primer miembro sería menor que 1 ó negativo; por consiguiente, si tiramos por los puntos A y A' paralelas al eje de las y, ninguno de los puntos que en el plano se hallen comprendidos entre dichas dos paralelas pertenecerá á la curva que discutimos. Haciendo $y=0$, se encuentra $x=\pm a$, y dando á x el valor cero, resulta para y uno imaginario, lo que conviene con lo que acabamos de decir. Además, para que el primer miembro permanezca constantemente igual á 1, es preciso que y crezca al mismo tiempo que x, lo que indica que la curva se va abriendo en ambos sentidos, tanto por el lado de las x positivas, como por el de las negativas, y que es ilimitada en todos sentidos. Todas estas circunstancias convienen con la forma indicada en la figura 10.

Por un movimiento continuo puede trazarse un arco de esta curva, conocida con el nombre de hipérbola. Esto se consigue por medio de una regla DD' (fig. 11), que se apoya constantemente en uno de los puntos fijos, en el F por ejemplo, alrededor del cual se la hace girar, conservando siempre la misma longitud F'D: se apoyan en F y en D los dos estremos de un hilo, cuyo largo se diferencie de F'D en la cantidad $2a$; y haciendo que, al girar la regla, se vaya adaptando al borde este hilo con ayuda de un lápiz, la punta de este irá trazando el arco BA de la curva; pues de este modo tendrémos

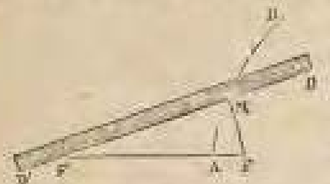


Fig. 11.

$$F'D - (MD + MF) = 2a,$$

ó sea $MF' + MD - (MD + MF) = 2a$, ó, finalmente, $MF' - MF = 2a$ que es la definicion de este lugar geométrico.

13. Parábola. — *Lugar geométrico de todos los puntos que se hallan á igual distancia de la recta fija* DD' *que del punto fijo* F (figura 12.)

Este lugar es evidentemente simétrico con relacion á la perpendicular AX bajada desde el punto fijo F sobre la recta dada DD'; además, debe pasar por el punto O, medio de la distancia FA: no puede tener punto alguno á la izquierda de la recta YY' levantada en O perpendicularmente á la AX; pues de lo contrario este punto se hallaría mas cerca de la recta DD' que del punto F. Así pues, este lugar geométrico queda limitado á la izquierda por la recta YY', y es fácil convencerse de que es ilimitado hácia la derecha: pues este lugar geométrico no es otra cosa que el de los centros de todas las circunferencias que pasen por el punto F y sean tangentes á la recta DD'; pero si tomamos un radio r tan grande como se quiera, tendrémos dos puntos de este lugar en la interseccion de la paralela á DD' tirada á una distancia r, y de la circunferencia trazada con el radio r, haciendo centro en F: los puntos determinados de este modo estarán, pues, tan distantes como se quiera de DD': por consiguiente, este lugar geométrico es ilimitado hácia la derecha de la recta DD'. (En todo lo dicho hemos supuesto que el punto F se halla á la

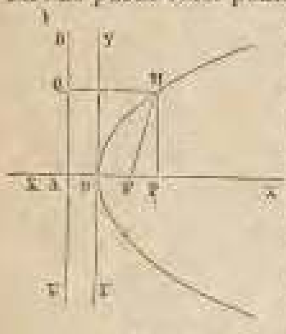


Fig. 12.

derecha de DD'; lo contrario deberá entenderse cuando esté á la izquierda).

Tomemos AX é YY' por ejes para obtener su ecuacion, que no puede contener ni potencias impares de y, ni términos independientes de y y de x. Sea M un punto cualquiera del lugar geométrico que nos ocupa: tírese MQ paralela, y MP perpendicular á AX; únase M con F, y suponiendo $AF = p$, tendrémos

$$MQ = PO + OA = x + \tfrac{1}{2}p$$

y

$$\overline{MF}^2 = y^2 + (x - \tfrac{1}{2}p)^2;$$

y en virtud del enunciado, se tendrá

$$(x + \tfrac{1}{2}p)^2 = y^2 + (x - \tfrac{1}{2}p)^2,$$

que es la ecuacion del lugar que, haciendo las reducciones, se convierte en

$$y^2 = 2px,$$

que no contiene términos independientes de x y de y, ni potencias impares de y, como ya habiamos previsto.

El lugar representado por esta ecuacion queda limitado por YY'; porque siendo positivos y y p, no puede darse á x valor alguno negativo: en el sentido de las x positivas es ilimitado, pues á cada valor que demos á x, por grande que sea, siempre corresponderán á y dos iguales y de signos contrarios, ademas, cuando x crece, tambien crece y, y, por consiguiente, la curva se va alejando del eje de las x á medida que se aparta del origen.

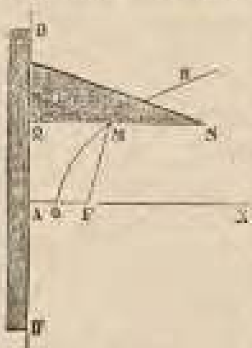


Fig. 13

Esta curva, conocida con el nombre de *parábola*, puede tambien trazarse por un movimiento continuo. Para conseguirlo, se aplica á lo largo de la recta DD' (fig. 13) una regla, sobre la cual se hace que resbale una escuadra DNQ; un hilo, cuya longitud es igual al cateto NQ, está sujeto por uno de sus estremos al punto N, y por el otro al fijo F: mientras va resbalando la escuadra, se hace que el hilo vaya adaptándose al cateto NQ, valiéndose de una punta cualquiera, de lápiz por ejemplo, la cual va trazando el arco OB de la curva. Con efecto, es evidente que, por ser NQ y NMF iguales á la longitud del hilo, se debe verificar que $MQ = MF$, que es la definicion de la curva.

12. Ejemplos de otros lugares geométricos.—*Lugar geométrico de todos los puntos M cuyas distancias á dos fijos A y B (fig. 14) están en una razon constante.*

Como se sabe por la Geometría elemental que este lugar es una circunferencia de círculo, cuyo centro está en la prolongacion de la recta que une A con B, y que ha de ser evidentemente simétrico respecto á esta recta, la tomarémos por eje de las x; y valiéndonos de ejes rectangulares, á cada abscisa deberán corresponder dos ordenadas iguales y de signo contrario, por lo que la ecuacion de este lugar no contendrá potencia alguna impar de y, lo que introducirá ya una simplificacion. Como, además, el lugar que buscamos debe pasar por el punto O, en que la distancia AB queda dividida en dos partes que guarden entre sí la razon dada, punto que podemos determinar de antemano, lo tomarémos por origen de las coordenadas, y esto nos dará una nueva simplificacion; pues debiendo, en este caso, quedar satisfecha la ecuacion cuando en ella se hagan $x=0$ é $y=0$, no contendrá término alguno independiente de estas variables. Supongamos $AO = m$ y $BO = n$; sea M un punto del lugar que tenga por coordenadas x é y, y tendrémos (**7**)

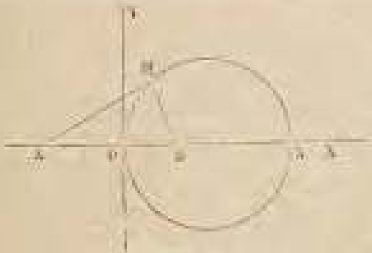


Fig. 14.

$$\overline{MA}^2 = (m+x)^2 + y^2 \quad y \quad \overline{MB}^2 = (n-x)^2 + y^2.$$

Pero, segun la definicion del lugar, deberá ser

$$\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}; \quad \text{de consiguiente,} \quad \overline{MB}^2 \cdot m^2 - \overline{MA}^2 \cdot n^2 = 0,$$

ó bien sustituyendo, en vez de $\overline{MA}^2$ y $\overline{MB}^2$, sus valores, y simplificando

$$(m^2-n^2)x^2 - 2mn(m+n)x + (m^2-n^2)y^2 = 0,$$

ó sea

$$(m-n)x^2 - 2mnx + (m-n)y^2 = 0 \qquad [1],$$

que es la ecuacion del lugar.

Cuando m no sea igual á n, dividiendo por $m-n$, se puede hallar

$$x^2 - \frac{2mn}{m-n}x + y^2 = 0,$$

ecuacion de la misma forma que la (4) del núm. **10**, que representa igualmente una circunferencia que pasa por el origen, y cuyo centro se halla sobre el eje de las x, lo que se puede comprobar añadiendo á los dos miembros el cuadrado de $\frac{mn}{m-n}$; pues entonces se puede poner la ecuacion bajo la forma

el grado de la ecuacion de una curva es el del numero de puntos en que la pueda cortar una recta

$$\left(x-\frac{mn}{m-n}\right)^2+y^2=\left(\frac{mn}{m-n}\right)^2,$$

la cual expresa que la distancia de cada uno de los puntos del lugar al que tiene por coordenadas $x=\frac{mn}{m-n}$ é $y=0$, es constante é igual á $\frac{mn}{m-n}$; luego es una circunferencia que pasa por el origen, que tiene su centro en el eje de las x y por radio $\frac{mn}{m-n}$, cantidad que será tanto mayor cuanto menor la diferencia $m-n$.

Si m es igual á n, la ecuacion (1) se reduce á $2amx=0$, ó, lo que es mas sencillo, á $x=0$, que representa el eje de las y (fig. 11). En efecto, este eje divide en este caso la distancia AB en dos partes iguales; y ya se sabe que la perpendicular levantada en el punto medio de una recta es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están equidistantes de los extremos de dicha recta.

25. Cisóide. — *Supongamos que se tenga un círculo* C *(fig. 15) y su tangente* DD', *y que por el extremo* O *del diámetro que pasa por el punto de contacto se haya tirado una secante cualquiera* OB *que corte á la circunferencia en un punto tal como* I, *y á la tangente en otro tal como* B, *y que sobre cada una de las secantes así tiradas se tome, á partir desde el punto* O, *una distancia, tal como* OM *igual á la* IB *que haya entre los puntos en que la secante corta á la circunferencia y á la tangente, y que se quiera hallar la ecuacion del lugar geométrico del punto* M.

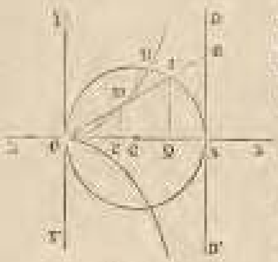


Fig. 15.

Bien se deja conocer que este lugar tiene que ser simétrico respecto á OA; además, conforme la secante se vaya apartando de OA, irá creciendo la distancia IB, y lo mismo sucederá, por consiguiente, á OM, alejándose el punto M de O indefinidamente, sin que pueda, sin embargo, llegar á la recta DD', porque la distancia IB siempre ha de ser menor que OB; así es que el lugar que se busca, tendrá poco mas ó menos la forma que representa la figura 15.

Para simplificar su ecuacion, tomarémos la recta OA por eje de las x, porque siendo la curva simétrica respecto á esta recta, no contendrá su ecuacion potencia alguna impar de y: fijarémos el origen en el punto O y bajarémos sobre OA las perpendiculares MP é IQ, harémos $OP=x$, $MP=y$, $OA=a$; y la semejanza de los triángulos OMP y OIQ dará las igualdades siguientes

$$\frac{MP}{OP}=\frac{IQ}{OQ} \quad \text{de donde} \quad \frac{y}{x}=\frac{IQ}{OQ}.$$

Por ser iguales las longitudes OM é IB, lo serán tambien OP y AQ, y se tendrá $OQ=OA-AQ=OA-OP=a-x$: por consiguiente

$$\frac{y}{x}=\frac{IQ}{a-x}.$$

Pero $\overline{IQ}^2=OQ\times AQ=(a-x)x$.

Sacando de la ecuacion de mas arriba el valor de y, elevando al cuadrado y reemplazando $\overline{IQ}^2$ por su valor $(a-x)x$, se llega, por último, á

$$y^2=\frac{x^3}{a-x},$$

que es la ecuacion buscada.

Para que el segundo miembro sea positivo, es preciso que los valores que se den á x estén comprendidos entre cero y a; luego la curva está comprendida entre DD′ y el eje de las y. Haciendo $x=0$, resulta tambien $y=0$; lo que quiere decir que la curva pasa por el orígen. Segun va creciendo el valor de x, crece en el segundo miembro el numerador, y disminuye el denominador, por cuya doble razon el valor del segundo miembro, y, por consiguiente, y, crecen; luego la curva se va alejando de los dos ejes. Por último, haciendo $x=a$, resulta $y=\infty$, y esto manifiesta que la curva no toca en la recta DD′ sino á una distancia igual al infinito. Todas estas diversas circunstancias convienen á la forma indicada en la figura 15.

La curva de que nos estamos ocupando es conocida generalmente con el nombre de *cisóide de Diocles*, y mas generalmente con el de *cisóide*.

16. Curva Lemniscata (*). — *Lugar geométrico de todos los puntos tales, que el producto de las distancias que haya desde cada uno de ellos á dos fijos* F *y* F′ (figura 16) *sea una cantidad constante é igual al cuadrado de la mitad de la distancia* FF′.

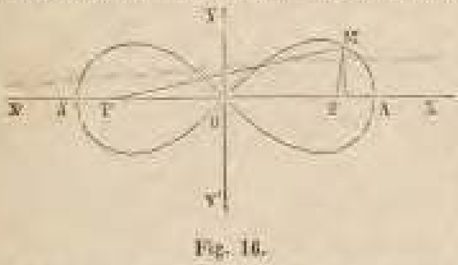


Fig. 16.

Esta curva será, como las que nos ocuparon en los números **11** y **12**, simétrica respecto á FF′, y tambien con relacion á la perpendicular YY′ levantada en el punto O medio de esta recta. El mismo O será uno de los puntos del lugar; y las distancias que haya desde cada uno de los de la curva á los F y F′, variarán en razon inversa uno de otro. Por poco que se fije la atencion, es fácil conocer que estas distancias no pueden pasar de cierto límite. Con efecto, si M es uno de los puntos del lugar, uniéndole con F y F′, y suponiendo, por abreviar, que

$$MF=\rho,\quad MF'=\rho'\quad y\quad FF'=2a,$$

tendrémos, en virtud del enunciado, $\rho\rho'=a^2$. Ahora bien: en el triángulo FMF′ tenemos

$$MF'-MF<FF',\quad \text{ó sea}\quad \rho'-\rho<2a,$$

que, multiplicando por ρ', dará

$$\rho'^2-\rho\rho'<2a\rho',\quad \text{ó}\quad \rho'^2-a^2<2a\rho',$$

ó tambien $$\rho'^2-2a\rho'+a^2<2a^2;$$

es decir, $$(\rho'-a)^2<2a^2,$$

de donde resulta $$\rho'<a(1+\sqrt{2})$$

(*) Otros la llaman *lazo*, y algunos *curva lenticular*. (*N. del T.*)

[illegible]
Se llaman de inflexion a los que la tangente
atraviesa la curva

Suponiendo que, en el máximum, sea $\rho' = a(1+\sqrt{2})$, resultará $\rho'-\rho = 2a$, que corresponderá á un punto A colocado en la prolongacion de FF'. Por consiguiente, la curva parte del punto O para volver á cortar á FF' en A; y en virtud de la simetría que dejamos anunciada, tendrá la forma de un 8 echado, segun indica la figura 16.

Para hallar su ecuacion, la referirémos á los ejes FF' é YY'; y llamando x é y á las coordenadas del punto M, tendrémos (7, obs. 1)

$$\overline{MF}^2 \text{ ó } \rho^2 = y^2+(x-a)^2 \text{ y } \overline{MF'}^2 \text{ ó } \rho'^2 = y^2+(x+a)^2.$$

En virtud de la naturaleza de esta curva debémos tener

$$MF.MF' = a^2; \text{ ó } \rho\rho' = a^2, \text{ de donde } \rho^2\rho'^2 = a^4,$$

y poniendo, en vez de ρ^2 y ρ'^2, sus valores, resultará

$$[y^2+(x-a)^2][y^2+(x+a)^2] = a^4 \text{ ó sea } [(y^2+x^2+a^2)-2ax][(y^2+x^2+a^2)+2ax] = a^4,$$

ó bien $$(y^2+x^2+a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4,$$

de donde $$y^2+x^2+a^2 = \sqrt{4a^2x^2+a^4},$$

tomando únicamente el signo + para el radical, en atencion á que el primer miembro es esencialmente positivo. De aquí se deduce que

$$y^2 = a\sqrt{4x^2+a^2} - (x^2+a^2),$$

que es la ecuacion del lugar que buscábamos, resuelta con relacion á y^2.

Para hallar los puntos en que corta la curva al eje de las x, hay que hacer $y=0$ en la ecuacion penúltima, y sacarémos

$$(x^2-a^2)^2 = a^4,$$

que dará $x^2 = 2a^2$, de donde sale $x = \pm a\sqrt{2}$,

ó bien $x^2 = 0$, de donde $x = 0$.

Los primeros valores corresponden á los puntos A y A', y concuerdan con lo que dejámos ya dicho; el último corresponde al punto O. Haciendo que x varíe desde cero hasta $a\sqrt{2}$, conocerémos que y va aumentando al principio para volver luego á disminuir; y basta, para convencerse de esto, con dar á x valores particulares, tales como $\frac{a}{10}, \frac{2a}{10}, \frac{3a}{10}, \ldots$ etc.

Por este método verémos que el mayor valor de y está entre el que corresponde á esta variable cuando se hace $x = \frac{8a}{10}$ y el que resulta cuando $x = \frac{9a}{10}$, y que la forma de esta curva es, con efecto, la que representa la figura 16.

Esta es la curva que se conoce en Geometría con el nombre de *Lemniscata*.

17. Basta con los ejemplos anteriores para dar á conocer de qué modo, cualquiera línea plana, capaz de ser definida geométricamente, puede representarse en una ecuacion formada por las coordenadas rectilíneas de sus puntos, único objeto que nos hemos propuesto por ahora. Conviene que los lectores se ejerciten en la resolucion de los ejemplos sencillísimos que siguen, procurando deducir del mismo enunciado la forma general de la curva antes de buscar su ecuacion; y despues que hayan sacado esta, deben ocuparse de comprobar los resultados que hubiesen deducido de aquella discusion sintética; la comparacion de los resultados que hayan deducido del simple enunciado, con los que se desprendan de la ecuacion, fortificará su talento y les inspirará cada vez mayor confianza en las indicaciones del cálculo. Tambien les aconsejamos que se ejerciten en la construccion de las figuras.

I. Hallar el lugar geométrico de todos los puntos dotados de la propiedad de que la diferencia entre los cuadrados de sus distancias á otros dos fijos sea constante.

II. Hallar el lugar geométrico de todos los puntos que sean tales, que la suma de los cuadrados de las distancias de cada uno de ellos á dos fijos sea constante.

III. Hay en un plano una recta OB de longitud determinada, que puede girar en el mismo plano alrededor de su extremo O; otra recta AB, de la misma longitud que la primera, está articulada con ella en el punto B por uno de sus extremos, y el otro A tiene que recorrer todos los puntos de otra XX', situada en el mismo plano y que pasa por el punto O: se quiere hallar el lugar geométrico que un punto M determinado en la recta AB irá describiendo durante el movimiento.

IV. Hay dos rectas XX' é YY' perpendiculares entre sí, y en la XX' un punto A, por el cual se ha tirado una recta cualquiera que termina en el punto B sobre la recta YY'; por B se ha tirado una perpendicular á AB, terminada en el punto C sobre XX', y, por último, en B se ha tirado una paralela á XX', y en C otra á YY': se pide el lugar geométrico de los puntos, tales como el M, en que estas paralelas se irán cortando.

V. Dándose dos rectas XX' é YY' que se cortan, formando un ángulo cualquiera, y un punto A situado en su plano, se ha tirado por A una recta cualquiera que corta á las primeras en dos puntos B y C, y por estos dos paralelas, la primera á XX' y la segunda á YY': se pide el lugar geométrico del punto M, interseccion de estas paralelas.

VI. Se da un círculo C y una de sus tangentes DD'; por el extremo O del diámetro perpendicular á esta tangente, se tira una secante cualquiera que corta á la circunferencia en I, y á la tangente en B; sobre la prolongacion de esta secante se toma una parte BM, igual á BI: se pide el lugar del punto M.

VII. Hallar el lugar geométrico de todos los puntos que sean tales, que el producto de las distancias de cada uno de ellos á una recta dada y á un punto fijo sea una cantidad constante.

VIII. Dado un círculo O y uno de sus diámetros XX', se trazan dos radios rectangulares cualesquiera OA y OB: desde la extremidad A de uno de estos se baja una perpendicular á XX': se pide el lugar geométrico del punto M en que esta perpendicular corta á la prolongacion del otro radio OB.

§ III. — Ejemplos de la manera con que se representan las funciones matemáticas ó empíricas por medio de curvas.

18. Siempre que dos magnitudes variables estén ligadas entre sí de tal manera que el valor de la una quede determinado cuando á la otra se de uno arbitrario, se puede suponer que ambas magnitudes están ligadas entre sí por medio de una ecuacion de la forma $f(x, y) = 0$, ó bien de la $y = \varphi(x)$, aunque no siempre se podrá designar la forma matemática de las funciones f ó φ. Si consideramos que x é y sean las coordenadas rectilíneas que correspondan á un punto con relacion á dos ejes trazados en el plano en que el punto se encuentre, cada par de valores de x y de y que satisfagan á la ecuacion anterior, corresponderá á un cierto punto del mismo plano; y si la funcion f ó φ es continua, tambien lo será la série de estos puntos, y formarán una *curva* que podrá servir de *lugar geométrico* á la ecuacion propuesta; curva que representará en cierto modo la relacion que existe entre las dos variables que se consideraba.

Cuando sea discontinua la funcion f ó la φ, en vez de una curva, se tendrá solamente una série de puntos aislados; pero este caso ofrece poco interés, pues los fenómenos naturales están sometidos por su misma naturaleza á ciertas leyes de continuidad. Por lo tanto, únicamente nos ocuparémos en lo sucesivo de funciones continuas.

19. Funciones matemáticas esplícitas. — Supondrémos primeramente que se trata de una funcion matemática de la forma $y = \varphi(x)$, en cuyo caso se dice que y es una funcion *esplícita* de x.

Para construir la curva que represente la ley que esprese esta ecuacion, se irá dando á x una série de valores, crecientes ó decrecientes, que estén comprendidos entre los límites, si los hay, necesarios para que los valores de y sean reales, ó desde 0 hasta valores sumamente grandes, positivos ó negativos, si x puede pasar por todos los estados de magnitud. Para cada valor que se dé á x, corresponderá otro á y, que calcularémos, y construirémos los puntos que tengan por coordenadas estos valores de x y de y. Hecho esto, se hará pasar por todos los puntos que hayan resultado, una línea continua, que se aproximará tanto mas á la curva buscada, cuanto menor sea la diferencia entre cada dos valores consecutivos dados á x, y cuanto mayor cuidado se haya puesto en la construccion de la figura.

Claro es que seguiríamos la misma marcha cuando la ecuacion propuesta fuese de la forma $x=\varphi(y)$; sino que en este caso iríamos dando á y valores arbitrarios, y calculando los que resultasen para x.

20. Generalmente se van dando á x valores que estén en progresion aritmética, aunque no es enteramente necesario, si bien ofrece alguna ventaja cuando la funcion φ es algebráica y entera; porque entonces, para calcular los valores sucesivos de y, se puede ir haciendo uso de las diferencias, lo cual abrevia notablemente los cálculos.

Supongamos que se quiera construir la ecuacion $y=ax^2+b$, de cuya forma se encuentran muchos ejemplos al determinar la curva de un puente colgante. Para fijar las ideas, haremos

$$a=0{,}1 \quad y \quad b=1, \quad \text{con lo cual será} \quad y=0{,}1.x^2+1.$$

Haciendo sucesivamente $x=0,\ x=1,\ x=2,$

resultará $y=1,\ y=1{,}1,\ y=1{,}4,$

de donde resultan las dos diferencias primeras

$$0{,}1 \quad y \quad 0{,}3,$$

y la segunda $0{,}2.$

Como esta es constante, se podrá calcular inmediatamente la série de las diferencias primeras, que están en progresion aritmética; y por medio de sencillas adiciones se irán obteniendo las coordenadas consecutivas, segun indica la tabla siguiente:

Abscisas:	0;	1;	2;	3;	4;	5;	6;	7;	8;	9;	10....
Ordenadas:	1,	1,1;	1,4;	1,9;	2,6;	3,5;	4,6;	5,9;	7,4;	9,1;	11....
Primeras diferencias:	0,1;	0,3;	0,5;	0,7;	0,9;	1,1;	1,3;	1,5;	1,7;	1,9....	
Segundas diferencias:	0,2;	0,2;	0,2;	0,2;	0,2;	0,2;	0,2;	0,2;	0,2;	0,2....	

Cuando se den á x valores negativos, volverán á aparecer para y los mismos que antes; por consiguiente, la curva será la que representa la figura 1 (láminas), en que se ha supuesto que los ejes coordenados son rectangulares, segun aconsejaba la misma índole de la ecuacion. En lo sucesivo, solamente haremos uso de coordenadas oblícuas en casos particulares, que cuidaremos de dar á conocer.

Observacion. Para construir la curva de que acabamos de ocuparnos, se puede calcular solamente las tres primeras ordenadas, y determinar todas las demás por un trazado sumamente sencillo, y que se funda en la consideracion de las diferencias.

Sean AO, BP, CQ (fig. 17) las tres primeras ordenadas, que estarán equidistantes; unamos A con B, y prolonguemos la recta AB hasta que corte en C' á la CQ; y tirémos las AH y BK paralelas al eje de las x. Las dos primeras diferencias serán BI y CK; y, por consiguiente, la segunda diferencia será CK — BI; pero, segun la construccion, es BI = C'K; luego para la diferencia segunda tendrémos CK — C'K, ó sea CC'. Vémos, por lo tanto, que si esta segunda diferencia hubiera sido conocida, se hubiera podido deducir de las dos primeras ordenadas AO y BP la tercera CQ; pues bastaria para conseguirlo prolongar AB hasta C' y tomar C'C igual á la segunda diferencia que se data. La cuarta ordenada se hallaria de la misma manera, esto es, uniendo B con C, prolongando BC hasta D', y tomando D'D = C'C. Para hallar la quinta, se tirará del mismo modo la CD, prolongándola hasta E', y se tomará E'E = C'C. Lo mismo se hará para hallar las demas ordenadas. Este es el método mas breve para hallar cuantos puntos consecutivos sean necesarios para el trazado de la curva.

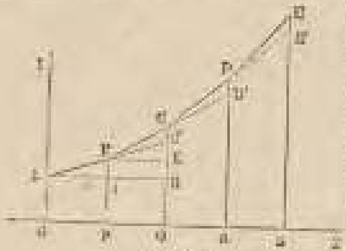


Fig. 17.

21. Construirémos tambien las siguientes ecuaciones para que sirvan de ejemplos de funciones matemáticas explícitas:

I. $$y = \operatorname{sen} x.$$

Para construir esta ecuacion, trazarémos con un radio arbitrario una circunferencia, que dividirémos en tantas partes iguales como sea necesario para que se pueda tomar, sin error sensible, cada arco por su cuerda correspondiente, lo cual permitirá que se tenga con bastante aproximacion el desarrollo de un arco dividido en tantas partes iguales como se quiera. Esta curva, llamada *sinusoide*, es la representada en la figura 2 de las láminas.

II. $$y = 10 . \log x.$$

Suponiendo que los logaritmos de que se trate sean *neperianos*, las abscisas serán los números, las ordenadas los logaritmos, y la curva la representada en la figura 3 de las láminas.

III. $$g = \frac{\pi^2 l}{t^2}.$$

Esta fórmula expresa la ley segun la cual varía la gravedad en los diversos puntos del globo, en funcion de la duracion t del tiempo que emplea un péndulo simple, cuya longitud sea l, en completar una oscilacion. Para fijar las ideas, supondrémos que $l = 1^m$, y tendrémos que construir la fórmula

$$g = \frac{9,8696}{t^2}.$$

Las abscisas serán los valores de t, las ordenadas los de g, y la curva tendrá la forma representada en la figura 4 de las láminas.

IV. $$Q = (h - z)\sqrt{2gz},$$

ecuacion que se encuentra en la teoría del movimiento de los aguas, y en la cual Q es el volúmen del agua que ha corrido durante un segundo por una canal de un metro de ancho; h, la distancia que hay desde el nivel del agua en el cáuce hasta la parte mas alta de la canal, y x, la que hay desde el mismo nivel del cáuce hasta la capa superior del agua que corre por la canal; g, el número $9^m,81$. Supondrémos $h=0^m,4$; tomarémos x por abscisa y Q por ordenada, y resultará una curva de la forma que indica la figura 5 de las láminas.

Conviene que los lectores se ejemiten con los siguientes ejemplos:

$$y=1+0,8x-0,1x^2,$$

$$y=\cos x, \quad y=\operatorname{tang} x, \quad y=\operatorname{sec} x,$$

$$y=-a\log.\cos x,$$

$$y=mx\sqrt{\log\frac{a}{x}}.$$

El penúltimo se encuentra en la valuacion del rozamiento de los engranajes, y el último en la teoría del movimiento de los gases.

22. Funciones matemáticas implícitas. — Supongamos, en segundo lugar, que se trate de una funcion implícita; es decir, de una ecuacion que no pueda resolverse con respecto á ninguna de las dos variables que contenga.

Para hallar los valores de y que correspondan á uno determinado de x, habrá que hallar las raíces de una ecuacion en y mas ó menos complicada, y esto no podrá generalmente hacerse mas que por tanteo. Por lo demás, el trazado de la curva se ejecutará como en el caso de que la funcion fuese esplícita, sin mas diferencia que la de ser mas complicados los cálculos.

Sucede con mucha frecuencia que puede simplificarse la operacion, introduciendo una variable auxiliar, como, por ejemplo, en la ecuacion

$$x^4(y^2+x^2)^2-2(y^2+x^2)(y^4+x^4)+4y^4=0.$$

Suponiendo $y=tx$, en cuya hipótesis t es una variable auxiliar, resultará

$$x^8(t^2+1)^2-2x^6(t^2+1)(t^4+1)+4x^4t^4=0,$$

ecuacion divisible por x^4; y que, haciendo esta division, se convierte en una bicuadrada respecto á x, de la cual resulta

$$x'=\pm\frac{t^2\sqrt{2}}{\sqrt{t^2+1}} \quad \text{y} \quad x''=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t^2+1}},$$

de donde

$$y'=\pm\frac{t^3\sqrt{2}}{\sqrt{t^2+1}} \quad \text{é} \quad y''=\pm\frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Para hallar tantos pares de valores de x y de y como se quiera, bastará dar á t valores determinados; y de este modo, haciendo

$$t=0, \text{ resultará } x'=0, \qquad y'=0,$$
$$x''=\pm\sqrt{2} \qquad y''=0;$$
$$\text{si } t=1, \qquad x'=\pm 1, \qquad y'=\pm 1,$$
$$x''=\pm 1, \qquad y''=\pm 1;$$
$$\text{si } t=2 \qquad x'=\pm\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \quad y'=\pm\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{5}},$$
$$x''=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \quad y''=\pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}},$$

y así sucesivamente.

Fácilmente se comprende que este método se puede aplicar siempre que no haya en la ecuacion mas que términos de tres grados diferentes, y que estos grados formen una progresion aritmética, como $m+p$, m y $m-p$; pues en este caso, sustituyendo tx, en vez de y, resultará una ecuacion divisible por x^{m-p}; y haciendo esta division, resultará otra ecuacion de la forma $Ax^{2p}+Bx^{p}+C=0$, en la que A, B, C serán funciones de t, y que puede resolverse por el método de las de segundo grado. De esta última se sacarán para x valores de la forma

$$x=\varphi(t), \quad \text{y, por consecuencia,} \quad y=t\varphi(t),$$

y no habrá mas que ir dando valores á t para hallar los que corresponden á x y á y.

Claro es que sirve mucho mejor este método cuando la ecuacion no contiene mas que dos grados diferentes entre todos sus términos: por ejemplo, si tuviésemos

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex=0,$$

haciendo $y=tx$, sacaríamos las espresiones racionales

$$x=-\frac{Dt+E}{At^2+Bt+C} \quad \text{é} \quad y=-\frac{t(Dt+E)}{At^2+Bt+C}.$$

Conviene que los lectores se ocupen en la resolucion de los ejemplos siguientes:

$$y^3-3xy+x^3=0, \quad y^3x^3-2y^2x^2+yx-x^3=0, \quad y^4+x^4-6y-2x=0.$$

23. Funciones empíricas. — Puede, finalmente, suceder que sea imposible espresar matemáticamente la ley que liga entre sí á dos variables de que debamos ocuparnos, y que se tenga únicamente una tabla que encierre una série de valores de estas variables correspondientes los de la una á los de la otra. En este caso podrémos construir la curva como dijimos en el núm. 19; y si los valores contenidos en la tabla están suficientemente próximos unos á otros, esta curva representará con bastante exactitud la ley desconocida que liga á una de las variables con la otra; servirá para retenerla fácilmente en la memoria; se podrá, por su medio, hallar inmediatamente valores de las variables comprendidos entre los que se hallen en la tabla, y resolver, con una aproximacion que las mas veces será suficiente en la práctica, el problema de la interpolacion. Si tuviese cierta analogía con alguna curva anteriormente conocida, podríamos deducir de su forma una relacion matemática que la representase aproximadamente (y esto es lo que se llama una relacion *empírica*). Finalmente, si presentase la curva alguna anomalía que interrumpiese su continuidad, sería las mas veces una prueba de que habia alguna inexactitud en los números de la tabla, y bastaria para encontrar los errores cometidos al hacer las esperiencias que hubiesen dado aquellos números.

Estas ventajas, que no son ciertamente las únicas, tienen tal importancia, que en el dia todo el que se dedica á hacer esperimentos se vale de curvas para la representacion de los resultados que va obteniendo: por lo tanto, conviene mucho familiarizarse con su uso.

Vamos á presentar algunos ejemplos.

La figura 6 de las láminas da la ley de la depresion del mercurio, debida á la capilaridad, en funcion del diámetro interior del mismo tubo; las abscisas son proporcionales á los milímetros que tenga el diámetro, y las ordenadas á las décimas de milímetro contenidas en la depresion correspondiente.

La figura 7 de las láminas representa la ley que liga entre sí á la tension del vapor de agua con su temperatura; las abscisas son proporcionales á las temperaturas espresadas en grados, y las ordenadas á las tensiones espresadas en atmósferas.

La figura 8 de las láminas manifiesta de qué modo varía el calórico latente del vapor de agua por los que sufre la temperatura; las abscisas son las temperaturas, y las ordenadas los calóricos latentes.

La figura 9 de las láminas puede hacer las veces de una tabla higrométrica; las abscisas son proporcionales á los números de grados del higrómetro de cabello, y las ordenadas á las tensiones que corresponden al vapor contenido por el aire.

La 10, de las láminas, espresa la manera con que varía la refraccion astronómica en funcion de la altura aparente de los astros; las abscisas son proporcionales á estas alturas aparentes espresadas en grados, y las ordenadas á las refracciones correspondientes espresadas en minutos.

La 11, de las láminas, da la ley de solubilidad de diversas sales en funcion de la temperatura; las abscisas son proporcionales á las temperaturas, y las ordenadas representan el peso de las cantidades de cada sal, que se disuelven en 100 partes de agua.

La 12, de las láminas, representa el resultado de una série de esperiencias hechas para averiguar el efecto útil de una turbina del sistema Fontaine-Baron; las abscisas son proporcionales al número de vueltas que da la rueda en un minuto, y las ordenadas representan los valores que corresponden al coeficiente del *efecto útil*; es decir, á la razon entre el efecto útil real y el trabajo absoluto del motor.

La 13, de las láminas, representa la ley de la mortalidad en Francia: las ordenadas son proporcionales á los números de supervivientes de cada cien nacidos, y las abscisas representan las edades de estos supervivientes. Por ejemplo, para $x=0$ resulta $y=100$, y para $x=20$ resulta $y=31$; lo que quiere decir que, por regla general, de cada 100 personas nacidas en un mismo dia, solamente 31 llegan á la edad de 20 años.

24. Despues de haber dado á conocer la conexion que tienen las ecuaciones en que entran dos variables con las curvas, deberiamos entrar en el objeto principal de la Geometría analítica de dos dimensiones, que no es otro que la aplicacion del cálculo al estudio de las líneas planas; pero es indispensable que antes nos ocupemos de algunas cuestiones secundarias que facilitarán mucho aquel estudio; y este será el objeto del siguiente capítulo.

CAPÍTULO II.

HOMOGENEIDAD.—CONSTRUCCION DE LAS FÓRMULAS.—TRANSFORMACION DE LAS COORDENADAS.

§ I.—Homogeneidad de las funciones y ecuaciones.

25. Espresiones homogéneas.—Segun el álgebra elemental, se dice que un monomio es del grado m, si la suma de los esponentes de todos los factores literales que entran en él compone este número; y que se llama *homogéneo* y del grado m á un polinomio, cuando todos sus términos son de este grado. Multiplicando en un polinomio de esta especie cada letra por un mismo factor u, quedará todo el polinomio multiplicado por u^m.

Hablando con mas generalidad, se dice que una funcion es *homogénea* y del grado m, si multiplicando cada una de las letras que le componen por un mismo factor u, queda multiplicada la funcion por u^m: de modo que las funciones

$$\frac{4(a^2-b^2)^2-3a^3b+ab^3}{\frac{a^2}{b}\sqrt{a^2+5ab-2b^2}},\quad \frac{a-d+\sqrt{bc}}{b-\frac{ac}{d}},\quad \frac{(a-b)\frac{c}{d}}{a^2+(c-d)^2},$$

son de segundo grado la primera, del grado 0 la segunda, y la tercera del -1.

26. Sucede con frecuencia que en algunas funciones hay letras que representan coeficientes numéricos, cuyo valor no está determinado; y en este caso, el grado de homogeneidad de la funcion no depende de dichas letras. Por ejemplo, si en

$$\frac{a^2+(y+mx)^2}{\sqrt{ab-(my+x)^2}}$$

suponémos que m representa un coeficiente numérico, será homogénea la funcion, y no lo seria en el caso contrario.

Tambien se considera como coeficientes numéricos á todas las cantidades

$$\operatorname{sen}\alpha,\quad \cos\alpha,\quad \operatorname{tang}\alpha,\quad \log\beta,\quad e^{\beta},$$

en que β es un número abstracto, y α un ángulo espresado en grados, ó bien un número abstracto, si α es la razon entre un arco y su radio.

Tambien se considerarian como coeficientes numéricos estas espresiones si estuviesen reemplazadas a y $\frac{b}{c}$ por funciones de otras letras, con tal que estas funciones fuesen *homogéneas y del grado* 0, en el caso de que se tuviese

$$\operatorname{sen}\frac{a}{b},\quad \cos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \operatorname{tang}\frac{a^2}{bc},\quad \log\frac{a+\sqrt{bc}}{a-\sqrt{bc}}\quad e^{\frac{ab-c^2}{ab+c^2}}$$

porque las funciones del grado 0 representan números, y si multiplicásemos a, b y c por u, desapareceria este factor u. En cualquiera otra hipótesis bastaria la presencia de una espresion de este género para impedir que la funcion en que éntre sea homogénea.

27. Ecuaciones homogéneas. — Una ecuacion de la forma

$$\varphi(a, b, x, y, \ldots\ldots) = 0$$

es homogénea cuando lo es la funcion φ. Las ecuaciones de esta clase tienen la notable propiedad de verificarse, aun cuando se multipliquen todas las letras que contengan por un mismo factor u. Con efecto, en virtud de la homogeneidad, su primer miembro tomará la forma

$$u^m.\varphi(a, b, x, y, \ldots\ldots),$$

suponiendo que sea m el grado de homogeneidad; y una vez que era $\varphi(a, b, x, y, \ldots\ldots) = 0$, tambien será

$$u^m.\varphi(a, b, x, y, \ldots\ldots) = 0,$$

ó, lo que viene á ser lo mismo,

$$\varphi(au, bu, xu, yu, \ldots\ldots) = 0.$$

De aquí se deduce que *si una ecuacion entre dos cantidades concretas de la misma especie es homogénea con relacion á estas cantidades; esto es, considerando como coeficientes numéricos á las letras que representen las demás cantidades, será independiente de la unidad comun á que estén referidas las cantidades concretas*; pues el cambiar de unidad equivale á multiplicar las cantidades concretas por un mismo factor entero ó fraccionario; y ya hemos visto que, suponiendo que la ecuacion era homogénea con relacion á estas cantidades, se verifica independientemente del factor que se introduzca.

28. Recíprocamente, *si una ecuacion algebráica entera (limitando la cuestion al único caso en que tiene verdadera utilidad,* *compuesta de cantidades concretas de la misma especie se verifica independientemente de la unidad á que están referidas dichas cantidades, es preciso que sea homogénea, ó el resultado de la adicion de varias ecuaciones homogéneas de diferentes grados.*

En efecto, sea $M+N+P+.....=0$

la ecuacion que se considera, en la cual M, N, P, etc., representan polinomios homogéneos con relacion á estas cantidades concretas, y cuyos grados son respectivamente m, n, p, etc. Cambiando de unidad, que equivale á multiplicar por un mismo factor u todas las letras que representan las cantidades concretas, resultará

$$Mu^m+Nu^n+Pu^p+.....=0.$$

Mas para que una ecuacion de esta especie se verifique independientemente de u, es preciso que se tenga separadamente

$$M=0,\quad N=0,\quad P=0,\quad \text{etc.},$$

de cuya suma resulta la propuesta.

Así es que, siendo todas las relaciones que existen entre las líneas de una figura plana independientes de la unidad con que se midan dichas líneas, aquellas relaciones tendrán que ser homogéneas, á no ser que por una inadvertencia se hayan sumado relaciones aisladas y homogéneas, pero de diferentes grados.

29. Ecuaciones que comprenden cantidades concretas de diferente especie.—Dos casos pueden ocurrir cuando en una ecuacion haya cantidades concretas de diferente especie.

Puede que las unidades á que estén referidas aquellas cantidades sean independientes unas de otras. En este caso, si la misma naturaleza de la cuestion indica, como sucede ordinariamente, que la relacion no depende en modo alguno de las unidades respectivas con que se habian medido las cantidades, esta relacion deberá ser homogénea con respecto á cada especie de cantidades concretas en particular. Escluirémos el caso en que sea resultado de la suma de varias ecuaciones homogéneas de grados diferentes; pues este caso solo puede provenir de haber seguido en los cálculos una marcha equivocada.

Por el contrario, puede ocurrir que una de las unidades dependa de alguna ó algunas de las otras, y entonces habrá que tener cuidado con esta dependencia al hacer homogénea la fórmula

Supongamos, primeramente, que haya varias letras S, S', etc., que representen áreas, y otras a, b, c, etc., que representen líneas. Es preciso tener presente que los teoremas de geometría que hayan servido de fundamento á la relacion propuesta, suponen implícitamente que existe cierta relacion entre la unidad de longitud y la de superficie, y de esta relacion hay que deducir forzosamente que, si se multiplican por u las espresiones numéricas de las líneas que haya en la figura, es preciso multiplicar por u^2 los que se refieran á superficies de la misma. Por consiguiente, al aplicar á una fórmula el principio de la homogeneidad, deberán considerarse las letras S, S', etc., como de segundo grado, y de primero las a, b, c, etc. Por esta razon la fórmula

$$S-S'=\tfrac{1}{2}(h-h')(a+b)$$

será homogénea, si S y S' representan superficies, y h, h', a y b líneas.

Suponiendo, en segundo lugar, que en la ecuacion que se considere haya á un mismo tiempo volúmenes V, V', etc., áreas S, S', etc., y líneas a, b, c, etc., recordarémos tambien que los teoremas de geometría que han debido servir de base para formar esta ecuacion, suponen una relacion de tal naturaleza entre las unidades lineales, de superficie y de volúmen, que si la espresion numérica de las líneas de una figura ha de multiplicarse por u, la de los volúmenes se ha de multiplicar por u^3, de modo que V, V', etc., deben considerarse como de tercer grado. Así es que la fórmula

$$V-V'=\tfrac{1}{3}(h-h')(B+b+\sqrt{Bb})$$

será homogénea, si V y V' representan volúmenes, B y b áreas, y h y h' líneas.

30. Puede tambien suceder que una misma cantidad dependa de varias unidades independientes entre sí. En este caso, aquella cantidad será de cierto grado con relacion á una de estas unidades, y de diferente con relacion á otra; y hay que tener en cuenta esta circunstancia al aplicar el principio de homogeneidad.

Por ejemplo, consideremos la ecuacion del movimiento uniformemente variado

$$e=\tfrac{1}{2}gt^2, \quad \text{de la que resulta} \quad g=\frac{2e}{t^2};$$

cuya relacion indica que g es proporcional á e, que es de primer grado con relacion á la unidad lineal, y proporcional tambien á $\frac{1}{t^2}$, que es del grado -2 con relacion á la unidad de tiempo. Si en alguna fórmula hallamos la cantidad g, y se multiplican las que representen longitudes por un factor λ, y las duraciones análogas á t por otro θ, habrá que multiplicar por λ y por $\frac{1}{\theta^2}$ todas las cantidades que sean análogas á g. Teniendo presente esta observacion, se conocerá fácilmente que la ecuacion del péndulo

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

es homogénea; pues multiplicando t por θ, l por λ, y g por $\frac{\lambda}{\theta^2}$, se convierte en

$$t\theta = \pi\sqrt{\frac{l\lambda.\theta^2}{g\lambda}},$$

de cuya fórmula desaparecen θ y λ.

34. Finalmente, en todo cuanto precede, hemos supuesto, sin decirlo, que ninguna de las cantidades que figuran en el problema habia sido tomada por unidad de las de su especie; pues de lo contrario podria suceder que fórmulas, verdaderamente homogéneas, dejasen de aparecer como tales. Veamos si es fácil devolverles su homogeneidad.

Si algun problema de geometría nos llevase á la relacion

$$\varphi(a, b, x, y, \ldots\ldots) = 0 \qquad [1],$$

antes de que se determinase la unidad de longitud, asi que se eligiese para esta la linea a, aquella relacion se convertiria en

$$\varphi\left(1, \frac{b}{a}, \frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \ldots\ldots\right) = 0 \qquad [2],$$

ó á

$$\varphi(1, b', x', y', \ldots\ldots) = 0 \qquad [3],$$

llamando b', x', y',.... á los cocientes $\frac{b}{a}$, $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{a}$,...... es decir, que llegariamos á una relacion entre números abstractos. Es verdad que la ecuacion [3] será en el fondo homogénea, una vez que se verifica entre números abstractos; pero no presentará á la vista el carácter de homogeneidad. Para devolvérsele, bastará sustituir, en vez de b, x', y',..... sus iguales $\frac{b'a}{a}$, $\frac{x'a}{a}$, $\frac{y'a}{a}$,..... y escribir despues ó en vez de $b'a$, x por $x'a$ é y en lugar de $y'a$,..... y así sucesivamente: de este modo volverémos á encontrar la ecuacion (2), que no es mas que la (1) escrita bajo otra forma; pues multiplicándola por a^m, si m es el grado de homogeneidad, se vendrá á parar á la (1).

32. Tiene una grandísima importancia en geometría analítica la consideracion de la homogeneidad, porque es constantemente un medio de comprobacion, ya sea al poner en ecuacion un problema, ya en el curso mismo de las operaciones, y tambien, por último, cuando se ha llegado á tener los resultados: sirve de método mnemónico para retener las fórmulas: finalmente, hace que las fórmulas sean muy simétricas, y aun á veces sugiere métodos nuevos para calcular los resultados con mas prontitud y elegancia. Por lo tanto, es muy esencial que los lectores adquieran desde el principio lo que se debe llamar el sentimiento de la homogeneidad, y lo conseguirán ejercitándose en comprobar la homogeneidad de cuantas fórmulas encuentren. Pueden empezar estos ejercicios en las ecuaciones que hasta aquí llevamos establecidas.

§ II.—Construccion de las espresiones algebráicas.

33. Cuando se han espresado analíticamente las relaciones que existen entre las incógnitas de un problema y los datos de una figura, y se ha obtenido ya, por medio del cálculo, la espresion algebráica de cada incógnita, falta aun la traduccion á la geometría de los resultados analíticos; esto es, falta todavía reemplazar por construcciones geométricas las operaciones indicadas: lo que se llama *construir* las fórmulas halladas.

Construccion de las espresiones racionales. — Supondrémos, para empezar, que la incógnita que se considera es una línea, por lo cual su espresion tendrá que ser homogénea y de primer grado.

Si es entera y de la forma $x=a+b-c+d-e$, bastará, para construirla, tomar sobre una recta indefinida XX' (fig. 18), en el mismo sentido, y á contar desde un punto determinado O, las distancias OA, AB, BD, iguales respectivamente á las líneas a, b, d, que están afectadas del signo $+$; y tomar despues, en sentido contrario, y desde el último punto obtenido D, las longitudes DC, CE ó CE', iguales respectivamente á las líneas c y e que van precedidas del signo $-$.

Fig. 18.

El resultado, es decir, el valor de x será OE ú OE', y deberá tomarse como positivo ó como negativo, segun que esté situado el punto E respecto al O hácia el lado que hubiésemos convenido en tomar como positivo ó en el que se considere como negativo.

34. Cuando el valor de x sea fraccionario y de la forma $x=\frac{ab}{m}$, quedará construido buscando una cuarta proporcional á las líneas m, a y b, de modo que se verifique $m:a=b:x$, lo que ya sabemos hacer.

Si tuviera la forma $x=\frac{abcd}{mnp}$ ó sea $x=\frac{ab}{m}\cdot\frac{c}{n}\cdot\frac{d}{p}$, se construirán sucesivamente una cuarta proporcional y á las tres líneas m, a y b; otra z á las n, c é y, y, finalmente, otra x á las p, d y z. Con efecto, este procedimiento nos irá dando sucesivamente $my=ab$, $nz=cy$, $px=dz$, de donde resulta, multiplicando ordenadamente los primeros por los primeros, y los segundos por los segundos miembros, $mnpx=abcd$, y por consiguiente, $x=\frac{abcd}{mnp}$.

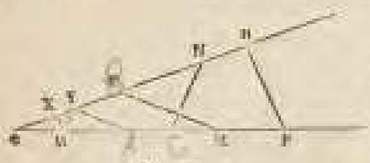


Fig. 19.

Pueden ligarse entre sí las construcciones de cierto modo que sirva para abreviarlas. Tírense por un punto O (figura 19) dos rectas que formen un ángulo cualquiera; á partir del punto O, tómense *alternativamente* sobre cada una de ellas las distancias

OA, OB, OC, OD, OM, ON, OP,

que sean iguales respectivamente á

a, b, c, d, m, n, p;

únanse B con M, C con N y D con P, y tírense las rectas AY paralela á BM, YZ paralela á CN, y ZX paralela á DP: la distancia OX será la longitud pedida. La misma simetría de estas construcciones hace que sea muy fácil conservarlas en la memoria.

35. Cuando el valor de x venga espresado por una fraccion, cuyos dos términos sean polinomios, se podrá dar á los dos la forma de enteros. Sea, para fijar las ideas,

$$x=\frac{a^3b-3a^2bc+4c^2d^2}{2ab^2+5bc^2-d^3}.$$

Eligiendo una línea arbitraria u, dividiendo cada uno de los términos del numerador y del denominador por una potencia de u que tenga una unidad menos que el grado del término que se divide, y multiplicando despues el numerador por u para establecer la homogeneidad, trasformarémos el valor de x en

$$x=\frac{u\left(\frac{a^3b}{u^3}-\frac{3a^2bc}{u^3}+\frac{4c^2d^2}{u^3}\right)}{\frac{2ab^2}{u^2}+\frac{5bc^2}{u^2}-\frac{d^3}{u^2}}.$$

Es fácil construir, por el método seguido en el número anterior, tanto los términos que hay entre paréntesis en el numerador como los del denominador; y llamando á estos valores A, B, C, D, E, F, tendrémos

$$x=\frac{u(A-B+C)}{D+E-F}.$$

Las espresiones $A-B+C$ y $D+E-F$ se construirán por la regla del núm. 33; y designando por M el valor de la primera, y por N el de la segunda, tendrémos

$$x=\frac{uM}{N},$$

que es una cuarta proporcional á N, M y u.

Como la línea u es arbitraria, sucede muchas veces que se la puede elegir de modo que haga menor el número de las construcciones. Sea, por ejemplo,

$$x=\frac{a^4-6a^3b+5a^2b^2-3ab^3+2b^4}{2a^3+4a^2b-3ab^2-b^3}.$$

Eligiendo $u=a$, se reducirá la espresion anterior á

$$x=\frac{a\left(a-6b+\frac{5b^2}{a}-\frac{3b^3}{a^2}+\frac{2b^4}{a^3}\right)}{2a+4b-3\frac{b^2}{a}-\frac{b^3}{a^2}},$$

y no habrá que aplicar la regla del núm. 32 mas que a las tres espresiones

$$\frac{b^2}{a},\ \frac{b^3}{a^2},\ \frac{b^4}{a^3},$$

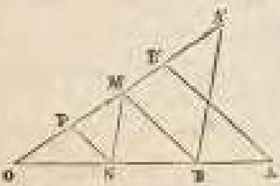


Fig. 20.

cuyos valores se hallan todos por una misma construccion. Desde un punto O, vértice de un ángulo AOA' (figura 20), se tomarán sobre los dos lados $OA=OA'=a$, $OB=OB'=b$; se tirará BM paralela á AB', MN paralela á A'B, y, por último, NP paralela á AB': con lo cual tendrémos

$$OM=\frac{b^2}{a},\quad ON=\frac{b^3}{a^2},\quad OP=\frac{b^4}{a^3}.$$

En el caso de que los dos polinomios puedan descomponerse en factores, se simplifican mucho las construcciones: sirva de ejemplo

$$x=\frac{2b^2c^2+2a^2c^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}{ab^2-2abc+ac^2},$$

que se puede poner bajo la forma

$$x=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{a(b-c)^2}.$$

Como es muy fácil construir las cantidades que hay en cada paréntesis, se reducirá inmediatamente la espresion propuesta á la forma

$$x=\frac{A.B.C.D}{a.m^2},$$

que se construirá por la regla del núm. 34.

36. Construccion de las espresiones irracionales. — Pasemos á ocuparnos del caso en que el valor de x sea irracional.

Si puede reducirse á un radical de segundo grado, tendrá que ser homogénea y de segundo grado la cantidad que esté sometida al radical.

Sea, como primer ejemplo, $x=\sqrt{ab}$: su valor quedará construido buscando una media proporcional entre las líneas a y b.

Si fuese $x=\sqrt{a^2+b^2}$, hallaríamos el valor de x en la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tuviese por catetos a y b.

Si $x=\sqrt{a^2-b^2}$, el valor de x será un cateto del triángulo rectángulo que tenga una hipotenusa igual á a y el otro cateto igual á b, ó tambien se puede hallar el valor de x en una media proporcional entre las longitudes $a+b$ y $a-b$.

37. Cuando la cantidad sometida al radical sea una fraccion algebráica, el grado del numerador deberá tener dos unidades mas que el del denominador. Tomemos, por ejemplo, para fijar las ideas

$$x=\sqrt{\frac{a^5-4a^2b^3+bc^4}{2a^3+3bc^2}}.$$

Eligiendo una longitud arbitraria u, dividirémos cada término de numerador y denominador por una potencia de u que tenga una unidad menos que el grado del término que se divide, y multiplicarémos el numerador por u^2 con objeto de establecer la homogeneidad; y de este modo tendrémos

$$x=\sqrt{\frac{u^2\left(\frac{a^5}{u^4}-4\frac{a^2b^3}{u^4}+\frac{bc^4}{u^4}\right)}{2\frac{a^3}{u^2}+3\frac{bc^2}{u^2}}}.$$

Como puede reducirse la cantidad que hay dentro del paréntesis á una línea m, y el denominador á otra n, resultará

$$x=\sqrt{\frac{u^2m}{n}} \quad ó \quad x=\sqrt{u.\frac{um}{n}},$$

ó bien $x=\sqrt{u.v}$, representando por v la cuarta proporcional á n, m y u: este último valor de x es una media proporcional entre u y v.

Por el mismo método podemos construir el valor de cualquier radical de segundo grado; pero como u es arbitraria, se la puede elegir de modo que simplifique mucho las operaciones. Asi es que, en el ejemplo anterior, si hubiésemos tomado $u=a$, habria resultado

$$x=\sqrt{\frac{a^2\left(a-4\frac{b^3}{a^3}+\frac{bc^4}{a^4}\right)}{2a+3\frac{bc^2}{a^2}}},$$

que es un valor mas sencillo que el precedente.

Tambien puede suceder que los polinomios sean de tal naturaleza que se los pueda descomponer en factores, y es muy conveniente aprovechar esta circunstancia. Si tuviésemos, por ejemplo,

$$x=\sqrt{\frac{a^4-2a^3b+2a^2b^2-2ab^3+b^4}{a^2+2ab}},$$

se le podria transformar en

$$x=\sqrt{\frac{(a-b)^2(a^2+b^2)}{a(a+2b)}}=\sqrt{\frac{(a-b)^2\left(a+\frac{b^2}{a}\right)}{a+2b}}.$$

Suponiendo ahora que $\frac{b^2}{a}=m$, $a-b=\text{A}$, $a+m=\text{B}$, $a+2b=\text{C}$, se convertirá la última forma en

$$x=\sqrt{\frac{\text{A}^2\text{B}}{\text{C}}}=\sqrt{\text{A}.\frac{\text{AB}}{\text{C}}};$$

y representando por D el valor de $\frac{\text{AB}}{\text{C}}$, se tendrá $x=\sqrt{\text{AD}}$, que es una media proporcional entre A y D.

38. Si el valor de x estuviese representado por un radical de cuarto grado, seria menester que la cantidad sometida al radical fuera de cuarto grado y homogénea. Supongamos, para fijar las ideas,

$$x=\sqrt[4]{\frac{a^6+3a^2b^4-2b^6}{2a^3+5b^3}}.$$

Eligiendo una recta arbitraria u, dividiendo cada término, tanto del numerador como del denominador, por una potencia de u que sea inferior en una unidad al grado del término que se divide, y multiplicando el numerador por u^3 para restablecer la homogeneidad, resultará:

$$x=\sqrt[4]{\frac{u^3\left(\frac{a^5}{u^3}+3\frac{a^3b^2}{u^3}-2\frac{b^5}{u^3}\right)}{2\frac{a^2}{u}+5\frac{b^2}{u}}}$$

La cantidad que hay dentro del paréntesis se reducirá á una recta m, y el denominador á otra n, con lo que la espresion anterior se convertirá en

$$x=\sqrt[4]{\frac{u^3m}{n}} \text{ ó sea } x=\sqrt{u\sqrt{u\,.\,\frac{um}{n}}},$$

y si llamamos p á la cuarta proporcional á n, m y u, se convertirá en

$$x=\sqrt{u\sqrt{up}}.$$

Por último, designando por q la media proporcional entre u y p, se podrá decir que $x=\sqrt{uq}$, que es una media proporcional entre u y q.

Este método es aplicable á la construccion de los valores espresados por cualesquiera radicales de cuarto grado; pero aun se puede simplificar, eligiendo convenientemente la línea arbitraria u, como sucedería en el ejemplo anterior, haciendo $u=a$.

Cuando se pueda descomponer en dos factores de segundo grado la cantidad sometida al radical, el valor que represente el radical primario vendrá espresado por una media proporcional entre los de dichos dos radicales de segundo grado, que ya sabemos construir. Ejemplo: $x=\sqrt[4]{a^4-b^4}$, que se puede poner bajo la forma $x=\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2-b^2}}$, y suponiendo que $\sqrt{a^2+b^2}=m$, y que $\sqrt{a^2-b^2}=n$, cuyos valores sabemos ya construir por lo dicho en el núm. 36; no quedará ya mas que construir la media proporcional entre las rectas m y n.

39. Simplificacion de los procedimientos generales. — Los procedimientos que dejamos espuestos bastan para construir todas las espresiones que pueden resultar de la aplicacion del álgebra á la geometría; mas cuando se ha adquirido mucha práctica, se ocurren otros varios que no pueden formularse en reglas generales.

Sirva de ejemplo

$$x=\sqrt[4]{\frac{2a^5-4a^4b+4a^3b^2-4a^2b^3+2ab^4}{a+b}},$$

cuya espresion puede escribirse bajo la forma

$$x=\sqrt{(a-b)\sqrt{(a^2+b^2)\frac{2a}{a+b}}}.$$

Observando que a^2+b^2 puede convertirse en un cuadrado c^2, que $\sqrt{c^2.\frac{2a}{a+b}}$ es el lado de un cuadrado, cuya superficie está con la de c^2 en la misma razon que la línea $2a$ con la $a+b$, y llamando d á este lado, resultará $x=\sqrt{(a-b)d}$, que es una media proporcional entre $a-b$ y d.

40. Construccion de ángulos. — En todo lo que llevamos dicho hemos supuesto que la incógnita era una línea; pero tambien puede suceder que sea un ángulo, que vendrá dado generalmente por una de sus líneas trigonométricas; y como es preciso que la espresion que hayamos obtenido sea homogénea y del grado *cero*, despues de hacer las oportunas trasformaciones, y en virtud de procedimientos análogos á los ya esplicados, se la podrá poner bajo la forma $\frac{a}{b}$, en que a y b sean líneas.

Fig. 21.

Bajo este supuesto, si la espresion es $\operatorname{sen} x=\frac{a}{b}$, construyendo un triángulo rectángulo ABC (fig. 21), que tenga b por hipotenusa y a por uno de sus catetos, el ángulo pedido será el opuesto á dicho cateto a.

Si fuese $\cos x=\frac{a}{b}$, hecha la misma construccion, tendríamos el ángulo x en el adyacente al cateto a.

Cuando tuviésemos $\operatorname{tang} x=\frac{a}{b}$, la incógnita sería el ángulo que estuviese opuesto al lado a en un triángulo rectángulo que tuviera por catetos a y b.

Para que las dos primeras construcciones puedan verificarse, es preciso que sea $a < b$: la tercera será siempre posible.

41. Supongamos que se quiera construir

$$\operatorname{tang} x = \frac{ab + cd}{ac - bd},$$

que, dividiendo ambos términos por ac, se convierte en

$$\operatorname{tang} x = \frac{\frac{b}{c} + \frac{d}{a}}{1 - \frac{b}{c} \cdot \frac{d}{a}}.$$

Supongamos $\operatorname{tang} y = \frac{b}{c}$, y $\operatorname{tang} z = \frac{d}{a}$, cuyos ángulos se construyen fácilmente, siguiendo la regla dada arriba, y resultará

$$\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{tang} y + \operatorname{tang} z}{1 - \operatorname{tang} y . \operatorname{tang} z} = \operatorname{tang} (y + z),$$

lo que quiere decir que el ángulo x es la suma de los y y z.

Si hubiera que construir

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{a^2 + ab} - \sqrt{a^2 - ab}}{a},$$

podríamos escribir

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 + \frac{b}{a}} - \sqrt{1 - \frac{b}{a}},$$

y como es necesario, para que esta fórmula sea real, que b sea menor que a, podrémos suponer $\operatorname{sen} y = \frac{b}{a}$, con lo que tendrémos

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 + \operatorname{sen} y} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} y} = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} y;$$

es decir, que el ángulo x es la mitad del y.

(En los dos últimos ejemplos hemos supuesto implícitamente que se trata del menor de los ángulos á quienes corresponde la tangente ó el seno dados).

42. Debemos observar en este lugar que la construccion de los ángulos ayuda muchas veces á la de las fórmulas que representan líneas.

Sirva de ejemplo la espresion

$$x=\frac{\sqrt{a^4-a^3b-ab^3+b^4}}{a+b},$$

que se puede escribir bajo la forma

$$x=(a-b)\sqrt{1-\frac{ab}{(a+b)^2}}.$$

Como el producto ab tiene qué ser siempre menor que $(a+b)^2$, si buscamos una media proporcional m entre a y b, esta será menor que $a+b$: así, pues, suponiendo sen $y=\frac{m}{a+b}$, y construyendo el ángulo y por la regla dada en el núm. 40, vendrá el valor de x espresado en

$$x=(a-b)\sqrt{1-\text{sen}^2 y}=(a-b)\cos y.$$

Estando ya trazado el ángulo y, tomarémos sobre uno de sus lados, á partir del vértice, una longitud igual á $a-b$, y el valor de x será la proyeccion de esta longitud sobre el otro lado.

Fig 22.

Pueden enlazarse entre sí estas construcciones, segun lo indicá la figura 22. Se tomarán sobre una misma recta AB $=a$ y BC $=b$: sirviendo de diametro AC, se trazará sobre él una semicircunferencia, en B se levantará la perpendicular BD; haciendo centro en C, y con un radio BD, se trazará un arco de círculo que corte á la semicircunferencia en un punto E; se unirá A con E, se tomará BC′ = BC, y desde C′ se bajará la C′P perpendicular á la AE: el valor de x será la longitud AP.

43 Construccion de superficies y volúmenes. — Tambien puede ocurrir que la incógnita de un problema sea una superficie ó un volúmen.

En el primer caso, la espresion de esta incógnita tendrá que ser homogénea y de segundo grado, y se podrá siempre representar esta superficie por un rectángulo, cuya base a se tomará á arbitrio, y solamente habrá que construir la altura x. De modo que, representando por S la espresion que haya resultado para la superficie de que se trate, se tendrá

$$ax=\mathrm{S},\quad \text{de donde}\quad x=\frac{\mathrm{S}}{a}.$$

Como hemos supuesto que el numerador S es homogéneo y de segundo grado, el valor de x será tambien homogéneo, pero de primer grado; y, por lo tanto, se le podrá construir por alguno de los métodos que dejamos esplicados. Podrémos tambien valernos algunas veces de la circunstancia de ser a una cantidad indeterminada para simplificar los cálculos.

Cuando la incógnita sea un volúmen, su espresion será homogénea y de tercer grado, y podrémos siempre representar este volúmen por un paralelepípedo rectángulo, del que dos dimensiones a y b sean conocidas, y solo habrá que construir la tercera, que llamarémos x. Por manera que si llamamos, para abreviar, V á la espresion que haya resultado para el volúmen de que se trate, tendrémos

$$abx=\mathrm{V},\quad \text{de donde}\quad x=\frac{\mathrm{V}}{ab}.$$

Como hemos supuesto que el numerador V era homogéneo y de tercer grado, el valor de x sera homogéneo y de primer grado, por lo cual sabrémos ya construirle por alguno de los métodos espuestos anteriormente. Deberémos aprovecharnos de la indeterminacion de a y b para hacer que los cálculos resulten mas sencillos.

44. Conviene que los lectores se ejerciten en la construccion: 1.° de las raices de las ecuaciones

$$ax^2+b^2x+c^3=0,\quad ax^4+b^2x^2+c^4=0$$

2.° de las líneas representadas por

$$\frac{a^3}{b^2}-2\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{b},\quad \sqrt{a^2+\sqrt{a^4-b^4}},\quad \sqrt[3]{\frac{a^4+b^4}{a+b}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{3a^5+2b^5}{a}},\quad a\sqrt{\frac{b-c}{b+c}},\quad a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2+c^2}}{c}\right);$$

3.° de los ángulos á que se refieren las relaciones

$$\operatorname{sen} x = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \operatorname{tang} x = \sqrt{\frac{ab - cd}{ab + cd}},$$

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{\frac{a - b}{a + b}}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a + b}}, \quad \operatorname{tang} x = \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

4.° de la superficie representada por

$$\sqrt{a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3};$$

5.° del volúmen representado en la espresion

$$2a^2b + \sqrt{a^4b^2 - 2a^3bc^2 + 2c^6}.$$

§ III.—Transformacion de las coordenadas rectilíneas.

45. Ya hemos visto en el núm. 10 que la ecuacion del círculo es más ó menos complicada, segun el sistema de coordenadas á que esté referida; pues si los ejes son oblícuos, resulta

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2(x - \alpha)(y - \beta)\cos\gamma = r^2;$$

y cuando son rectangulares y pasan por el centro, se reduce á

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

La misma ecuacion de la recta, que tiene, en general, la forma

$$y = ax + b,$$

se convierte en $y = ax$, cuando el orígen de las coordenadas es uno de los puntos de la recta, y aun á $y = 0$, cuando sirve de eje de las x la misma recta de que se trata (9).

Basta con estos dos ejemplos para que se comprenda que, en ciertos casos, debe ser conveniente deducir de la ecuacion de una curva referida á ciertos ejes la que corresponderá á la misma refiriéndola á otros diferentes: en esto consiste el problema de la *transformacion de las coordenadas*, y es bien fácil conocer que se reduce analíticamente á espresar las antiguas coordenadas en funcion de otras nuevas. Con efecto, sustituyendo en la ecuacion de una curva, en vez de las primitivas coordenadas, sus valores con relacion á las nuevas, llegarémos á una relacion constante entre las nuevas coordenadas, cuya relacion espresará la curva referida á los nuevos ejes.

Antes de entrar de lleno en este problema vamos á esponer algunas ideas elementales acerca de las proyecciones.

46. Nociones acerca de las proyecciones. — DEFINICIONES. I. La proyeccion ortogonal de un punto A (fig. 23) sobre un eje XX' es el pié A' de la perpendicular AA' bajada desde el punto al eje.

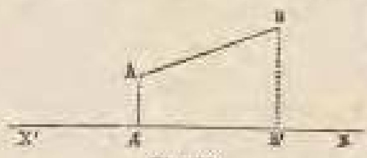


Fig. 23.

II. La proyeccion ortogonal de una recta limitada AB (figura 23) sobre un eje indefinido colocado en el mismo plano que la recta, es, bajo el punto de vista puramente geométrico, la distancia comprendida entre las proyecciones ortogonales A' y B' de los estremos de la recta.

47. Con el objeto de generalizar los cálculos, se ha convenido en considerar la proyeccion de una recta como una *cantidad algebráica*, y capaz, por consiguiente, de cambiar de signo. Para determinar el que le corresponda, se supone que un móvil recorre desde un estremo á otro la recta AB (fig. 23), y que, al mismo tiempo, la proyeccion de este recorre la A'B' de la recta; y bajo esta hipótesis se dice que es *positiva* la proyeccion A'B' cuando la del móvil haya marchado sobre ella en el mismo sentido en que se esté convenido en tomar como positivas las distancias medidas sobre el eje X'X; y se dice que dicha proyeccion A'B' es *negativa*, cuando el móvil haya marchado sobre ella en direccion contraria á aquella en que se cuentan sobre el eje las distancias positivas.

De aquí resulta que la proyeccion de la recta cambiará de *signo* con la direccion en que se mueva el punto imaginario móvil. En lo sucesivo, indicarémos el sentido en que se verifique el movimiento, nombrando primero la letra correspondiente al estremo de la recta, desde el cual se suponga que parte el móvil, y despues la letra del otro estremo: así al nombrar una recta AB, damos á entender que el móvil ha partido de A para marchar hacia B, y cuando la representemos por BA, damos á entender que el móvil ha marchado desde B hácia A. En virtud de todo esto, podemos decir que

$$\text{proy. } AB = -\text{proy. } BA.$$

48. Teorema. *La proyeccion de una recta limitada AB (fig. 23), sobre un eje indefinido X'X tiene por valor algebráico (esto es, en cuanto á la magnitud y el signo) el producto de la longitud absoluta de AB por el coseno del ángulo que AB forme con la parte positiva del eje X'X, ángulo que puede variar desde 0 á 180°.*

Conviniendo en tomar como positivas las distancias que se cuenten desde X' hácia X, y suponiendo primero, que el ángulo formado por AB con el eje X'X sea agudo, será positiva la proyeccion A'B', y tirando por el punto A la AD paralela á X'X, resultará A'B' = AD. Ahora bien; en el triángulo rectángulo ABD se verifica la igualdad

$$AD = AB \cos BAD = AB \cos (AB, X'X);$$

y poniendo en lugar de AD su igual A'B', ó sea la proyeccion de AB, se tendrá

$$\text{proy. } AB = AB \cos (AB, X'X).$$

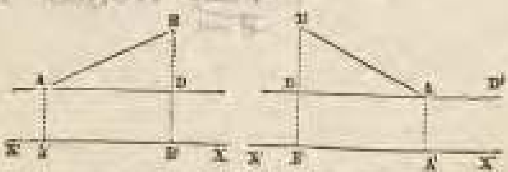


Fig. 24. Fig. 25.

Suponiendo que sea obtuso el ángulo que AB (fig. 25) forme con X'X, será negativa la proyeccion de AB sobre X'X é igual á $-A'B'$; pero tirando, como antes, AD paralela á X'X, tendremos

$$A'B' = AD = AB \cos BAD;$$

y como $BAD = 180° - BAD' = 180° - \text{áng} (AB, X'X)$,

será $\cos BAD = -\cos (AB, X'X)$,

y $A'B' = -AB \cos (AB, X'X)$,

luego $-A'B' = AB \cos (AB, X'X)$,

ó, lo que es lo mismo, $\text{proy. } AB = AB \cos (AB, X'X)$.

Este teorema es general, y aconsejamos á los lectores que repitan la demostracion, cambiando de todas las maneras posibles la colocacion de AB respecto al eje X'X.

49. Teorema. *La suma algebráica de las proyecciones de todos los lados de un polígono cerrado sobre un mismo eje es igual á cero.*

Sea ABCDEFA (fig. 26) el contorno rectilíneo del polígono cerrado, é imaginemos que lo recorre un móvil, saliendo de A y marchando siempre en un mismo sentido hasta volver al mismo punto A. La proyeccion del móvil sobre el eje X'X irá recorriendo al mismo tiempo las de los lados del polígono; y como marcha desde el punto A', proyeccion del A, desde donde partió el móvil, y despues de haber recorrido una parte del eje X'X, retrocede por el mismo camino hasta volver al punto A', resulta que la suma algebráica de las proyecciones de los diferentes lados del polígono propuesto se reduce á cero, que es lo que nos habiamos propuesto demostrar.

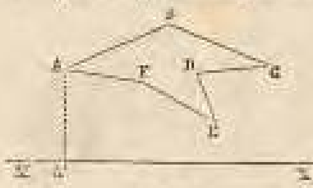


Fig. 26.

Corolario. Representando por a, b, c.....l los valores absolutos de los lados de un polígono cerrado, por α, β, γ.....λ los ángulos que formen respectivamente estos lados con la parte positiva del eje de proyeccion, podrémos decir que

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + \ldots\ldots + l\cos\lambda = 0\,;$$

ó, mas sencillamente, que $\quad \Sigma a\cos\alpha = 0$,

representando por Σ la palabra *suma*.

50. Cuando no está cerrado el contorno, se llama *resultante* la recta que une el punto desde donde se supone que partió el móvil imaginario con el punto en que se figura que se detuvo.

Teorema. *La proyeccion de la resultante de un contorno poligonal es igual á la suma algebráica de las proyecciones de todos los lados de aquel.*

Sean ABCDEF (fig. 26) el contorno poligonal abierto, y AF su resultante; y como el contorno total ABCDEFA está ya cerrado, se tendrá (49)

$$\text{proy. AB} + \text{proy. BC} + \text{proy. CD} + \text{proy. DE} + \text{proy. EF} + \text{proy. FA} = 0.$$

Tambien sabemos (47) que

$$\text{proy. FA} = -\text{proy. AF};$$

por consiguiente, en virtud de esto y de la ecuacion anterior, podemos decir que

$$\text{proy. AF} = \text{proy. AB} + \text{proy. BC} + \text{proy. CD} + \text{proy. DE} + \text{proy. EF},$$

que es cuanto se queria demostrar.

Corolario. Si dos contornos poligonales abiertos están unidos por sus estremos y se los proyecta sobre un mismo eje, darán proyecciones iguales.

51. Establecidas ya estas nociones, pasemos á ocuparnos de las fórmulas que sirven para cambiar de ejes.

La transformacion mas general consiste en cambiar al mismo tiempo la posicion del origen y la direccion de los ejes; pero es mas sencillo hacer en dos tiempos esta transformacion, suponiendo, primero, que los ejes se han movido paralelamente á sí mismos, y cambiando despues la direccion de estos sin variar la posicion del origen.

Primera transformacion. — Supondrémos, en primer lugar, que se conserve el mismo eje de las x, y que el nuevo de las y sea paralelo á su primitiva posicion. Sean, pues, OX y OY (fig. 27) los ejes primitivos, y O'Y' el nuevo eje de las y. Consideremos un punto cualquiera M de este plano; tiremos por él MP paralela á OY: llamemos x á la primitiva abscisa del punto M, x' á la nueva, y a la abscisa del nuevo orígen con relacion al primitivo.

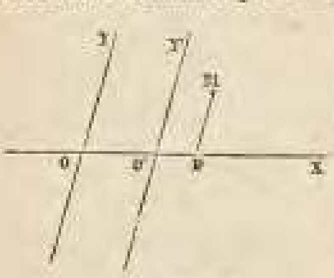


Fig. 27.

Los puntos O, O' y P solamente podrán tener seis posiciones. Cuando ocupen las que representa la figura 27, tendrémos

$$x = \text{OP},\ x' = \text{O'P},\ a = \text{OO'}\ \text{y}\ \text{OP} = \text{OO'} + \text{O'P},$$

de donde resulta $$x = a + x'.$$

Cuando P se halle entre O y O', será

$$x=\mathrm{OP},\ x'=-\mathrm{O'P},\ a=\mathrm{OO'}\ \text{y}\ \mathrm{OP}=\mathrm{OO'}-\mathrm{O'P},$$

de donde resulta $x=a-(-x')$ ó $x=a+x'$.

Fácilmente se reconoce que en todos los casos tendrémos la misma fórmula

$$x=a+x'.$$

52. Si fuera el eje de las y el que hubiese permanecido fijo, y el nuevo de las x tuviera una posicion paralela á la que antes ocupaba, hallariamos de un modo análogo que, llamando y á la primitiva ordenada del punto M, y' á la nueva, y b á la que corresponda al nuevo origen con relacion al antiguo, tendrémos en todos los casos

$$y=b+y'.$$

53 Considerando ya que ambos ejes se hayan movido paralelamente á sí mismos, pasando, por ejemplo, desde la posicion OX, OY (fig. 28) á la O'X', O'Y'; si llamamos x é y á las coordenadas de cualquier punto M del plano referidas á los ejes primitivos, x' é y' las que al mismo punto correspondan en la nueva posicion de los ejes, y a y b las del nuevo origen con relacion á los ejes antiguos, tendrémos

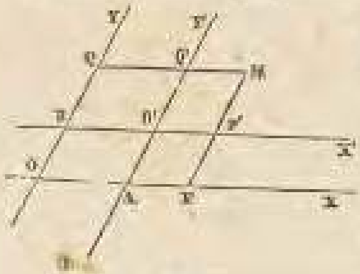


Fig. 28.

$$x=a+x' \ \text{é}\ y=b+y';$$

y segun tenemos ya demostrado, estas fórmulas se verificarán, cualquiera que sea la posicion de los nuevos ejes con relacion á los antiguos y al punto M.

Estas son las fórmulas que sirven para pasar de un sistema de ejes coordenados al de otros paralelos á aquellos.

Para dar á conocer el modo de usarlas, supongamos que un lugar geométrico esté referido á coordenadas rectangulares, y que tenga por ecuacion

$$x^2+y^2-6x+4y+12=0;$$

y que, moviéndose los ejes paralelamente á sí mismos, han quedado en una posicion tal, que el nuevo origen tenga por coordenadas referidas á la posicion primitiva $a=3$

y $b=-2$, cuya hipótesis da

$$x=x'+3 \quad \text{é} \quad y=y'-2;$$

sustituyendo estos valores en la ecuacion precedente, la convertirán en

$$x'^2+y'^2=1,$$

que representa un círculo que tiene su centro en el nuevo orígen, y por radio una longitud igual á la unidad.

54. Segunda transformacion. — Supongamos que los ejes primitivos OX y OY (fig. 29) formen entre sí un ángulo θ; que los nuevos OX′ y OY′ estén colocados de modo que el primitivo OX forme un ángulo α con el OX′ y otro α' con el OY′; que M sea un punto cualquiera del plano: con estas hipótesis, tiremos MP paralela á OY, y MP′ paralela á OY′. La cuestion está reducida á espresar las coordenadas primitivas del punto M, OP y MP, en funcion de las nuevas OP′ y MP′.

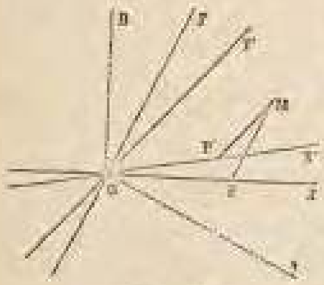


Fig. 29.

Para conseguir esto, tiremos primeramente una recta OA perpendicular á OY, que tambien lo será á MP, y proyectemos sucesivamente sobre esta recta todos los lados del polígono OP′MPO, que supondrémos que ha sido recorrido por un móvil en la misma direccion que indica el órden de las letras. Este móvil habrá recorrido los dos primeros lados en el sentido que les es propio; esto es, desde O hácia P′ y desde P′ hácia M, ó sea desde O hácia X′ y hácia Y′; y á los dos últimos en sentido contrario al de su verdadera direccion; es decir, desde M hácia P y desde P hácia O, ó sea desde Y y desde X hácia O. Segun esto y lo consignado en el número precedente, las proyecciones de estos lados tendrán por valores.

$$+x'\cos(X',A), \quad +y'\cos(Y',A), \; o, \quad \text{y} \quad -x\cos(X,A).$$

Como OA es perpendicular á OY, tendrémos tambien $AOX=90^\circ-\theta$: además

$$X'OA=X'OX+AOX=\alpha+90^\circ-\theta=90^\circ-(\theta-\alpha)$$

$$Y'OA=Y'OX+AOX=\alpha'+90^\circ-\theta=90^\circ-(\theta-\alpha').$$

Por lo tanto, los valores de las proyecciones que hemos considerado serán respectivamente

$$+x' \operatorname{sen}(\theta-\alpha), \quad +y' \operatorname{sen}(\theta-\alpha'), \quad o, \quad y \quad -x \operatorname{sen}\theta;$$

y como, segun el teorema del núm. 49, la suma de estas proyecciones debe ser cero, se tendrá

$$x' \operatorname{sen}(\theta-\alpha)+y' \operatorname{sen}(\theta-\alpha')-x \operatorname{sen}\theta=o,$$

que da $$x=\frac{x' \operatorname{sen}(\theta-\alpha)+y' \operatorname{sen}(\theta-\alpha')}{\operatorname{sen}\theta} \qquad [1].$$

Tiremos ahora una recta OB perpendicular á OX, y proyectémos sobre ella el referido contorno poligonal, cuyos lados tendrán por respectivas proyecciones

$$+x' \cos(X',B), \quad +y' \cos(Y',B), \quad -y \cos(Y,B), \quad y \quad o;$$

pero como OB es perpendicular á OX, será $BOY=90^0-\theta$;

además $$X'OB=90^0-X'OX=90^0-\alpha,$$
$$Y'OB=90^0-Y'OX=90^0-\alpha'.$$

Por consiguiente, los respectivos valores de las proyecciones que estamos considerando, serán

$$+x' \operatorname{sen}\alpha, \quad +y' \operatorname{sen}\alpha', \quad -y \operatorname{sen}\theta \quad y \quad o;$$

y, como en virtud de lo dicho en el teorema del núm. 49, debe ser cero la suma de estas proyecciones, tendrémos

$$x' \operatorname{sen}\alpha+y' \operatorname{sen}\alpha'-y \operatorname{sen}\theta=o,$$

de donde resulta $$y=\frac{x' \operatorname{sen}\alpha+y' \operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\theta} \qquad [2].$$

Las fórmulas [1] y [2] son las que nos habiamos propuesto establecer, y son aplicables á todos los casos que pueden presentarse; pues el teorema del núm. 49 es general; mas pueden simplificarse en algunos casos particulares que vamos á examinar.

55. *Pasar de unos ejes rectangulares á otros oblicuos.* — Por ser rectangular el primitivo sistema de ejes, será $\theta=90^0$; y, por consiguiente, las fórmulas [1] y [2] del número precedente se reducirán á

$$x=x' \cos\alpha+y' \cos\alpha' \quad \text{é} \quad y=x' \operatorname{sen}\alpha+y' \operatorname{sen}\alpha'.$$

Para hacer aplicacion de estas fórmulas, supongamos, por ejemplo, que la ecuacion de cierta curva referida á coordenadas rectangulares sea

$$9x^2-16y^2=144,$$

y que queramos referirla á otro de coordenadas oblícuas, en que el nuevo eje de las abscisas forme con el antiguo un ángulo negativo, cuya tangente sea $-\frac{3}{4}$, y en que el nuevo de las ordenadas forme con el antiguo de las x el ángulo que tenga por tangente $+\frac{3}{4}$: tendrémos

$$\operatorname{tang}\alpha=-\tfrac{3}{4},\quad \text{de donde}\quad \operatorname{sen}\alpha=-0{,}6 \quad \text{y} \quad \cos\alpha=+0{,}8;$$

$$\operatorname{tang}\alpha'=+\tfrac{3}{4},\quad \text{de donde}\quad \operatorname{sen}\alpha'=+0{,}6 \quad \text{y} \quad \cos\alpha'=+0{,}8$$

y con estos datos se reducirán las fórmulas anteriores á

$$x=0{,}8x'+0{,}8y' \quad \text{ó} \quad y=-0{,}6x'+0{,}6y'.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion de la curva, y efectuando las reducciones, tendrémos

$$23{,}04x'y'=144 \quad \text{ó sea} \quad x'y'=6{,}25,$$

que es la ecuacion de la curva referida á los nuevos ejes.

56. *Pasar de unos ejes oblícuos á otros rectangulares.* — Si el primitivo sistema de ejes fuese oblícuo, y el nuevo, rectangular, tendria que ser $\alpha'-\alpha=90^\circ$ ó $\alpha'-\alpha=270^\circ$.

La primera hipótesis da $\alpha'=\alpha+90^\circ$, $\theta-\alpha'=\theta-\alpha-90^\circ$; por consiguiente, $\operatorname{sen}(\theta-\alpha')=-\cos(\theta-\alpha)$, y $\operatorname{sen}\alpha'=\cos\alpha$.

En su consecuencia, las fórmulas del núm. 54 quedarán reducidas á

$$x=\frac{x'\operatorname{sen}(\theta-\alpha)-y'\cos(\theta-\alpha)}{\operatorname{sen}\theta} \quad \text{ó} \quad y=\frac{x'\operatorname{sen}\alpha+y'\cos\alpha}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Por la segunda hipótesis llegariamos á unas fórmulas que únicamente se diferenciarian de estas en que y' resultaria con signo contrario, como podia preverse desde luego.

Para hacer aplicacion de las fórmulas anteriores, supongamos que la ecuacion de cierta curva referida á unos ejes que formen entre sí un ángulo de 60°, sea

$$x^2+xy+y^2=1,$$

y que tratemos de referirla á otros rectangulares, en que permanezca el mismo el de las x. En este caso, serán $\theta=60^\circ$ y $\alpha=0$, y, por consiguiente,

$$x=x'-y'\frac{\cos 60^\circ}{\operatorname{sen}60^\circ} \quad \text{ó} \quad y=y'\frac{1}{\operatorname{sen}60^\circ}.$$

Pero $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, y las fórmulas que habrémos de emplear se-son las

$$x=x'-\frac{y'}{\sqrt{3}} \quad \text{é} \quad y=\frac{2y'}{\sqrt{3}}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion de la curva, hallarémos la siguiente:

$$x'^2+y'^2=1,$$

que será la de la misma curva referida á los nuevos ejes.

57. *Pasar de unos ejes rectangulares á otros tambien rectangulares.*—Finalmente, cuando se trate de pasar de un sistema de ejes rectangulares á otro de la misma especie, habrá que hacer en las fórmulas del núm. 54 $\theta=90^\circ$ y $\alpha'=\alpha+90^\circ$, lo que viene á ser lo mismo que suponer $\theta=90^\circ$ en las fórmulas del número que precede. De este modo hallarémos

$$x=x'\cos\alpha-y'\operatorname{sen}\alpha \quad \text{é} \quad y=x'\operatorname{sen}\alpha+y'\cos\alpha.$$

Observaciones. I. Estas dos fórmulas están comprendidas en la siguiente, que puede servir para recordarlas

$$x+y\sqrt{-1}=(x'+y'\sqrt{-1})(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha.\sqrt{-1}).$$

II. Como una aplicacion de estas fórmulas podemos convencernos de que la ecuacion del círculo referido á ejes rectangulares que pasen por el centro, permanece la misma, cualesquiera que sean estos ejes. Con efecto, si en la ecuacion

$$x^2+y^2=R^2,$$

sustituimos, en vez de x é y, los valores que dan estas fórmulas, resultará

$$x'^2+y'^2=R^2,$$

que es la misma ecuacion que teníamos.

III. En el caso de que los nuevos ejes rectangulares sean las bisectrices de los ángulos que formaban los primitivos, tendrémos

$$\operatorname{sen}\alpha=\cos\alpha=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

y, por consiguiente, se reducirán las fórmulas anteriores á

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \quad \text{é} \quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

58. Transformacion general. — Es muy fácil hallar las fórmulas de que hay que hacer uso cuando se cambian á un mismo tiempo la posicion del origen y la direccion de los ejes.

Supongamos primeramente que estos se han movido paralelamente á sí mismos, y que x'' é y'' son las coordenadas de un punto con relacion á este nuevo sistema de ejes paralelos á los primitivos: en el núm. 53 vimos que bastaria suponer

$$x=a+x'' \quad \text{é} \quad y=b+y'',$$

siendo a y b las coordenadas de la nueva posicion del origen referidas al primitivo sistema.

Cambiemos ya la direccion de los ejes, conservando en su misma posicion el nuevo origen, para lo cual habrá que aplicar las fórmulas del núm. 54, que, llamando x' é y' á las coordenadas referidas á este tercer sistema, serán

$$x''=\frac{x'\,\text{sen}\,(\theta-\alpha)+y'\,\text{sen}\,(\theta-\alpha')}{\text{sen}\,\theta} \quad \text{é} \quad y''=\frac{x'\,\text{sen}\,\alpha+y'\,\text{sen}\,\alpha'}{\text{sen}\,\theta};$$

y sustituyendo estos valores en vez de x'' é y'' en las fórmulas precedentes, resultarán las que han de servir en el caso mas general de la transformacion de las coordenadas rectilíneas, que son

$$x=a+\frac{x'\,\text{sen}\,(\theta-\alpha)+y'\,\text{sen}\,(\theta-\alpha')}{\text{sen}\,\theta},$$

$$y=b+\frac{x'\,\text{sen}\,\alpha+y'\,\text{sen}\,\alpha'}{\text{sen}\,\theta}.$$

OBSERVACIONES. I. Estas fórmulas han de tener siempre el carácter

$$x=a+mx'+ny' \quad \text{é} \quad y=b+px'+qy',$$

es decir, que tienen que ser de primer grado, tanto respecto á x' como de y'. Para efectuar la transformacion inversa, es decir, para volver de los ejes X' é Y' á los primitivos X é Y no habria mas que despejar x' é y' y sustituir en la ecuacion de la curva los valores de aquellas coordenadas en funciones de x é y sacadas de las fórmulas últimas. Fácilmente se comprende que estos valores de x' é y' serán tambien de primer grado respecto á x é y. De aquí se deduce que, al sustituir, en vez de x é y, sus valores en funcion de x' é y', ó viceversa, en la ecuacion de una curva algebráica, no podrá sufrir aumento el grado de esta ecuacion; tampoco podrá sufrir disminucion; pues, de lo contrario, al volver del nuevo sistema al antiguo, aumentaria dicho grado.

II. Puede ocurrir, en algunos casos, que la ecuacion resultante de esta sustitucion sea de menor grado respecto á alguna de las dos variables x' ó y' que el que tenia la ecuacion dada respecto de x ó y. Por ejemplo, si una curva referida á coordenadas rectangulares tuviese por ecuacion

$$x^3 - 3xy + y^3 = o,$$

y se tomasen por nuevos ejes las bisectrices de los ángulos formados por los primeros, resultaria para ecuacion de la curva referida á los nuevos ejes

$$(x^2 + 3y^2)x\sqrt{2} - 3(x^2 - y^2) = o,$$

que respecto á y no es mas que de segundo grado.

59. Clasificacion de las líneas. — Se dice que una línea es *algebráica* cuando lo es su ecuacion con respecto á las coordenadas x é y; y si la ecuacion que representa dicha línea es trascendente respecto de x ó de y, tambien se llama *trascendente* la línea.

Resulta de las observaciones anteriores que el grado de una ecuacion algebráica es un caracter permanente y propio de la curva que representa; es decir, que este carácter subsiste, cualquiera que sea el sistema de ejes que se haya elegido: por esta razon se clasifican las líneas algebráicas por el grado de las ecuaciones que las representan; así es que se llama línea algebráica de m^{mo} *grado* ó de m^{mo} *órden* á la que está representada por una ecuacion algebráica del grado m^{mo}.

Advertirémos, sin embargo, que una ecuacion del grado m^{mo} únicamente representará una línea de m^{mo} órden cuando dicha ecuacion no pueda descomponerse en factores; pues, en caso contrario, representaria tantas líneas como factores la compusiesen, y cada una de estas líneas seria de un órden inferior al grado de la ecuacion.

En virtud de esta observacion, cuando se tenga varias ecuaciones que represente cada una cierta línea, si despues de haber pasado todos los términos al primer miembro, se multiplican todas las ecuaciones, el producto será una ecuacion que representará varias líneas diferentes: así es que, si $A=0$ representa una línea, y $B=0$ otra, ambas están representadas simultáneamente en la ecuacion $A.B=0$. Hemos tenido cuidado de advertir que se supone haber pasado todos los términos al primer miembro antes de multiplicar las ecuaciones, porque si no se hubiera hecho esto, lo que representaria la ecuacion producto seria una línea que pasase por el punto de interseccion de las representadas por las ecuaciones que se multiplicaron

Tambien debemos observar que hay casos en que una ecuacion del grado m^{mo} representa únicamente un punto, y otros en que nada representa: lo primero ocurre siempre que la ecuacion no admite mas que una solucion real, y lo segundo cuando todas son imaginarias. Por ejemplo, la ecuacion $(x-a)^2+(y-b)^2=0$, que no tiene mas solucion real que $x=a$, $y=b$, representa únicamente el punto (a, b); y la $x^2+y^2+K^2=0$, que no admite solucion alguna real, no puede representarse geométricamente. Con objeto de generalizar la clasificacion de las líneas, suele decirse, en el segundo de los dos casos de que nos vamos ocupando, que la ecuacion del grado m^{mo} representa una línea imaginaria.

60. Teorema. *Una recta no puede encontrar á una línea algebráica de* m^{mo} *órden mas que en* m *puntos.*

Como las coordenadas de los puntos de interseccion de dos líneas cualesquiera algebráicas deben satisfacer simultáneamente á las ecuaciones de las dos líneas, para hallar los puntos de interseccion, no hay mas que buscar las soluciones que sean comunes á las dos ecuaciones. Por consiguiente, para hallar los puntos en que una recta corta á una línea del grado m^{mo}, habrá que resolver un sistema de dos ecuaciones: una (9) de primer grado, y la otra del grado m^{mo}; y como este sistema no puede admitir mas que m soluciones, queda demostrado el teorema.

CAPÍTULO III.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES.—PROBLEMAS RELATIVOS Á LA LÍNEA RECTA.

§ I—Ecuaciones de primer grado.

61. Construccion de las ecuaciones de primer grado. — La ecuacion mas general de primer grado con dos variables tiene la forma

$$Ax+By+C=o \qquad [1].$$

Si $A=o$, sacarémos de ella $y=-\frac{C}{B}$, que quiere decir que todos los puntos del lugar que representa esta ecuacion tienen una misma ordenada; por lo tanto, dicho lugar es una recta paralela al eje de las x.

Si $B=o$, sacarémos de la misma ecuacion [1] $x=-\frac{C}{A}$, que representa una paralela al eje de las y.

Cuando ni A ni B sean cero, se puede dividir la ecuacion [1] por cualquiera de estos coeficientes, por B por ejemplo, y resolver la ecuacion con respecto á y, y resultará

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

ó sea suponiendo, para abreviar, que

$$-\frac{A}{B}=a \quad \text{y} \quad -\frac{C}{B}=b,$$

$$y=ax+b.$$

Esta es la forma en que mas generalmente se considera la ecuacion de primer grado con dos variables.

62. Para hallar el lugar que esta representa, considerarémos primero el caso particular de que b sea cero y que se tenga solamente

$$y=ax, \quad \text{que da} \quad \frac{y}{x}=a \qquad [2].$$

Supongamos que M, M′, M″ (fig. 30) sean varios puntos del lugar, y tiremos las ordenadas MP, M′P′, M″P″, y unamos los puntos M, M′, M″ con el orígen O por medio de las rectas MO, M′O, M″O. En virtud de la ecuacion [2] tendrémos

Fig. 30.

$$\frac{MP}{OP}=a,\ \frac{M'P'}{OP'}=a,\ \frac{-M''P''}{-OP''}=a;$$

y, por consiguiente,

$$\frac{MP}{OP}=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{M''P''}{OP''}.$$

De aquí resulta que los triángulos MPO, M'P'O, M''P''O han de ser semejantes, por que tienen iguales los ángulos MPO, M'P'O, M''P''O..... comprendidos entre lados proporcionales; por consiguiente, los ángulos en O de todos estos triángulos tambien serán iguales, y tendrán que confundirse en una sola las direcciones de las tres rectas MO, M'O, M''O; es decir, que los puntos M, M', M'' tienen que hallarse en una misma recta tirada por el orígen. Al mismo resultado llegaríamos en el caso que representa la figura 31.

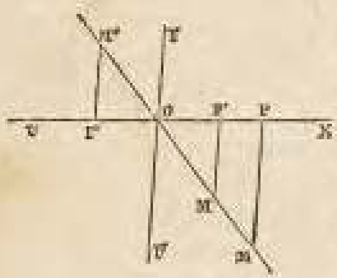


Fig. 31.

Por lo tanto, el lugar que representa la ecuacion $y=ax$ es una recta que pasa por el orígen.

Pasemos ya á ocuparnos de la ecuacion $y=ax+b$. Sean M, M', M'' (fig. 32) varios puntos del lugar que esta representa; tírense las ordenadas MP, M'P', M''P'', y sea NN'' la recta representada por la ecuacion $y=ax$: los puntos N, N', N'' en que á esta última cortan las MP, M'P', M''P'' tienen por ordenadas NP, N'P', N''P'', que son iguales á las MP, M'P', M''P'', disminuidas alge-

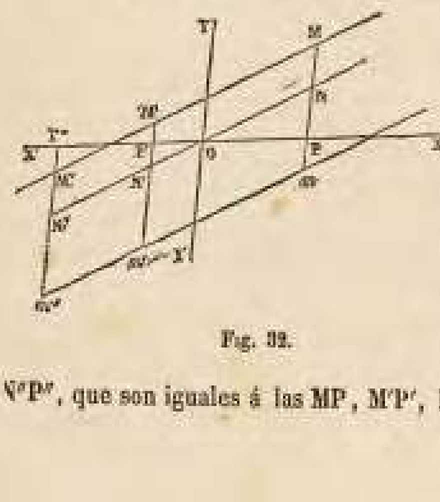


Fig. 32.

bráicamente en lo que valga b. Tendrémos, por lo tanto,

$$MN = M'N' = M''N'' = b;$$

de modo que las rectas MM', MM'', M'M'' serán paralelas á NN'', y, por lo mismo, se confundirán en una sola.

Vemos así que el lugar que representa la ecuacion $y = ax + b$ es una recta paralela á la representada por $y = ax$.

Observaciones. I. Hemos visto en el núm. 9 que *toda recta está representada por una ecuacion de primer grado*, y tambien es cierta la recíproca, pues ahora acabamos de demostrar que *toda ecuacion de primer grado representa una recta.*

II. Cuando se suponga que a y b no pueden admitir valores infinitos, la forma $y = ax + b$ no será tan general como la $Ax + By + C = 0$; porque en esta última está comprendido el caso en que falte y; esto es, en que la recta sea paralela al eje de las y, cuyo caso no está comprendido en la primera. Pero conviniendo en que a y b puedan tomar valores infinitos, la primera fórmula será tan general como la segunda. El caso particular de que *x sea igual á una cantidad constante*, se obtendrá suponiendo que a y b se hacen infinitos, pero que la razon geométrica entre ambos es una cantidad finita; pues dividiendo por a, hallarémos

$$\frac{y}{a} = x + \frac{b}{a},$$

y haciendo $a = \infty$ y $\frac{b}{a} = -c$, resultará $o = x - c$, ó sea $x = c$, que representa una paralela al eje de las y.

63. Resúmen. — En virtud de cuanto queda dicho, toda ecuacion de primer grado, ya tenga una ó dos variables, representa una línea recta. Por esta razon se dice que una espresion algebráica es *lineal* respecto á las cantidades a, b, x....., cuando respecto á las mismas es entera y de primer grado. Las fórmulas que hemos hallado para la transformacion de coordenadas son *funciones lineales* de las nuevas coordenadas.

64. Coordenadas en el origen; coeficiente angular. — Conviene mucho conocer la significacion geométrica de los coeficientes a y b.

Supongamos que ABM (fig. 33) sea la recta que representa la ecuacion $y=ax+b$, y A y B los puntos en que corta á los ejes; sean tambien M un punto cualquiera de esta recta, y MP su ordenada; tirese BQ paralela á OX. Sea θ el ángulo que forman entre sí los ejes, y llamemos α al MAX que forma la recta con la parte positiva del eje de las x, ángulo que tambien es igual al MBQ.

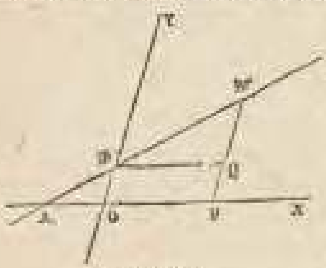


Fig. 33.

Desde luego se comprende que, para determinar la ordenada del punto B, basta hacer $x=o$ en la ecuacion de la recta; porque B es de todos los puntos de la recta el único cuya abscisa es nula: de este modo se halla $y=b$. Por lo tanto, el coeficiente b representa la ordenada que corresponde al punto en que la recta corta al eje de las y, y esto es lo que se llama *la ordenada en el orígen*.

Del mismo modo se halla *la abscisa en el orígen*, ó sea OA, haciendo $y=o$ en la ecuacion de la recta, que dará $x=-\dfrac{b}{a}$.

El triángulo MQB da

$$\frac{MQ}{BQ}=\frac{\text{sen MBQ}}{\text{sen BMQ}};$$

pero
$$MQ=MP-PQ=MP-OB=y-b=ax,$$
$$BQ=x,\quad MBQ=\alpha,$$
$$BMQ=MBY=YBQ-MBQ=\theta-\alpha;$$

por consiguiente, la primera igualdad se convertirá en

$$\frac{ax}{x}\ \text{ó}\ a=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,(\theta-\alpha)}\qquad [3],$$

que manifiesta que el coeficiente a espresa la razon que existe entre los senos de los ángulos que forma la recta con los ejes coordenados. Esto es lo que se llama el *coeficiente angular* de la recta.

Cuando los ejes son rectangulares, este coeficiente representa la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje de las x; pues haciendo en la ecuacion [3] $\theta=90°$, resulta

$$a = \text{tang}\,\alpha.$$

Tambien puede demostrarse directamente; porque siendo en este caso rectángulo en Q el triángulo MBQ dará

$$\frac{MQ}{BQ} = \text{tang}\,MBQ = \text{tang}\,\alpha.$$

65 Rectas paralelas.—Como el coeficiente angular no depende en cada sistema de ejes mas que del ángulo α, conserva el mismo valor para todas las rectas que sean paralelas á una misma direccion, y le cambia para las que tengan diferente direccion. En virtud de esto, la condicion analítica necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas es que *tengan el mismo coeficiente angular*; de modo que las rectas representadas por las ecuaciones

$$y = \tfrac{1}{2}x - 1, \quad y = \tfrac{1}{2}x + 5,$$

son paralelas.

66. Construccion de una recta cuya ecuacion es dada.—Cuando se conoce el coeficiente angular y la ordenada en el orígen, se puede construir la recta; pues basta deducir de la relacion [3] el valor de α en funcion de θ y del coeficiente angular dado a. Así hallarémos

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{a \,\text{sen}\,\theta}{1 + a \cos\theta}.$$

Como esta fórmula no se puede calcular por logaritmos, tomando por incógnita $\text{tang}\,(\alpha - \tfrac{1}{2}\theta)$, llegarémos á la siguiente, en que pueden emplearse:

$$\text{tang}\,(\alpha - \tfrac{1}{2}\theta) = \frac{a-1}{a+1}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\theta \qquad [4].$$

De esta se deduce el valor de $\alpha - \frac{1}{2}\theta$, y en su consecuencia el de α.

Hecho esto, tomarémos sobre el eje de las y, á contar desde el orígen y en la direccion conveniente, una distancia OB, que sea algebráicamente igual á b (fig. 33); por B tirarémos una recta BQ paralela al eje de las x, y otra BM, que forme con BQ un ángulo igual á α: esta recta BM será la pedida.

Sirva de ejemplo la ecuacion $2y + 3x = 1$, de la que se deduce $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. Suponiendo que los ejes formen entre sí un ángulo de 60°, sacarémos de la fórmula [4]

$$\tan g\,(\alpha - 40^\circ) = +5 \,.\, \tan g\,. 40^\circ,$$

de la que irán resultando

$$\log \tan g\,(\alpha - 40^\circ) = 0{,}6989700 + 9{,}9238135 = 10{,}6227835,$$

$$\alpha - 40^\circ = 76^\circ 35' 37'',1,$$

$$\alpha = 116^\circ 35' 37'',1,$$

por consiguiente, $\quad b = +\frac{1}{2}$,

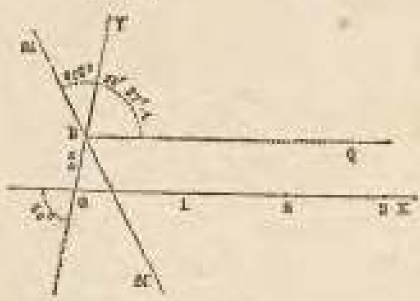


Fig. 34.

y, por lo mismo, la recta que representa la ecuacion propuesta es la indicada en la figura 34.

Ofrece generalmente mayor ventaja construir la recta por medio de los puntos en que corta á los dos ejes.

67. Recíprocamente, si fueran conocidos b y α, se tendria $a = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} (\theta - \alpha)}$, y quedarian conocidas las cantidades constantes de la ecuacion de la recta.

Supongamos, por ejemplo, que estando referida una recta á dos ejes que formen entre sí un ángulo de 60°, corte al eje de las y en la parte negativa y á una distancia del origen igual á dos unidades lineales, y que forme con el de las x un ángulo de 120°. Tendrémos en este caso $\theta = 60^\circ$, $\alpha = 120^\circ$, y de aquí

$$a = \frac{\operatorname{sen} 120^\circ}{\operatorname{sen} (-60^\circ)} = -1:$$

ademas hemos dicho que $b = -2$; por consiguiente, la recta de que nos ocupamos tendrá por ecuacion

$$y = -x - 2.$$

68. Diferentes formas que puede afectar la ecuacion de una recta. — La ecuacion de la recta puede admitir otras varias formas que es necesario conocer.

Ecuacion referida á las coordenadas en el origen. — Ya hemos visto en el núm. 64 que b es la ordenada en el origen, y que $-\frac{b}{a}$ es la abscisa.

Supongamos, pues,

$$b=q \quad \text{y} \quad -\frac{b}{a}=p, \quad \text{de donde} \quad a=-\frac{q}{p}:$$

sustituyendo estos valores en la ecuacion $y=ax+b$, la convertirán en

$$y=-\frac{q}{p}x+q$$

de la que sale

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1 \qquad [3],$$

que es la ecuacion de la recta en funcion de sus coordenadas en el origen.

En consecuencia de esto, si tuviésemos la ecuacion

$$\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1, \quad \text{que se reduce á} \quad \frac{x}{3}+\frac{y}{(-2)}=1,$$

podriamos decir inmediatamente que la recta que representa corta al eje de las x en la parte positiva, á una distancia del origen igual á 3, y al de las y en la parte negativa, en un punto que diste del origen dos unidades lineales: construyendo estos puntos, no faltará mas que hacer pasar por ellos la recta á que se referia la ecuacion propuesta.

Recíprocamente: si supiéramos que una recta cortaba al eje de las x en su parte negativa á una distancia del origen igual á 4 unidades, y al de las y en la positiva, á la distancia 5 del origen, tendriamos la ecuacion de la recta que pasa por ellos escribiendo

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{5}=1, \quad \text{de donde} \quad 4y-5x=20.$$

69. Ecuacion de una recta que pasa por un punto dado. — Sean x' é y' las coordenadas del punto dado, é

$$y=ax+b$$

la ecuacion de la recta que se busca. Como se dice que esta recta ha de pasar por el punto que tiene por coordenadas x' é y', deberá verificarse que

$$y'=ax'+b.$$

Restando ordenadamente cada miembro de esta ecuacion de los de la anterior, resultará

$$y-y'=a(x-x') \qquad [6].$$

Como esta relacion se verifica para cada uno de los puntos de la recta, es la misma ecuacion de esta recta. Conviene á todas las rectas que pasan por el punto dado (x', y'); y es necesario dar un valor particular á a para determinar completamente aquella de que queramos ocuparnos. La ecuacion

$$y-1=a(x+2)$$

representa todas y cualquiera de las rectas que pasan por el punto que tiene por coordenadas $x=-2$ é $y=+1$; pero la $y-1=3(x+2)$ corresponde únicamente á la que forme con los ejes OX y OY dos ángulos tales, que la razon de sus senos sea igual á 3.

70. Ecuacion de una recta que pasa por dos puntos dados. — Sean (x', y') y (x'', y'') los dos puntos dados.

Como la recta que buscamos ha de pasar por el primero de ellos, tendrá una ecuacion de la forma (69)

$$y-y'=a(x-x').$$

Como tambien ha de pasar por el segundo punto, las coordenadas de este tendrán que satisfacer á la ecuacion anterior, y se verificará que

$$y''-y'=a(x''-x');$$

y dividiendo la ecuacion anterior por esta para eliminar á a, resultará

$$\frac{y-y'}{y''-y'}=\frac{x-x'}{x''-x'} \qquad [7].$$

Por ejemplo, si fuesen $x'=1$, $y'=-2$ y $x''=-2$, $y''=-4$, tendriamos

$$\frac{y+2}{-4+2}=\frac{x-1}{-2-1} \quad \text{ó sea} \quad \frac{y+2}{2}=\frac{x-1}{3},$$

que sería la ecuacion de la recta que pasase por los puntos que tuvieran dichas coordenadas.

OBSERVACIONES. I. El coeficiente angular de la recta que representa la ecuacion [7] es $\frac{y''-y'}{x''-x'}$, ó sea un quebrado que tiene por numerador la diferencia de las ordenadas, y por denominador la de las abscisas de los puntos dados.

II. Suponiendo que las coordenadas de estos sean $x'=p$, $y'=o$ y $x''=o$, $y''=q$, hallarémos

$$\frac{y-o}{o-q}=\frac{x-p}{p-o}; \quad \text{y resultando de esta que} \quad \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1,$$

volverémos á la ecuacion [5] del núm. **68**.

III. Si uno de los puntos por donde hubiera de pasar la recta fuese el origen de las coordenadas, haciendo, por ejemplo, $x''=o$, $y''=o$, resultaria

$$\frac{y-y'}{y'}=\frac{x-x'}{x'} \quad \text{ó bien} \quad \frac{y}{y'}=\frac{x}{x'}, \quad \text{ó, finalmente,} \quad y=\frac{y'}{x'}x \quad [8],$$

que es la ecuacion de la recta que desde el origen va al punto que tiene por coordenadas x' é y'.

IV. Cuando las coordenadas de cada uno de los puntos dados fuesen iguales y de signo contrario á las del otro, de modo que $x''=-x'$ é $y''=-y'$, resultaria

$$\frac{y-y'}{2y'}=\frac{x-x'}{2x'}, \quad \text{ó bien} \quad \frac{y}{y'}=\frac{x}{x'}, \quad \text{ó, por último,} \quad y=\frac{y'}{x'}x,$$

que manifiesta claramente que la recta pasa por el orígen [62].

71. **Otra forma de la ecuacion de una recta.**—Conviene que demos á conocer otra forma en que se puede presentar la ecuacion de una línea recta, aunque se usa menos que las anteriores.

Sea AB (fig. 35) la recta de que se trate. Bájese sobre ella, desde el orígen O, la perpendicular OD$=p$; y sean α y β los respectivos ángulos que forme esta perpendicular con los ejes OX y OY.

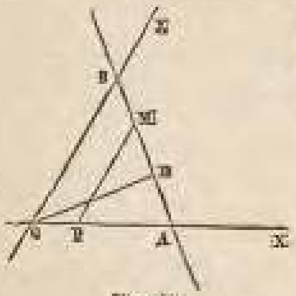


Fig. 35.

Tirando la $MP=y$, llamando x á la distancia OP y proyectando sobre OD la línea poligonal OPMD, se tendrá

$$x\cos\alpha+y\cos\beta=p \qquad [9].$$

Cuando los ejes sean rectangulares, serán suplementarios β y α, y podrá escribirse

$$x\cos\alpha+y\,\mathrm{sen}\,\alpha=p \qquad [10].$$

§ II.—Problemas sobre la línea recta.

72. Problema I. *Hallar el punto en que se cortan dos rectas dadas por sus ecuaciones.*

Sean las ecuaciones de estas dos rectas

$$y=ax+b \quad \text{é} \quad y=a'x+b'.$$

El problema geométrico consiste en determinar el punto cuyas coordenadas satisfagan á ambas ecuaciones, y el algebráico en calcular las coordenadas de este mismo punto. Así pues, si suponemos que, en vez de representar x é y en estas dos ecuaciones, las coordenadas de cualquiera de sus puntos representen únicamente las coordenadas del punto de interseccion, quedará reducido el problema algebráico á buscar los valores de x y de y que puedan satisfacer simultáneamente á las ecuaciones de las dos rectas dadas.

De este modo hallarémos, para coordenadas del punto de interseccion,

$$x=\frac{b'-b}{a-a'} \quad \text{é} \quad y=\frac{ab'-a'b}{a-a'}.$$

Ejemplo.—Sean las dos rectas

$$y=2x+1 \quad \text{é} \quad y=-3x+11.$$

Las coordenadas del punto de interseccion serán:

$$x=\frac{11-1}{2+3}=2 \quad \text{é} \quad y=\frac{2.11+1.3}{2+3}=5.$$

Observaciones. I. Para que sea posible el problema, es necesario y suficiente que los valores de x y de y sean finitos, y para esto es preciso que a y a' sean desiguales.

II. Cuando $a=a'$, las dos rectas serán paralelas (65) y no podrán encontrarse: así es que el cálculo da en este caso valores infinitos para las coordenadas del punto de interseccion.

III. Cuando al mismo tiempo se verificase que $a=a'$ y $b=b'$, los valores de x y de y se presentarian bajo la forma $\frac{0}{0}$, como debia suceder, pues en este caso coincidirian las dos rectas en una sola y tendrian comunes todos sus puntos.

73 PROBLEMA II. *Hallar la ecuacion general que comprenda á todas las rectas que concurran en un mismo punto con otras dos dadas por sus ecuaciones.*

Sean las ecuaciones de estas últimas

$$y-ax-b=0 \quad \text{é} \quad y-a'x-b'=0.$$

Multiplicando la segunda por un coeficiente indeterminado m, y restándola de la primera, resultará

$$(y-ax-b)-m(y-a'x-b')=0 \qquad [1],$$

que, siendo de primer grado, tanto respecto á x como á y, representa una recta. Además, todos los valores de x y de y que satisfagan al mismo tiempo las ecuaciones propuestas, reducen á cero á los dos paréntesis de esta última [1], y, por consiguiente, la verifican; es decir, que el punto de interseccion de las rectas que se habian dado se encuentra sobre la que representa la ecuacion [1]. En su consecuencia, esta última ecuacion representa una recta que pasa por el punto de interseccion de las dos que se habian dado, y como su direccion es indeterminada, porque lo es el coeficiente m, resuelve completamente el problema, y es, por lo mismo, la ecuacion que se buscaba.

OBSERVACIONES. I. En general, si

$$f(x, y)=0 \quad \text{y} \quad \varphi(x, y)=0$$

son las ecuaciones de dos curvas cualesquiera, la

$$f(x, y)+m\varphi(x, y)=0$$

representará á toda curva que pase por los puntos de interseccion de las que tienen por ecuaciones $f(x, y)=0$ y $\varphi(x, y)=0$.

II. Los coeficientes de la ecuacion [1] son funciones lineales de m. Cuando los coeficientes de una ecuacion de primer grado con dos variables son funciones lineales de un mismo parámetro, esta ecuacion representa rectas que pasan por un mismo punto. En efecto, siendo la forma de una ecuacion de esta clase

$$(am+a')y+(bm+b')x+cm+c'=0 \qquad (2),$$

ordenándola respecto á m, resultará

$$(ay+bx+c)m+a'y+b'x+c'=0;$$

y, verificándose esta última, cualquiera que sea el valor de m, siempre que sean á la vez

$$ay+bx+c=0, \quad a'y+b'x+c'=0,$$

se ve claramente que, si $x=\alpha$ é $y=\beta$ forman la solucion comun de estas dos ecuaciones, todas las rectas que la (2) representa pasarán por el punto (α, β).

III. Como m es indeterminado, se le pueden dar valores convenientes para que la recta (1) tome una direccion dada ó pase por algun determinado punto.

En el primer caso, se tendrá presente que el coeficiente angular de la recta (1) es

$$\frac{a-ma'}{1-m};$$

por consiguiente, suponiendo que sea a'' el coeficiente angular de una recta que tenga la direccion que se quiera dar á la (1), tendrá que verificarse

$$\frac{a-ma'}{1-m}=a'', \quad \text{de donde se deducirá} \quad m=\frac{a-a''}{a'-a''}.$$

En el segundo caso, llamando x' é y' á las coordenadas del punto por el que se quiere que pase la recta, estas coordenadas tendrán que satisfacer á la ecuacion (1), y se verificará

$$(y'-ax'-b)-m(y'-a'x'-b')=0,$$

de donde sale $$m=\frac{y'-ax'-b}{y'-a'x'-b'}.$$

EJEMPLO. Suponiendo que las ecuaciones de las rectas dadas sean

$$y=2x+1 \quad \text{é} \quad y=-3x+11,$$

si se pide la de una recta que concurra con estas y sea paralela á la $y=x$, será preciso tomar

$$m=\frac{2-1}{-3-1}=-\tfrac{1}{4},$$

y la ecuacion [1] será en el caso actual

$$(y-2x-1)+\tfrac{1}{4}(y+3x-11)=0 \quad \text{ó sea} \quad y=x+3.$$

Por el contrario, cuando se quiere hallar la ecuacion de una recta que concurra con las dos primeras y pase ademas por un punto que tenga por coordenadas $x'=3$ é $y'=0$, habrá que tomar

$$m=\frac{0-2.3-1}{0+3.3-11}=\tfrac{7}{2},$$

y se convertirá la ecuacion [1] en

$$(y-2x-1)-\tfrac{7}{2}(y+3x-11)=0 \quad \text{ó sea} \quad y=-5x+15.$$

IV. La ecuacion [1] proporciona fácilmente la condicion necesaria para que tres rectas concurran en un mismo punto. Con efecto, sean las ecuaciones de estas tres rectas

$$y=ax+b,\quad y=a'x+b',\quad y=a''x+b'';$$

y como la [1] es la forma general de la ecuacion de todas las rectas que concurran en un mismo punto con las dos primeras, es preciso que se pueda identificar con la tercera. De la [1] se saca

$$y=\frac{a-ma'}{1-m}x+\frac{b-mb'}{1-m}.$$

Es preciso, pues, que se tenga

$$\frac{a-ma'}{1-m}=a'' \quad \text{y} \quad \frac{b-mb'}{1-m}=b'';$$

y eliminando m entre estas dos relaciones, se obtendrá la condicion necesaria para que las tres rectas dadas concurran en un punto. Esta condicion es

$$\frac{a-a''}{a'-a''}=\frac{b-b''}{b'-b''},$$

que es bien fácil recordar.

Podemos ofrecer, como ejemplo de esto, las rectas que tienen por ecuaciones

$$y=2x+1,\quad y=x+3,\quad y=-5x+15,$$

que concurren en un mismo punto, pues se verifica que

$$\frac{2+5}{1+5}=\frac{1-15}{3-15} \quad \text{ó bien} \quad \frac{7}{6}=\frac{-14}{-12}.$$

Herrera

74. Problema. III. *Hallar el ángulo que forman entre sí dos rectas dadas por sus ecuaciones.*

Sean estas $y=ax+b$ é $y=a'x+b'$.

Tírense por el origen dos rectas paralelas á las dadas, y tendrán por ecuaciones

$$y=ax \quad \text{é} \quad y=a'x.$$

Estas paralelas formarán con el eje de las x los mismos ángulos α y α' que formaban las rectas propuestas; y solamente con observar las ecuaciones $y=ax$ é $y=a'x$ se puede averiguar cuál de los dos ángulos es mayor, si el α ó el α'. Con efecto, de las mismas resulta

$$x=\frac{y}{a} \quad \text{y} \quad x=\frac{y}{a'};$$

y dando en ambas un mismo valor positivo á y, la espresion que resulte algebráicamente menor corresponderá á la recta que forme mayor ángulo sobre la parte positiva del eje de las x. Por consiguiente, será bastante averiguar cuál de las dos cantidades $\frac{1}{a}$ ó $\frac{1}{a'}$ es algebráicamente menor.

Supongamos, para fijar las ideas, que α sea mayor que α', y llamemos V al ángulo que forman entre sí las rectas $y=ax$ é $y=a'x$, que es el mismo que forman entre sí las dos rectas dadas, y tendrémos

$$V=\alpha-\alpha';$$

pero, segun (66), tenemos

$$\text{tang}\,\alpha=\frac{a \,\text{sen}\,\theta}{1+a\cos\theta};$$

$$\text{tang}\,\alpha'=\frac{a' \,\text{sen}\,\theta}{1+a'\cos\theta}.$$

Además

$$\text{tang}\,V=\text{tang}\,(\alpha-\alpha')=\frac{\text{tang}\,\alpha-\text{tang}\,\alpha'}{1+\text{tang}\,\alpha\,.\,\text{tang}\,\alpha'};$$

y poniendo, en vez de tang α y tang α', sus respectivos valores, y haciendo las reducciones, tendrémos

$$\text{tang}\,V=\frac{(a-a')\,\text{sen}\,\theta}{1+(a+a')\cos\theta+aa'} \qquad [1].$$

Si los ejes fuesen rectangulares, seria $\theta=90°$; y, en su consecuencia

$$\text{tang } V=\frac{a-a'}{1+aa'} \qquad [2].$$

Ejemplos. I. Supongamos que los ejes formen entre sí un ángulo de 60° y que las ecuaciones de dos rectas referidas á ellos sean

$$y=-3x+3 \quad \text{ó} \quad y=2x+1.$$

Haciendo aplicacion á este caso de la regla que hemos dado mas arriba, conocerémos que la primera de las dos rectas forma mayor ángulo que la otra por encima de la parte positiva del eje de las x. Así, pues, tendrémos

$$\text{tang } V=\frac{(-3-2)\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1+(-3+2)\cdot\frac{1}{2}-2\cdot3}=\frac{5\sqrt{3}}{11},$$

de donde resulta

$$\log \text{tang } V=10+\log\frac{5\sqrt{3}}{11}=9,8961370$$

$$V=38°12'47'',5.$$

II. Supongamos, para segundo ejemplo, que los ejes sean rectangulares, y las ecuaciones de dos rectas referidas á ellos, las siguientes:

$$y=\tfrac{3}{2}x-\tfrac{1}{2} \quad \text{ó} \quad y=-\tfrac{4}{3}x+\tfrac{1}{3}.$$

La segunda es la que forma mayor ángulo con la parte positiva del eje de las x y por encima de este; por lo tanto, tendrémos

$$\text{tang } V=\frac{-\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}{1-\frac{3\cdot4}{2\cdot3}}=\frac{17}{6},$$

de donde se deduce que

$$\log \text{tang } V=10+\log\frac{17}{6}=10,4522977$$

y que
$$V=70°33'35'',7.$$

Observacion. Para hallar la ecuacion de la bisectriz del ángulo V, basta determinar en (1) la cantidad m, de modo que la recta que representa esta última ecuacion forme ángulos iguales con las dadas.

75. Condicion para que dos rectas sean perpendiculares. — Es muy fácil deducir de la espresion que hemos hallado para la tang V la condicion á que han de satisfacer dos rectas para que sean perpendiculares entre sí.

Efectivamente, para que el ángulo V sea recto, es preciso que su tangente sea infinita, lo cual exige una de dos cosas: ó que el denominador sea cero, y se tenga, por consiguiente,

$$1+(a+a')\cos\theta+aa'=o \qquad [3]$$

ó que el numerador sea infinito, sin que lo sea el denominador. Para esto, seria preciso que a ó a' fuesen infinitas: supongamos que lo sea a', lo que equivale á suponer que la segunda de las rectas dadas sea paralela al eje de las y. Dividamos en este caso por a los dos términos de la espresion de tang V, y haciendo en seguida $a'=\infty$, hallarémos

$$\operatorname{tang} V=\frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta+a},$$

cuya espresion no puede ser infinita sino cuando $a=-\cos\theta$. Pero los valores simultaneos $a'=\infty$ y $a=-\cos\theta$, satisfacen á la relacion [3]; luego esta es la que espresa verdaderamente la condicion necesaria y suficiente para que las dos rectas sean perpendiculares entre sí.

(No podrian verificarse simultáneamente $a=\infty$ y $a'=\infty$, pues en este caso ambas rectas serian paralelas al eje de las y, y no podrian cortarse perpendicularmente).

Cuando los ejes son rectangulares, $\cos\theta$ es cero, y la condicion de perpendicularidad queda reducida á

$$1+aa'=o \qquad [4].$$

76. Problema IV. *Hallar la ecuacion de la perpendicular bajada desde un punto dado á una recta, cuya ecuacion tambien esté dada, y calcular la longitud de esta perpendicular.*

Sean x' é y' las coordenadas del punto, é $y=ax+b$ la ecuacion de la recta á la que se quiere tirar una perpendicular desde aquel.

Como esta perpendicular ha de pasar por el punto cuyas coordenadas son x' é y', estará representada por una ecuacion de la forma (69)

$$y-y'=a'(x-x').$$

Además, la condicion de perpendicularidad hace que

$$1+(a+a')\cos\theta+aa'=o \quad \text{de donde} \quad a'=-\frac{1+a\cos\theta}{a+\cos\theta};$$

en su consecuencia, la perpendicular que buscamos tiene por ecuacion

$$y-y'=-\frac{1+a\cos\theta}{a+\cos\theta}(x-x') \qquad (5).$$

Para hallar su longitud es preciso determinar las coordenadas del punto en que corta á la recta dada, y para esto hallar los valores de x y de y que satisfagan simultáneamente á la ecuacion (5) y á la $y=ax+b$. Esto se consigue fácilmente poniendo la última bajo la forma

$$y-y'=a(x-x')-(y'-ax'-b).$$

De esta y de la (5) se puede ya sacar

$$x-x'=\frac{(y'-ax'-b)(a+\cos\theta)}{a^2+2a\cos\theta+1},$$

ó
$$y-y'=-\frac{(y'-ax'-b)(1+a\cos\theta)}{a^2+2a\cos\theta+1}.$$

Ahora bien; llamando P á la longitud de la perpendicular, ó sea á la distancia entre los puntos x, y y x', y', tendrémos (¶)

$$P^2=(x-x')^2+(y-y')^2+2(x-x')(y-y')\cos\theta,$$

en la que, sustituyendo, en vez de $x-x'$ y de $y'-y'$, sus valores, y haciendo las reducciones, resultará

$$P^2=\frac{(y'-ax'-b)^2\operatorname{sen}^2\theta}{a^2+2a\cos\theta+1},$$

y de esta
$$P=\pm\frac{(y'-ax'-b)\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2+2a\cos\theta+1}} \qquad (6).$$

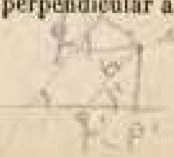
Casos particulares. Cuando la recta á quien hay que bajar la perpendicular es el eje de las x, haciendo $a=o$ y $b=o$, resulta

$$P=\pm y'\operatorname{sen}\theta.$$

Cuando sea el eje de las y, dividiendo ambos términos por a, y haciendo despues $a=\infty$ y $b=o$, se hallará

$$P=\pm x'\operatorname{sen}\theta.$$

Si los ejes fuesen rectangulares, se reduciria la ecuacion de la perpendicular á



$$y-y'=-\frac{1}{a}(x-x') \qquad [7],$$

y su longitud quedaria espresada por

$$P=\pm\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{a^2+1}} \qquad [8].$$

Cuando se da la recta por una ecuacion de la forma

$$Ax+By+C=0,$$

a longitud de la perpendicular es

$$P=\pm\frac{(Ax'+By'+C)\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{A^2-2AB\cos\theta+B^2}},$$

en caso de ser oblicuos los ejes, ó

$$P=\pm\frac{Ax'+By'+C}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

si son rectangulares.

Observaciones. I. Como el valor de P tiene que ser por su misma índole esencialmente positivo, se tomará el signo $+$ ó el signo $-$, segun se necesite para que aquel valor resulte positivo; esto es, se tomará el signo positivo cuando la cantidad á que está afectando sea positiva, y el negativo, cuando negativa.

II. La cantidad $y'-ax'-b$ que hay en el numerador de P, no es mas que el primer miembro de la ecuacion de la recta dada puesta bajo la forma

$$y-ax-b=0,$$

habiendo reemplazado en ella, en vez de x é y, las coordenadas del punto dado. Resulta de esto que, si el punto dado está sobre la misma recta á quien hay que bajar la perpendicular, la espresion de P se reducirá á cero, como en efecto debia suceder.

III. Sean AB (fig. 36) la recta dada, y M el punto desde el que hay que bajarla una perpendicular: tírese MP paralela á OY, que corte á la recta AB en un punto N: de este modo se tendrá $x'=$ OP, y, por consiguiente, NP$=ax'+b$: en su consecuencia

$$y'-ax'-b=\text{MP}-\text{NP}.$$

Esta cantidad tiene que ser positiva siempre que el punto M esté mas alto que la recta dada, y negativa cuando esté mas bajo. Es fácil comprobar que esto mismo se verifica, cualesquiera que sean las posiciones que tengan el punto y la recta dada respecto de los ejes.

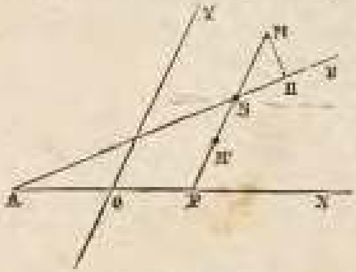


Fig. 36.

IV. Tambien se puede hallar geométricamente la fórmula [1], pues el triángulo rectángulo MNH (fig. 36), da

$$\mathrm{MH} \quad \text{ó} \quad \mathrm{P} = \mathrm{MN}\,\mathrm{sen}\,\mathrm{MNH};$$

pero $$\mathrm{MN} = \mathrm{MP} - \mathrm{NP} = y' - ax' - b,$$

$$\mathrm{tang}\,\mathrm{MNH} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{a + \cos\theta},$$

de donde resulta $$\mathrm{sen}\,\mathrm{MNH} = \frac{\pm\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{a^2 + 2a\cos\theta + 1}};$$

y, por consiguiente, $$\mathrm{P} = \frac{\pm(y' - ax' - b)\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\theta}}.$$

EJEMPLO. Suponiendo que un punto referido á ejes rectangulares tenga por coordenadas $x=1$ é $y=5$, y que la ecuacion de una recta sea con referencia á los mismos ejes

$$y = -\tfrac{3}{4}x - 2,$$

veamos cuál será la de una perpendicular tirada á esta desde aquel punto, y cuál la espresion de su longitud.

La ecuacion que buscamos será

$$y - 5 = \tfrac{4}{3}(x + 1),$$

y la espresion de la longitud

$$\mathrm{P} = \pm\frac{5 + \frac{3}{4} + 2}{\sqrt{\frac{9}{16} + 1}} = 5.$$

77. PROBLEMA V. *Conociendo las ecuaciones de dos rectas, se quiere hallar las de las bisectrices de los ángulos formados por aquellas rectas.*

Sean $$y = ax + b \quad \text{é} \quad y = a'x + b'$$

las ecuaciones de las dos rectas que suponemos conocidas. Representando por X é Y las coordenadas de cualquier punto de una de las bisectrices, las distancias desde ese punto á cada una de las dos rectas (76) estarán espresadas por

$$P = \pm \frac{(Y - aX - b)\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2 + 2a\cos\theta + 1}} \quad \text{y} \quad P' = \pm \frac{(Y - a'X - b')\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a'^2 + 2a'\cos\theta + 1}}.$$

Segun la propiedad característica de la bisectriz de un ángulo, los valores de P y de P' tienen que ser iguales; luego tomándolos con los mismos signos, podrémos establecer

$$\frac{Y - aX - b}{\sqrt{a^2 + 2a\cos\theta + 1}} - \frac{Y - a'X - b'}{\sqrt{a'^2 + 2a'\cos\theta + 1}} = 0 \qquad [9];$$

y tomándolos con signo contrario

$$\frac{Y - aX - b}{\sqrt{a^2 + 2a\cos\theta + 1}} + \frac{Y - a'X - b'}{\sqrt{a'^2 + 2a'\cos\theta + 1}} = 0 \qquad [10],$$

que son las ecuaciones de las dos bisectrices.

Tambien pudiera llegarse á estos resultados partiendo de la ecuacion general que representa todas las rectas que pasan por el punto de interseccion de las dos dadas; es decir, de la fórmula

$$(y - ax - b) - m(y - a'x - b') = o;$$

pues basta con determinar m de modo que la recta representada por esta ecuacion forme ángulos iguales con las $y - ax - b = o$, $y - a'x - b' = o$.

Haciendo, para abreviar,

$$\sqrt{a^2 + 2a\cos\theta + 1} = R \quad \text{y} \quad \sqrt{a'^2 + 2a'\cos\theta + 1} = R',$$

y sustituyendo, en vez de las letras mayúsculas X é Y, las minúsculas x é y, podrémos escribir las ecuaciones anteriores bajo la siguiente forma

$$y = \frac{aR' - a'R}{R' - R}x + \frac{bR' - b'R}{R' - R} \quad \text{é} \quad y = \frac{aR' + a'R}{R' + R}x + \frac{bR' + b'R}{R' + R} \quad [11].$$

EJEMPLO. Sea

$$y = -\tfrac{3}{4}x + 1 \quad \text{é} \quad y = \tfrac{5}{12}x - 2$$

las ecuaciones de dos rectas con relacion á ejes rectangulares, en cuyo caso $R=\sqrt{a^2+1}$ y $R'=\sqrt{a'^2+1}$, y tendrémos

$$a=-\tfrac{3}{4},\quad R=\tfrac{5}{4},\quad a'=\tfrac{5}{12},\quad R'=\tfrac{13}{12},\quad b=1,\quad b'=-2,$$

y, en virtud de estas equivalencias, hallarémos para ecuaciones de las bisectrices

$$y=8x-\tfrac{43}{2}\quad ó\quad y=-\tfrac{1}{8}x-\tfrac{17}{28}.$$

Observaciones. I. Puede comprobarse por medio de las ecuaciones [11] que las bisectrices representadas por ellas son perpendiculares entre sí. Con efecto, aplicándoles la regla del núm. 75, resulta

$$1+\left(\frac{aR'-a'R}{R'-R}+\frac{aR'+a'R}{R'+R}\right)\cos\theta+\left(\frac{aR'-a'R}{R'-R}\right)\left(\frac{aR'+a'R}{R'+R}\right)=$$

$$=\frac{R'^2(1+2a\cos\theta+a^2)-R^2(1+2a'\cos\theta+a'^2)}{R'^2-R^2}=\frac{R'^2R^2-R^2R'^2}{R'^2-R^2}=0;$$

luego queda satisfecha la condicion de perpendicularidad.

II. Cuando las rectas que se dan son los mismos ejes coordenados, es preciso dividir en las ecuaciones [9] y [10] por a los dos términos de la fraccion en que entre esta letra, y hacer despues $a=\infty$, $b=o$, $a'=o$, $b'=o$, y de este modo hallarémos, para ecuaciones de las bisectrices, las siguientes

$$-X-Y=0\quad y\quad -X+Y=0,$$

ó

$$y=-x\quad ó\quad y=+x,$$

que tambien hubiéramos podido obtener directamente. La segunda representa la bisectriz del ángulo YOX y de su opuesto por el vértice, y la primera la del YOX' y de su opuesto.

78. *Toda ecuacion del grado* m^{mo} *con una sola incógnita representa* m *rectas paralelas, reales ó imaginarias.*

Suponiendo que $f(x)=o$ sea del grado m, y a, b, c,..... l, sus m raices, como sabemos que esta ecuacion equivale á las m de primer grado

$$x=a,\ x=b,\ x=c,\ldots.. x=l,$$

y cada una de estas representa una recta, que puede ser real ó imaginaria, paralelas al eje de las y: la ecuacion $f(x)=o$ representa el sistema de todas ellas.

79. *Toda ecuacion homogénea de m^{mo} grado con dos variables $f(x, y) = o$, representa un haz compuesto de m rectas, ya sean reales ó imaginarias, pero que pasan todas por el orígen.*

Siendo la ecuacion de que se trata homogénea y del grado m, dividiendo por x^m sus dos miembros, tendrá la forma

$$A\left(\frac{y}{x}\right)^m + B\left(\frac{y}{x}\right)^{m-1} + \ldots\ldots + E\left(\frac{y}{x}\right) + F = o;$$

y como resolviéndola con relacion á $\frac{y}{x}$, hallarémos m valores reales ó imaginarios a, b, c,..... se podrá sustituir, en vez de dicha ecuacion, las m de primer grado $\frac{y}{x} = a$, $\frac{y}{x} = b$, $\frac{y}{x} = c$....., y este sistema, y por lo mismo, la ecuacion propuesta representa el de las m rectas

$$y = ax,\ y = bx,\ y = cx\ldots\ldots,$$

reales ó imaginarias, pero que todas pasan por el orígen.

Como ejercicios pueden proponerse los lectores los siguientes: 1.º hallar las ecuaciones de las dos rectas que representa la homogénea de segundo grado con dos variables $Ay^2 + Bxy + Cx^2 = 0$; 2.º expresar las condiciones necesarias y suficientes para que estas dos rectas sean reales; 3.º hallar el ángulo que una de estas rectas forma con la otra, y la condicion para que sean perpendiculares; 4.º hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por dichas dos rectas.

§ III. — Aplicaciones.

80. Ejemplos de algunos teoremas de Geometría demostrados por medio del cálculo. —I. Teorema. *En todo triángulo ABC (fig. 37) se verifica que sus tres medianas AH, BI, CO, concurren en un mismo punto.*

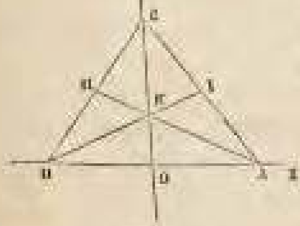


Fig. 37.

Si tomamos por ejes de las coordenadas el lado AB y la mediana CO, no habrá mas que demostrar que las otras dos medianas cortan en un mismo punto al eje de las y.

Sean $OA = OB = m$, y $CO = h$,

con lo cual las coordenadas del punto H, medio de BC, serán $x = -\frac{1}{2}m$ é $y = \frac{1}{2}h$; además, las del punto A son $x = m$ é $y = o$; luego la recta AH, que pasa por estos dos puntos, tendrá por ecuacion (70)

$$\frac{y - 0}{0 - \frac{1}{2}h} = \frac{x - m}{m + \frac{1}{2}m},\quad \text{y, por consiguiente será,}\quad y = \frac{h}{3m}(m - x).$$

Las coordenadas del punto I, medio de AC, son $x=\frac{1}{2}m$ é $y=\frac{1}{2}h$; por otra parte, las del B son $x=-m$ é $y=o$; luego la ecuacion de BI tiene que ser

$$\frac{y-o}{o-\frac{1}{2}h}=\frac{x+m}{-m-\frac{1}{2}m}, \quad \text{de la que resulta} \quad y=\frac{h}{3m}(m+x).$$

Haciendo en estas dos ecuaciones $x=o$, resulta $y=\frac{h}{3}$; por consiguiente, las dos medianas AH y BI cortan á la otra OC en un mismo punto K, colocado en la tercera parte de OC, á contar desde O.

II. Teorema. *Las perpendiculares* AP, BQ, CO *que en todo triángulo* (fig. 38) ABC *se pueden tirar desde cada vértice al lado opuesto, concurren las tres en un mismo punto.*

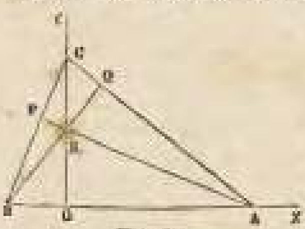


Fig. 38.

Tomando por ejes coordenados el lado AB y la perpendicular CO, bastará, como en el caso anterior, demostrar que las dos rectas AP y BQ cortan al eje de las y en un mismo punto, ó que tienen la misma ordenada en el origen.

Haciendo $OA=m$, $OB=n$, $CO=h$, la ecuacion de BC será (**70**)

$$\frac{y}{h}-\frac{x}{n}=1, \quad \text{ó sea} \quad y=\frac{h}{n}x+h.$$

La recta AP perpendicular á esta, y que pasa por el punto A, que tiene por coordenadas $x=m$ é $y=o$, tendrá por ecuacion (**69**, **75**)

$$y=-\frac{n}{h}(x-m). \qquad (1).$$

Del mismo modo la ecuacion de AC será

$$\frac{y}{h}+\frac{x}{m}=1 \quad \text{ó sea} \quad y=-\frac{h}{m}x+h;$$

por consiguiente, la de BQ, perpendicular á esta, y que pasa por el punto B, cuyas coordenadas son $x=-n$ é $y=o$, tendrá que ser

$$y=\frac{m}{h}(x+n) \qquad (2).$$

Haciendo en las ecuaciones (1) y (2) $x=o$ para hallar la ordenada en el orígen, resultará

$$y=\frac{mn}{h};$$

por lo tanto, las dos perpendiculares AP y BQ cortan al eje de las y, ó sea á la OC en un mismo punto K. Además, la distancia OK es una cuarta proporcional á las OC, OA y OB.

Observacion. De aquí se deduce una demostracion geométrica del mismo teorema.

Con efecto, sea K el punto en que AP corta á CO, y tendrémos que el triángulo BOK es semejante al BQA, que lo es á su vez á COA; por consiguiente,

$$\frac{OK}{BO}=\frac{OA}{OC}.$$

Supongamos que sea K' el punto de interseccion de BQ con CO: como el triángulo AOK' es semejante al APB, y este al COB, tendrémos

$$\frac{OK'}{OA}=\frac{BO}{OC} \quad \text{ó bien} \quad \frac{OK'}{BO}=\frac{OA}{OC}.$$

Comparando esta proporcion con la primera, verémos que OK' = OK; luego AP y BQ cortan á CO en un mismo punto.

Conviene que el lector demuestre, por via de ejercicio, los siguientes teoremas:

Las perpendiculares á los lados de un triángulo levantadas en los puntos medios de ellos, concurren todas tres en un mismo punto.

Las bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren todas en un mismo punto.

Cualquiera que sea el punto que se tome dentro de un rombo, y bajando desde aquel perpendiculares á los lados, la suma de las longitudes de estas perpendiculares es una cantidad constante.

Las bisectrices de los ángulos que forman las prolongaciones de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero inscribible, son perpendiculares entre sí.

Cualquiera que sea el punto M *dentro de un triángulo* ABC *(hágase la figura) en que se corten las rectas* AH, BI, CO, *tiradas desde los vértices, sin mas condicion que pasar todas por* M, *se verificará la relacion*

$$\frac{MH}{AH}+\frac{MI}{BI}+\frac{MO}{CO}=1.$$

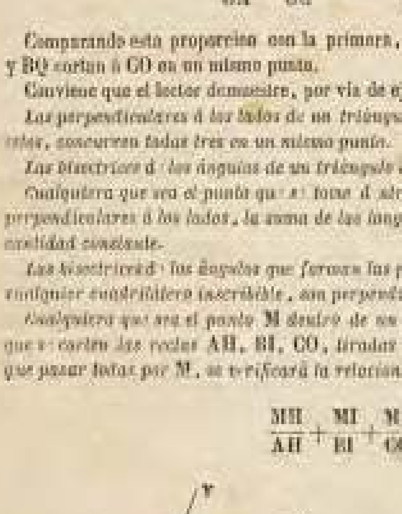


Fig. 39.

Cuando tres rectas OX, OY, OZ *(figura 39) concurren en un mismo punto* O, *y se tira otra* AB *paralela á una de ellas, se verifica que, tomando* IB = IA, *cualquiera recta* BCDM *que pase por el punto* B, *queda dividida* ARMÓNICAMENTE *en los puntos* C *y* D; *es decir, que se verifica la proporcion*

$$\frac{BC}{DC}=\frac{BM}{DM}.$$

81. Ejemplos de lugares geométricos. —1. *Hallar el lugar geométrico de todos los puntos que sean tales, que la diferencia de las distancias que haya desde cada uno de ellos á dos rectas fijas sea una cantidad constante.*

Tomarémos por ejes las dos rectas fijas, y supondrémos que forman entre sí el ángulo θ, con cuya hipótesis las distancias respectivas desde el punto (x, y) al eje de las x y al de las y, serán, en virtud del núm. **76**,

$$P=y\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \text{y} \quad P'=x\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Por lo tanto, llamando C á la cantidad constante dada, tendrémos

$$y \operatorname{sen} \theta - x \operatorname{sen} \theta = C \quad \text{ó sea} \quad y = x + \frac{C}{\operatorname{sen} \theta},$$

que es la ecuacion de una recta paralela á la bisectriz del ángulo YOX.

II. *Dándose dos rectas fijas* OX *y* OY, *y un punto* P *tambien fijo* (fig. 40), *y situado en el plano que ellas determinan, se han tirado por este punto dos secantes cualesquiera* PCA, PDB: *se han unido* A *con* D *y* C *con* B, *y se quiere hallar el lugar geométrico que puede ir ocupando el punto* I *en las diferentes posiciones que de la referida construccion resulten para las rectas* AD *y* CB.

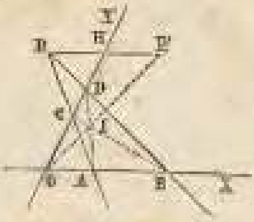


Fig. 40.

Tomarémos por ejes las dos rectas fijas OX, OY; y llamando α y β á las coordenadas del punto fijo P, tendrémos expresada la recta PCA en la ecuacion

$$y - \beta = m(x - \alpha),$$

de la que, haciendo sucesivamente $x = o$ é $y = o$, resultará

$$OC = \beta - m\alpha \quad \text{y} \quad OA = \frac{m\alpha - \beta}{m}.$$

Del mismo modo, para otra secante PDB, tendrémos

$$OD = \beta - m'\alpha \quad \text{y} \quad OB = \frac{m'\alpha - \beta}{m'}.$$

Ahora bien, la ecuacion de AD será

$$\frac{y}{OD} + \frac{x}{OA} = 1 \quad \text{ó sea} \quad \frac{y}{\beta - m'\alpha} + \frac{mx}{m\alpha - \beta} = 1,$$

y la de CB

$$\frac{y}{OC} + \frac{x}{OB} = 1, \quad \text{ó bien} \quad \frac{y}{\beta - m\alpha} + \frac{m'x}{m'\alpha - \beta} = 1.$$

Restando miembro á miembro estas ecuaciones, quitando los denominadores y reduciendo, hallarémos

$$(m - m')(\alpha y + \beta x) = o, \quad \text{de donde resulta} \quad y = -\frac{\beta}{\alpha} x,$$

ecuacion independiente de m y de m', y que, por consiguiente, representa el lugar geométrico que buscábamos, y que, segun la misma ecuacion manifiesta, es una recta que pasa por el orígen. Para construir esta, basta con tirar PP' paralela á OX, tomar P'H = PH, y unir O con P'.

El punto P se llama polo de la recta OP', y esta la polar del punto P.

III. *Suponiendo que un triángulo* OAB (fig. 41) *tenga fijo uno de sus vértices* O *y que gire alrededor de este, cambiando de magnitud, pero conservándose siempre semejante á sí mismo, y que el vértice* A *describa en este giro una recta* HL, *se quiere determinar el lugar geométrico que describirá el vértice* B.

Tomarémos el punto O por origen de las coordenadas, para eje de las x una paralela á HL, y para el de las y una perpendicular al de las x: harémos tang AOX $= a$, tang BOX $= b$, tang AOB $= m$, OH $= h$ y $\frac{OB}{OA} = \delta$, por lo que OB $= \delta$.OA, ó bien

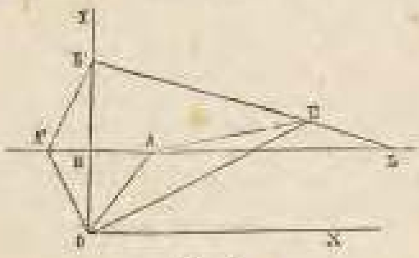


Fig. 41.

$$\sqrt{x^2+y^2} = \delta\sqrt{\overline{OH}^2+\overline{AH}^2} = \delta\sqrt{h^2+\frac{h^2}{a^2}} = \delta h\sqrt{1+\frac{1}{a^2}} \qquad (1).$$

Como el ángulo AOB es la diferencia de los AOX y BOX, tendrémos

$$m = \frac{a-b}{1+ab}, \quad \text{y de aquí} \quad a = \frac{b+m}{1-bm},$$

ó bien por ser $b = \frac{y}{x}$,

$$a = \frac{y+mx}{x-my} \quad \text{y} \quad \frac{1}{a} = \frac{x-my}{y+mx}.$$

Poniendo este valor en la ecuacion (1), resultará

$$\sqrt{x^2+y^2} = \delta h\frac{\sqrt{(y+mx)^2+(x-my)^2}}{y+mx} = \delta h\frac{\sqrt{(x^2+y^2)(1+m^2)}}{y+mx}.$$

Quitando el denominador y dividiendo ambos miembros por $\sqrt{x^2+y^2}$, que equivale á suprimir la solucion algebráica $x^2+y^2=o$, por ser estraña à la cuestion, resulta

$$y+mx = \delta h\sqrt{1+m^2} \quad \text{ó sea} \quad y = -mx+\delta h\sqrt{1+m^2}.$$

Esta ecuacion representa una recta que forma con la parte positiva del eje de las x un ángulo igual al suplemento del constante AOB. Para construir la ordenada en el origen, no hay mas que construir el ángulo HOA' igual al AOB, y tomar OB' $= \delta$.OA'.

Si el ángulo AOB fuese nulo, seria $m = o$: la ecuacion del lugar se reduciria à $y = \delta h$, y representaria una paralela á HL, como debia suponerse.

Cuando el ángulo AOB fuese recto, seria $m = \infty$; y dividiendo la ecuacion del lugar por m antes de hacer esta hipótesis, y haciendo despues de la division $m = \infty$, hallarémos

$$0=-x+5h \quad \text{ó sea} \quad x=5h,$$

que representa una perpendicular á la recta dada HI.

IV. *Inscribiendo en un cuadrilátero cualquiera* ABCD (fig. 42) *un paralelógramo* PQRS *que tenga sus lados paralelos á las diagonales* AC *y* BD *del cuadrilátero, determinar el lugar geométrico del punto* M *de intersección de las diagonales* PR *y* QS *del paralelógramo.*

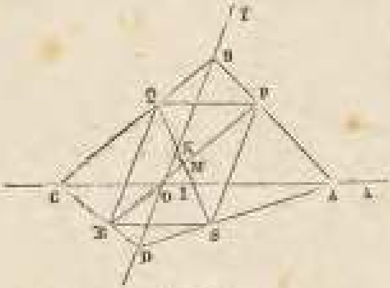


Fig. 42.

Nos servirémos de las diagonales del cuadrilátero dado para que sirvan de ejes de las coordenadas, y haciendo

$$OA=a, \quad OC=a', \quad OB=h, \quad OD=h',$$

tendrémos

$$\frac{BP}{AB}=\frac{BQ}{BC}=\frac{DR}{DC}=\frac{DS}{DA}=m,$$

$$\frac{AP}{AB}=\frac{CQ}{BC}=\frac{CR}{CD}=\frac{AS}{AD}=m',$$

y, por consiguiente, $\quad m+m'=1 \qquad [1]$

Las coordenadas de los puntos P, Q, R, S, serán respectivamente

$$\left.\begin{matrix} P \\ x=ma \\ y=m'h \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} Q \\ x=-ma' \\ y=m'h \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} R \\ x=-ma' \\ y=-m'h' \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} S \\ x=ma \\ y=-m'h' \end{matrix}\right\};$$

por consiguiente, PR tendrá por ecuacion

$$\frac{y-m'h}{m'h+m'h'}=\frac{x-ma}{ma+ma'} \quad \text{ó bien} \quad \frac{y-m'h}{m'(h+h')}=\frac{x-ma}{m(a+a')}. \qquad [2]$$

Del mismo modo, la ecuacion de QS será

$$\frac{y-m'h}{m'h+m'h'}=\frac{x+ma'}{-ma'-ma},$$

ó, lo que es lo mismo,

$$\frac{y-m'h}{m'(h+h')}=-\frac{x+ma'}{m(a+a')} \qquad [3]$$

Solo falta, para tener la ecuacion del lugar que eliminemos m y m' entre las ecuaciones [1], [2] y [3], y lo conseguirémos restando primeramente cada miembro de la ecuacion [3] de su correspondiente en la [2], suprimiendo el denominador comun, lo que dará

$$2x-ma+ma'=0, \quad \text{de la cual se deduce} \quad m=\frac{x}{\frac{1}{2}(a-a')};$$

y despues, sumando ordenadamente las mismas ecuaciones, tendrémos

$$\frac{2y-2m'h}{m'(h+h')}=-1, \quad \text{que da} \quad m'=\frac{y}{\frac{1}{2}(h-h')};$$

finalmente, sustituyendo estos valores de m y m' en la (1), tendrémos

$$\frac{y}{\frac{1}{2}(h-h')}+\frac{x}{\frac{1}{2}(a-a')}=1 \qquad (5).$$

Esta ecuacion representa una recta que tiene por coordenadas en el orígen $\frac{1}{2}(a-a')$ y $\frac{1}{2}(h-h')$, lo que indica que pasa por los puntos medios I y K de las diagonales AC y BD del cuadrilátero propuesto.

V. He aquí algunas cuestiones que pueden servir de ejercicios al lector, á cuyo cuidado dejamos hacer las figuras:

Hallar el lugar geométrico de todos los puntos que gozan de la propiedad de que las distancias desde cada uno de ellos á dos rectas fijas estén en una razon constante.

Hallar el lugar que irá recorriendo el vértice del ángulo recto de una escuadra cuando ésta se mueva en su mismo plano, resbalando los extremos de su hipotenusa sobre dos rectas perpendiculares entre sí.

Hay dos rectas OA *y* OB *y un punto* P; *por este se tira una secante, la* PIC *por ejemplo; se forma un ángulo* BIM = OIP, *y se toma la distancia* IM = IC: *se quiere determinar el lugar geométrico del punto* M.

Teniendo un cuadrilátero cualquiera ABCD, *é inscribiendo en él un trapecio* PQRS, *cuyas bases paralelas* PS *y* QR *lo sean tambien á una de las diagonales* BD *del cuadrilátero; se quiere determinar el lugar del punto de interseccion* M *de los lados no paralelos del trapecio.*

82. Aplicaciones al estudio de varios fenómenos físicos.—Hemos visto en los números **19** y **23** el modo de representar, por medio de una curva, la ley matemática ó empírica que liga entre sí á dos variables; pero hay casos en que resulta una línea recta en vez de una curva.

Esto sucede (fig. 8, lámina) en la representacion de la ley del calórico latente del vapor de agua en funcion de su temperatura; pues resulta una línea recta. Es muy fácil obtener la ley matemática que liga entre sí á estas dos variables; porque llamando y al calórico latente y x á la temperatura, se halla que, haciendo $x=0$, el valor de y es 607,8, y que á $x=230°$ corresponde $y=442,9$; por lo tanto, solo falta que hallemos la ecuacion de la recta que pasa por los dos puntos cuyas coordenadas acabamos de dar. Haciendo aplicacion de la fórmula del núm. **70**, hallarémos

$$\frac{y-607,8}{607,8-442,9}=\frac{x-0}{0-230°}, \quad \text{ó bien} \quad y=-0,717x+607,8,$$

cuya fórmula representa con una aproximacion mas que suficiente todos los resultados de los esperimentos.

Sucede una cosa análoga en la solubilidad del cloruro de sodio y del cloruro de potasio en funcion de su temperatura. Llamando, como antes, x á la temperatura é y á la solubilidad de la primera de dichas sales, ó sea á la cantidad de esta, que puede disolverse en 100 unidades de peso, verémos que para $x=0$ corresponde $y=29$, y que á $x=120°$ corresponde $y=62,2$; por consiguiente, la ley de la solubilidad de esta sal quedará espresada en la fórmula

$$\frac{y-29}{29-62,2}=\frac{x-0}{0-120}, \quad \text{ó, lo que es lo mismo,} \quad y=0,2766.x+29.$$

Del mismo modo hallarémos, para la segunda sal,

$$y=0,04167x+35,5.$$

Observacion. En estos ejemplos, y en todos los que sean análogos, el coeficiente angular de la recta indica de qué manera la funcion y crece ó decrece cuando aumenta la variable x. Por ejemplo, tratando de la solubilidad del cloruro de sodio, como el coeficiente angular 0,04167 de la recta que la representa es positivo y muy pequeño, debemos deducir que la solubilidad aumenta muy lentamente cuando crece la temperatura. En cuanto al cloruro de potasio, como el coeficiente angular es 0,2766, crece mas rápidamente su solubilidad. En el calórico latente, el coeficiente angular es negativo, $-0,717$, y, por consiguiente, el calórico disminuye cuando aumenta la temperatura.

83. Como la ordenada de una recta oblicua al eje de las x puede pasar por todos los estados de magnitud, desde el infinito negativo hasta el infinito positivo, resulta que no es posible representar por medio de una recta la ley que sigue un fenómeno, á no ser que las magnitudes que se representan por x y por y puedan admitir todos los valores, desde $-\infty$ hasta $+\infty$; esto sucede pocas veces, y lo mas general es que, solamente entre límites muy estrechos, pueda representar una recta la ley de un fenómeno. Sirve de ejemplo la fórmula

$$V=V_0(1+at),$$

que, segun Gay-Lussac, espresa, en funcion de la temperatura, la ley en que varía el volúmen de un gas (conservándose constante la presion). Represéntan en ella: V_0 el volúmen á la temperatura 0, V el que corresponde á la temperatura t, y a el coeficiente de dilatacion, que, en caso de tratarse del aire, será 0,00367.

Como esta ecuacion es de primer grado, tanto respecto á V como á t, puede sustituirse por una recta, tomando por abscisa t y por ordenada V, y veríamos muy fácilmente que esta recta estaría inclinada respecto al eje de las x. Cortaria á este eje cuando $t=-\dfrac{1}{a}$, y pasaria por debajo de este cuando á t se diesen valores algebráicamente menores; es decir, que el volúmen V de un gas podria reducirse á cero, y aun hacerse negativo, lo cual es evidentemente absurdo. Basta con esta observacion para convencernos de que la ley de la dilatacion de un gas, espresada por medio de la ecuacion anterior, no es exacta mas que para ciertas temperaturas, y, por lo tanto, no es mas que una ley de aproximacion.

No sucede lo mismo con la ley del movimiento uniforme de un punto sobre una recta,

$$e=e_0+vt,$$

en cuya ecuacion, e_0 representa la distancia desde el orígen hasta el punto en que se encuentra el móvil cuando $t=0$; e, á la que se halla cuando ha pasado el tiempo t, y v la velocidad del móvil, ó sea el espacio que recorre en la unidad de tiempo. Como aquí nos ocupamos solamente de una idea, y nada impide que imaginemos prolongado indefinidamente el movimiento, tanto antes de hacer $t=0$ como despues de hecha esta hipótesis, y el móvil puede ocupar cualquiera posicion á derecha ó izquierda del orígen, se deduce que la ecuacion anterior espresa de un modo completo la ley del movimiento que se considera.

Como esta ecuacion es de primer grado, tanto con relacion á e como á t, se la puede reemplazar por una recta, tomando t por abscisa y e por ordenada. Esta recta, que tomará diversas posiciones, segun la magnitud y el signo que se atribuyan á las cantidades e_0 y v, representará con toda generalidad la ley del movimiento uniforme.

84. Por medio de la Geometría pueden hallarse las soluciones que sean comunes á dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Con efecto, considerando que en cada una de las ecuaciones las incógnitas hagan de variables, cada ecuacion representará una recta, y las soluciones comunes á las dos ecuaciones serán las coordenadas del punto comun á las dos rectas. Discutiendo bajo este punto de vista el sistema de las dos ecuaciones

$$ax+by=c \quad \text{y} \quad a'x+b'y=c',$$

deducirémos las mismas consecuencias que nos dió la discusion que hicimos en el *Algebra elemental* (*). Aconsejamos á los lectores que se ocupen de este ejercicio, del que no nos ocuparémos aquí.

Mas supongamos que dos puntos materiales se mueven sobre una misma recta, y que el movimiento de cada uno de ellos esté espresado respectivamente por las ecuaciones

$$e=e_0+vt \quad \text{y} \quad e=e_0'+v't,$$

y que se pida la determinacion del lugar geométrico y del instante en que los dos móviles se encuentren. Quedará resuelto el problema buscando el punto de interseccion de las dos rectas espresadas por estas dos ecuaciones; y si le discutimos geométricamente, volverémos á la misma discusion y á idénticas consecuencias que las que tuvimos en el problema de los correos (**).

Si en vez de dos móviles tuviésemos tres sobre una misma recta, y nos propusiésemos hallar la condicion necesaria para que se pudiesen encontrar los tres en un mismo punto y en un mismo instante, no habria mas que buscar la condicion que fuese necesaria para que las rectas espresadas por las ecuaciones

$$e=e_0+vt, \quad e=e_0'+v't, \quad e=e_0''+v''t,$$

tuviesen un punto comun. Aplicando la regla del núm. **72**, hallaríamos

$$\frac{v-v''}{v'-v''}=\frac{e_0-e_0''}{e_0'-e_0''},$$

que se puede espresar diciendo que *las velocidades de los móviles deben ser relativamente proporcionales á sus distancias iniciales.*

(*) Véase la segunda edicion de nuestra *Algebra elemental*, páginas 100 y siguientes.

(**) Véase la página 103 y siguientes de nuestra *Algebra elemental*.

Esta condicion quedará satisfecha por tres móviles dotados de movimiento uniforme, representado para cada uno respectivamente por

$$e=-20^m+10^m t,\quad e=20^m+6^m t,\quad e=120^m-4^m t;$$

pues al cabo de 10 segundos se encontrarian á 80 metros del origen, en la parte positiva.

85. Aun tiene otras aplicaciones la ecuacion de la linea recta.

Supongamos que en algun fenómeno físico estén las variables x é y ligadas por una ecuacion de la forma

$$y=ax^n+bx^{n-p} \qquad [1],$$

y que tratemos de determinar los coeficientes a y b por cierto número n de experimentos que hayan dado uno igual de valores de x correspondientes á otros tantos de y. Si pudiésemos considerar que los resultados de los experimentos fuesen completamente exactos, no habria más que sustituir en la ecuacion [1], en vez de x é y, dos sistemas de aquellos valores correspondientes entre sí, y tendríamos dos ecuaciones sin mas incógnitas que a y b para determinar estos coeficientes. Mas como los resultados de los experimentos deben considerarse nada mas que aproximados, podria suceder que los valores de a y b, calculados de este modo, no conviniesen á otros sistemas de x y de y que los que hubiesen servido para determinarlos. Por consiguiente, es preciso que, á la determinacion de a y b concurran todos los sistemas de valores de x y de y obtenidos en los experimentos. Hé aquí de qué manera se procede:

Dividiendo la ecuacion [1] por x^{n-p}, resultará

$$\frac{y}{x^{n-p}}=ax^p+b,$$

y suponiendo

$$x^p=X \quad \text{é} \quad \frac{y}{x^{n-p}}=Y,$$

se convertirá esta espresion en

$$Y=aX+b \qquad [2].$$

Como hay n sistemas de valores correspondientes de x y de y se pueden deducir de ellos n sistemas de valores para X é Y.

En este supuesto, trácense en un plano dos ejes rectangulares, y constrúyanse los n puntos que, referidos á estos ejes, tengan por coordenadas los valores de X é Y. Por ser la ecuacion [2] de primer grado respecto á X é Y, los puntos obtenidos de este modo estarán en linea recta, si han sido exactos los resultados de la experimentacion. Por lo general no sucederá esto; pero los n puntos no se apartarán mucho de una recta (pues, de lo contrario, la ecuacion [1] no representaria con bastante exactitud aquellos resultados); pero tomando un hilo muy delgado, cogiéndolo por sus estremos y teniéndole tirante, le aplicarémos sobre la figura, haciendo variar su direccion hasta que los n puntos se aparten lo menos posible de la recta marcada por el hilo, quedando los que no coincidan con ella unos encima y otros debajo de la misma: marcarémos en la figura las posiciones de los dos estremos del hilo colocado en esta direccion: medirémos las coordenadas de estos estremos, y buscarémos la ecuacion de la recta que pase por estos puntos; finalmente, poniendo esta ecuacion bajo la forma (2), podrémos ya encontrar los valores de los coeficientes a y b.

Este es el método que empleó Mr. Prony en sus investigaciones sobre el movimiento de las aguas, y el mismo nos ha servido para hallar la recta (fig. 8, láminas) que representa los esperimentos hechos por Mr. Regnault para hallar el calórico latente en el vapor de agua en funcion de la temperatura.

Tambien debe emplearse, aunque la ley del fenómeno que se estudia no esté espresada por la ecuacion (1), sino por una de la forma

$$y = a\varphi(x) + b\psi(x),$$

en que φ y ψ representen funciones cualesquiera cuyos coeficientes sean conocidos; pues dividiendo por $\psi(x)$, y suponiendo que

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \mathrm{X} \quad \text{ó} \quad \frac{y}{\psi(x)} = \mathrm{Y},$$

podria ponerse la ecuacion bajo la forma

$$\mathrm{Y} = a\mathrm{X} + b,$$

con la que se operaria del modo que se dijo antes para determinar los coeficientes a y b desconocidos.

CAPÍTULO IV.

CIRCUNFERENCIA DE CÍRCULO.

86. Condiciones necesarias y suficientes para que una ecuacion de segundo grado represente una circunferencia de círculo. —En el núm. 10 dijimos que una circunferencia de círculo referida á ejes oblícuos tiene por ecuacion general

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(y-\beta)(x-\alpha)\cos\theta=r^2 \qquad [1],$$

representando por θ el ángulo que forman entre sí los ejes, por α y β las coordenadas del centro, y por r el radio. Como no toda ecuacion de segundo grado representa una circunferencia de círculo, vamos á buscar qué condiciones debe llenar una de este grado para que represente aquella curva.

Consideremos para esto la ecuacion general de segundo grado con dos variables, que se puede siempre reducir á la forma

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0 \qquad [2].$$

Para que esta ecuacion represente una circunferencia de círculo referida á ejes que formen entre sí el ángulo θ, es necesario y suficiente que las ecuaciones [1] y [2] puedan verificarse simultáneamente por unos mismos valores finitos y determinados de α, β y r; y como en Algebra se demuestra que es preciso y suficiente, para que dos ecuaciones con dos variables queden satisfechas por unos mismos valores de estas, que los coeficientes sean proporcionales, tendrán que ser

$$\frac{A}{1}=\frac{B}{2\cos\theta}=\frac{C}{1}=-\frac{D}{2(\beta+\alpha\cos\theta)}=-\frac{E}{2(\alpha+\beta\cos\theta)}=$$
$$\frac{F}{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta-r^2};$$

de donde resulta que

$$A=C, \quad B=2A\cos\theta,$$

$$\beta+\alpha\cos\theta=-\frac{D}{2A} \quad [3], \qquad \alpha+\beta\cos\theta=-\frac{E}{2A} \quad [4],$$

$$\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta-r^2=\frac{F}{A} \qquad [5].$$

Como las dos primeras ecuaciones son independientes de α, β y r, es preciso que se verifiquen por sí mismas; por consiguiente, para que una ecuacion de segundo grado con dos variables pueda representar una circunferencia de círculo referida á unos ejes oblicuos dados, es necesario: 1.° *que los coeficientes de los cuadrados de las variables sean iguales y tengan el mismo signo;* 2.° *que el coeficiente de xy sea igual al duplo del producto que resulte de multiplicar el coeficiente del cuadrado de cualquiera de las variables por el coseno del ángulo que forman los ejes.*

Aunque estas condiciones son necesarias, no son suficientes, porque es preciso ademas que haya valores finitos y determinados de α, β y r que verifiquen las ecuaciones [3], [4] y [5]. Las [3] y [4] son de primer grado, y es fácil convencerse de que dan siempre valores finitos y determinados para α y β; y poniendo estos valores en la ecuacion [5], se hallará el de r. Ahora bien; como la [5] es de segundo grado, los valores de r podrán ser reales, cero ó imaginarios; y en cada uno de estos tres casos representará la ecuacion [2] una circunferencia real, un punto ó una circunferencia imaginaria. Cuando represente un círculo, las coordenadas del centro serán los valores hallados para α y β en las ecuaciones [3] y [4], y el radio tendrá por valor el que resulte de la [5].

Tambien se puede construir gráficamente el centro en vez de determinarle por sus coordenadas, como dejamos indicado; porque tomando α y β por coordenadas generales, las ecuaciones [3] y [4] representan dos rectas que pasan por dicho centro; de modo que, construyendo estas rectas, darán el centro en su punto de interseccion. La construccion de estas rectas es muy fácil, porque escribiendo las ecuaciones [3] y [4] bajo la forma

$$\beta=-\alpha\,.\cos\theta-\frac{D}{2A},\quad \beta=-\frac{\alpha}{\cos\theta}-\frac{E}{2A\cos\theta},$$

se echa de ver que la primera representa una perpendicular al eje de las y (76), y la segunda otra al de las x. Tambien puede construirse facilmente el radio r.

87. Cuando son rectangulares los ejes, la ecuacion general de la circunferencia de círculo es

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2;$$

de modo que, identificándola con la [2], hallarémos, para que una ecuacion de segundo grado con dos variables pueda representar una circunferencia de círculo referida á ejes rectangulares, que tambien es necesario *que sean iguales y tengan un mismo signo los coeficientes de los cuadrados de las variables*, y que además es preciso *que falte el término en* xy.

Para hallar las coordenadas del centro y el radio, es suficiente completar en la ecuacion propuesta el cuadrado de los dos términos en x y el de los dos en y. Con efecto, toda ecuacion que satisface á las dos condiciones anteriores, puede ponerse, despues de dividir sus dos miembros por el coeficiente del cuadrado de una de las variables, bajo la forma siguiente

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,$$

que tambien se puede escribir

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}-c \qquad [6];$$

y bajo esta forma representa su primer miembro el cuadrado de la distancia entre un punto cualquiera (x, y) y el que tenga por coordenadas $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$. Como esta distancia es constante, la ecuacion [6] representará una circunferencia real, un punto ó una circunferencia imaginaria, segun que sea positiva, cero ó negativa la cantidad $\frac{a^2+b^2}{4}-c$, que representa el cuadrado del radio.

Aconsejamos á los lectores que se familiaricen con las diferentes formas que puede tomar la ecuacion de una circunferencia de círculo, segun las posiciones de esta curva con relacion á los ejes

88. Teoremas relativos á la circunferencia de círculo. — Para que el lector vaya adquiriendo el hábito de los procedimientos propios de la Geometría analítica, vamos á demostrar, por medio de la ecuacion de la circunferencia, algunos teoremas muy conocidos.

I. La circunferencia O (fig. 43) referida á ejes rectangulares que pasen por su centro tiene por ecuacion

$$x^2+y^2=r^2 \qquad [7].$$

Como esta ecuacion es simétrica, tanto respecto á x cuanto á y, resulta: 1.° *que el diámetro AA′ divide al círculo y á la circunferencia en dos partes iguales*; 2.° *que todo radio OA′ perpendicular á la cuerda MM′ divide á esta cuerda y al arco que subtiende en dos partes iguales.*

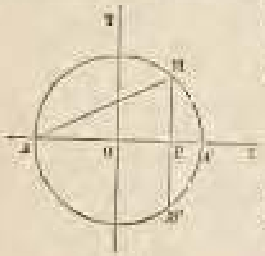


Fig. 43.

II. Se saca de la ecuacion [7]

$$y^2 = r^2 - x^2 = (r+x)(r-x),$$

y suponiendo $x = \mathrm{OP}$, lo que dará $y = \mathrm{MP}$, resultará

$$\overline{\mathrm{MP}}^2 = \mathrm{A'P}\,.\,\mathrm{PA}:$$

luego *la perpendicular bajada al diámetro desde un punto de la circunferencia es media proporcional entre los dos segmentos del diámetro.*

III. Resulta del triángulo rectángulo MAP (fig. 43) que

$$\overline{\mathrm{AM}}^2 = \overline{\mathrm{MP}}^2 + \overline{\mathrm{AP}}^2;$$

y como el punto M está en la circunferencia [7], será

$$\overline{\mathrm{MP}}^2 = r^2 - x^2, \quad \text{y como además} \quad \mathrm{AP} = r + x,$$

se tendrá $\overline{\mathrm{AM}}^2 = 2r(r+x) = \mathrm{AA'}\,.\,\mathrm{AP}.$

Esto manifiesta *que en una circunferencia de círculo, cualquiera cuerda es media proporcional entre el diámetro que pasa por uno de sus estremos y su proyeccion sobre este diámetro.*

IV. *Todos los ángulos inscriptos en un mismo segmento de círculo son iguales á la mitad del ángulo en el centro correspondiente al mismo segmento.*

Fig 44.

Tomando por eje de las x la cuerda AB (figura 44), y para el de las y el diámetro perpendicular á esta cuerda, y suponiendo $\mathrm{AB} = 2c$, $\mathrm{OC} = \beta$, resultara para ecuacion de la circunferencia $x^2 + (y-\beta)^2 = r^2$. Ahora bien; llamando x' é y' á las coordenadas de un punto M de esta curva, los coeficientes angulares de AM y de BM valdrán respectivamente

$$\frac{y'}{c+x'} \text{ ó } \frac{y'}{c-x'},$$

por lo que (74) tendrémos

$$\text{tang AMB} = \frac{2cy'}{x'^2+y'^2-c^2};$$

pero espresando que el punto (x', y') pertenece á la circunferencia, y teniendo presente que $c^2 = r^2 - \beta^2$, se llegará á la ecuacion

$$\text{tang AMB} = \frac{2cy'}{2\beta y'} = \frac{c}{\beta} = \text{tang OCB},$$

que demuestra el teorema.

89. **Posiciones relativas de dos circunferencias de circulo.**— Tomando por eje de las x la recta que determinan los centros de las dos circunferencias, y por eje de las y la perpendicular á esta tirada por el centro de la mayor, y llamando R y r á los radios, y D á la distancia que separe los dos centros, las ecuaciones de cada una de estas circunferencias serán

$$x^2+y^2=R^2 \quad \text{y} \quad (x-D)^2+y^2=r^2.$$

Para hallar las coordenadas de los puntos de su interseccion, es preciso resolver estas ecuaciones tomando á x é y por incógnitas. Restando ordenadamente una de otra, queda eliminada la y, y resulta

$$x = \frac{R^2+r^2-D^2}{2D},$$

lo que manifiesta que los dos puntos de interseccion están en una misma recta perpendicular á la que une los centros. Sustituyendo este valor de x, que siempre es real, en cualquiera de las dos ecuaciones propuestas, y haciendo todas las reducciones, hallarémos

$$y = \pm\sqrt{(D+R+r)(D+R-r)(D+r-R)(R+r-D)}.$$

En virtud de esta ecuacion, cuando los valores de y sean reales, como los dos son iguales y de signo contrario, ambos puntos de interseccion de las circunferencias estarán *simétricamente colocados respecto á la recta que une los centros.* Para que y sea real, como son positivos los dos primeros factores, es preciso que los otros dos tengan signos iguales; por consiguiente, es preciso que á un mismo tiempo se tenga

$$D+r-R>0 \quad y \quad R+r-D>0,$$

ó bien que $\quad D+r-R<0 \quad y \quad R+r-D<0.$

Estas dos últimas condiciones son incompatibles; pues de verificarse simultáneamente habria que admitir que $2r<0$. Por consiguiente, las condiciones necesarias y suficientes para que se corten las dos circunferencias son

$$D<R+r \quad y \quad D>R-r;$$

es decir, que *la distancia de los dos centros sea menor que la suma y mayor que la diferencia de los dos radios.*

Del mismo modo hallariamos las condiciones necesarias y suficientes para que las dos circunferencias fueran tangentes esteriormente, tangentes interiormente, secantes ó para que la una quedase dentro de la otra.

90. Ejes radicales. — La recta que representa la ecuacion

$$x=\frac{R^2+r^2-D^2}{2D} \qquad [8]$$

hallada en el número anterior, y que une los puntos de interseccion de dos circunferencias secantes, es *el lugar geométrico de todos los puntos que tienen la notable propiedad de que las tangentes tiradas desde cada uno de ellos á las dos circunferencias son iguales.* Con efecto, poniendo las ecuaciones de las dos circunferencias bajo la forma

$$x^2+y^2-R^2=0, \quad (x-D)^2+y^2-r^2=0,$$

sus primeros miembros espresan el valor de los cuadrados de las tangentes tiradas á las dos circunferencias desde el punto (x, y); y como igualando estos cuadrados resulta la ecuacion [8], debemos decir que la recta representada por esta ecuacion es el lugar geométrico de que se trata. Está recta se llama el *eje radical* de las dos circunferencias.

Se llama en general *eje radical* de dos circunferencias, ya se corten estas ó no, al lugar geométrico de todos los puntos desde los que se pueden tirar á las circunferencias tangentes iguales.

Es muy fácil demostrar que el eje radical de dos circunferencias es siempre perpendicular á la recta que une los centros, cualesquiera que sean los ejes á que esten referidas estas circunferencias y la posicion relativa de estas con respecto á aquellos, y que siempre se obtiene su ecuacion restando ordenadamente las de ambas circunferencias despues de haber pasado á los primeros miembros todos los términos.

OBSERVACIÓN. Cuando dos circunferencias se cortan, los puntos del eje radical interiores á ellas gozan de una propiedad muy notable, y es que son los medios de las cuerdas iguales de longitud *mínima*.

91. *Los ejes radicales de tres circunferencias de círculo se cortan en un mismo punto.*

Llamemos, para abreviar, $R=0$, $R'=0$, $R''=0$ á las ecuaciones de las tres circunferencias, y, segun lo que dejamos dicho, las de los ejes radicales serán

$$R-R'=0;\quad R-R''=0 \quad y \quad R'-R''=0;$$

y como cada una de estas ecuaciones se deduce necesariamente de las otras dos, el eje radical que ella represente no puede menos de pasar por el punto de interseccion de los representados por las otras dos; con lo que el teorema queda demostrado.

De aqui se deduce un método muy sencillo para construir el eje radical de dos circunferencias que no se corten.

92. Ecuacion de la tangente á una circunferencia de círculo. —Vamos á deducir de la ecuacion de una circunferencia de círculo la de la tangente en uno cualquiera de sus puntos.

Para hallar la ecuacion de la tangente MT (fig. 45) á la circunferencia C, se considera que esta tangente es el límite de las posiciones que va tomando una secante MN, que gira alrededor del punto M, aproximándose á este continuamente el otro punto de interseccion N hasta confundirse con el primero.

Segun esto, representando por x', y' las coordenadas del punto M, y por $x'+h$, $y'+k$ las del N, como la secante MN tendrá [70] por ecuacion

$$y-y'=\frac{k}{h}(x-x').$$

la de la tangente MT será

$$y-y'=\lim\frac{k}{h}.(x-x').$$

Ahora bien; el límite de $\frac{k}{h}$ cuando h tiende hácia cero, es la derivada de la ordenada y de la circunferencia, considerándola como funcion de la abscisa x, y poniendo en esta derivada, en vez de x é y, las coordenadas x' é y' del punto M; luego el *coeficiente angular de la tangente en un punto de una circunferencia es igual á la derivada de la ordenada de la curva tomada con relacion á la abscisa, poniendo en esta derivada, en vez de las coordenadas generales, las particulares del punto de contacto.*

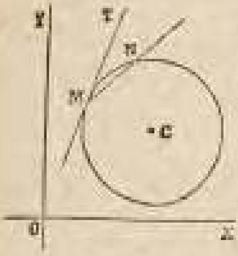


Fig. 48.

Por ejemplo, si la ecuacion de la circunferencia C fuese

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta=r^2 \qquad [5],$$

como la derivada del valor de y, sacado de esta ecuacion es

$$-\frac{x-\alpha+(y-\beta)\cos\theta}{y-\beta+(x-\alpha)\cos\theta},$$

la ecuacion de la tangente MT sería

$$y-y'=-\frac{x'-\alpha+(y'-\beta)\cos\theta}{y'-\beta+(x'-\alpha)\cos\theta}(x-x').$$

Al mismo tiempo tendríamos la relacion

$$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+2(x'-\alpha)(y'-\beta)\cos\theta=r^2,$$

para espresar que el punto de contacto M (x', y') está sobre la circunferencia.

93. Cuando los ejes son rectangulares y pasan por el centro, la circunferencia tiene por ecuacion $x^2+y^2=r^2$; y como de esta resulta $-\frac{x}{y}$ para la derivada de y con relacion á x, la ecuacion de la tangente en el punto (x', y') se reduce á

$$y-y'=-\frac{x'}{y'}(x-x'),$$

que despues de hechas las reducciones se convierte en

$$yy'+xx'=r^2 \qquad [6].$$

Esta ecuacion manifiesta que la recta que representa es, con efecto, tangente á la circunferencia en el punto yy', como perpendicular al radio que pasa por el mismo y que tiene por ecuacion $y=\frac{y'}{x'}x$.

94. Ecuacion de una tangente paralela á una direccion dada. —Sea $y=mx$ la ecuacion de la recta á que ha de quedar paralela la tangente, y

$$x^2+y^2=r^2 \qquad [7]$$

la de la circunferencia. La tangente tendrá por ecuacion una de la forma

$$y=mx+n \qquad [8].$$

Para determinar n, se puede identificar esta ecuacion [8] con la [6] de una tangente, ó espresar que la recta [8] dista del centro una longitud igual á r, ó bien fundándose en que no tiene mas que un punto comun con la circunferencia [7]: este último método es el que vamos á seguir. Eliminando y entre las ecuaciones [7] y [8], hallarémos la siguiente:

$$(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0,$$

cuyas raices, en el caso de ser reales, son las abscisas de los puntos en que la recta corta á la circunferencia; y espresando que estas raices son iguales, tendrémos

$$n=\pm r\sqrt{1+m^2}.$$

Resultan dos valores para n, porque cualquiera que sea la recta dada, siempre habrá dos tangentes paralelas á ella; por lo tanto, las ecuaciones de estas dos tangentes son las comprendidas en

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}.$$

Como m queda aun indeterminado, haciendo variar su valor, cualquiera de las dos ecuaciones comprendidas en la anterior representará todas cuantas tangentes se puede tirar á la circunferencia.

95. PROBLEMA. *Tirar una tangente á una circunferencia de círculo por un punto esterior á esta.*

Sean

$$x^2+y^2=r^2$$

la ecuacion de la circunferencia, y (α, β) el punto esterior desde el cual se quiere tirar la tangente. Claro es que el problema quedará resuelto en cuanto se conozcan las coordenadas (x', y') del punto de contacto; pero hallándose este punto sobre la circunferencia, tiene que verificarse que

$$x'^2+y'^2=r^2 \qquad [9];$$

además, la tangente que buscamos tiene por ecuacion $xx'+yy'=r^2$, y como esta ecuacion ha de quedar satisfecha por las coordenadas α y β del punto dado, lo que da la relacion

$$x'\alpha+y'\beta=r^2 \qquad [10],$$

tendrémos dos ecuaciones [9] y [10], por cuyo medio podemos hallar las coordenadas x', y' del punto de contacto. Ni el cálculo ni la discusion de este problema ofrecen dificultad alguna.

96. **Cuerda de los contactos.** — Tomando las x', y' de los puntos de contacto por coordenadas generales, la ecuacion [9] representará la circunferencia dada, y la [10] una recta que pasa por los puntos de contacto; por consiguiente, se puede hallar estos construyendo esta recta y determinando los puntos de su interseccion con la circunferencia. Por este motivo, á la ecuacion [10] se llama ecuacion de la cuerda de los contactos relativa al punto (α, β). Importa mucho observar que, para hallar la ecuacion de la cuerda de los contactos relativa á un punto dado, no hay mas que poner en la de la tangente las coordenadas de aquel punto en vez de las generales.

97. **Polos y polares.** — Para construir la cuerda de los contactos que tiene por ecuacion

$$x'\alpha+y'\beta=r^2,$$

buscarémos sus coordenadas en el origen. Haciendo primeramente $y'=0$, resulta $x'=\frac{r^2}{\alpha}$; y como esta abscisa no depende de β, es la misma para todas las cuerdas de los contactos de las tangentes tiradas á la circunferencia por los puntos de la recta $x'=\alpha$, paralela al eje de las y; por consiguiente, todas estas cuerdas se cortan en un mismo punto del eje de las x. Este punto fijo se llama el *polo* de la paralela $x'=\alpha$, asi como se dice que esta recta es la *polar* de aquel punto. Es muy fácil demostrar que toda recta situada en el plano de un círculo tiene por polo un punto de la perpendicular bajada desde el centro sobre aquella recta; y recíprocamente, que todo punto tomado en el plano de un círculo es polo de una recta perpendicular á la que une este punto con el centro.

98. Ejercicios. I. *Hallar el lugar geométrico que va describiendo el vértice de un ángulo, cuya amplitud es constante cuando se mueve en un plano apoyando constantemente sus lados en dos puntos fijos.*

Sean A y B los dos puntos fijos (rogamos al lector que haga por sí mismo las figuras que faltan), y m la tangente del ángulo dado; tómese por eje de las x la recta AB y por el de las y la perpendicular levantada en el punto medio de ésta, y supóngase que M (x, y) sea un punto del lugar que se busca; y de este modo, haciendo $AB=2c$, el coeficiente angular de AM será (**70**, cas. I) $\frac{y}{x+c}$, y el de BM $\frac{y}{x-c}$, por lo que tendrémos (**74**)

$$\frac{\frac{y}{x-c}-\frac{y}{x+c}}{1+\frac{y^2}{x^2-c^2}}=m,\quad \text{de donde resulta}\quad x^2+y^2-\frac{2cy}{m}-c^2=0,$$

que es la ecuacion del lugar. Este lugar geométrico es una circunferencia de círculo que tiene su centro en el eje de las y; y en caso de que el ángulo sea recto, será $m=\infty$, y reduciéndose la ecuacion á $x^2+y^2=c^2$, nos hace ver que este lugar geométrico es la circunferencia descrita sobre AB como diámetro.

II. *Hallar el lugar que describe el vértice de un ángulo de amplitud constante, que se mueve en un plano, conservando siempre sus lados tangentes á una circunferencia dada.*

Tómense por ejes unos rectangulares que pasen por el centro de la circunferencia, y suponiendo que

$$y=mx+r\sqrt{1+m^2}\quad é\quad y=m'x+r\sqrt{1+m'^2}\qquad (1)$$

sean las ecuaciones de los lados que forman el ángulo, y espresando que la tangente de este ángulo es igual á una cantidad constante K (**74**), se hallará la ecuacion

$$Kmm'+(m-m')+K=0\qquad (2);$$

y eliminando m y m' entre esta ecuacion y las (1), llegarémos á la del lugar pedido.

Para conseguir esta eliminacion hay que hacer antes que desaparezcan los radicales de las ecuaciones (1); pero quitando el radical de la primera, resulta

$$(r^2-x^2)m^2+2xym+r^2-y^2=0 \qquad (3);$$

y como haciendo desaparecer el radical de la segunda se llega á una ecuacion que solamente se diferencia de la anterior en que entra m' en lugar de m, debemos deducir que los valores de m y m' son las raíces de la ecuacion (3). En virtud de esto, tendrémos

$$mm'=\frac{r^2-y^2}{r^2-x^2} \quad \text{y} \quad m-m'=\frac{2r\sqrt{x^2+y^2-r^2}}{r^2-x^2};$$

sustituyendo en la ecuacion (2), y haciendo las reducciones, llegarémos á

$$K^2(x^2+y^2)^2-4r^2(1+K^2)(x^2+y^2)-4r^4(1+K^2)=0;$$

ecuacion que se descompone en las dos

$$x^2+y^2=\frac{2r^2(1+K^2)\pm 2r^2\sqrt{1+K^2}}{K^2}.$$

Estas ecuaciones representan dos circunferencias de círculo concéntricas con la propuesta: una es el lugar geométrico buscado, y la otra el descrito por el vértice de un ángulo suplementario del propuesto que se mueve del mismo modo que este, conservando sus lados tangentes á la circunferencia.

III. *Suponiendo que haya dos circunferencias concéntricas, que á la interior se tiren tangentes, y que en los puntos en que cada una de estas corta á la circunferencia esterior se tiran tangentes á la última; ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos de interseccion de cada par de tangentes tiradas á la circunferencia esterior?*

Tomando por ejes cualesquiera de los rectangulares que pasen por el centro; llamando r al radio de la circunferencia interior, R al de la esterior, representando por (x, y) un punto cualquiera del lugar, y suponiendo que

$$Xx+Yy=R^2$$

sea la ecuacion de la cuerda de los contactos correspondiente á este punto, ecuacion en que X é Y representan las coordenadas generales, como esta cuerda ha de quedar tangente á la circunferencia interior, distará del orígen una longitud igual á r. Esta distancia es igual (76) á $\frac{R^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, por lo cual se tendrá

$$\frac{R^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=r^2, \quad \text{ó bien} \quad x^2+y^2=\frac{R^4}{r^2};$$

por consiguiente, el lugar geométrico que vamos buscando es una circunferencia de círculo concéntrica con las propuestas, y que tiene por radio $\frac{R^2}{r}$.

CUESTIONES QUE EL LECTOR DEBE RESOLVER Y DEMOSTRAR. I. *Describir una circunferencia que corte á otras tres dadas en puntos diametralmente opuestos*

II. *Tirando á un círculo secantes desde un punto de su plano, el producto de las distancias que haya desde este punto á los de interseccion de cada secante con la circunferencia es una cantidad constante.*

III. *Si desde un punto tomado en el plano de una circunferencia se tiran á esta dos secantes perpendiculares entre sí, la suma de los cuadrados de las distancias que separan al punto dado de los cuatro en que las secantes cortan á la circunferencia es una cantidad constante,*

IV. *Demostrar la siguiente proposicion: Si dado un triángulo* ABC *se hace centro en el del círculo inscrito y con un radio cualquiera se traza una circunferencia, y cualquiera punto* M *de interseccion de esta con los lados del triángulo se une con los tres vértices, se verifica que*

$$\overline{AM}^2 \times a + \overline{BM}^2 \times b + \overline{CM}^2 \times c,$$

es constante. a, b, c *representan los lados del triángulo.*

V. *Hallar el lugar geométrico de todos los puntos que gocen de la propiedad de que las tangentes tiradas desde cada uno de ellos á dos circunferencias concéntricas dadas sean perpendiculares.*

VI. *Hallar la ecuacion del círculo que pase por tres puntos dados.*

CAPÍTULO V.

TEORÍAS GENERALES.

Este capítulo está consagrado á la esposicion de las teorías generales que tienen por objeto deducir de la ecuacion de cualquiera curva las coordenadas de ciertos puntos y las ecuaciones de ciertas rectas que gozan de propiedades notables respecto á la curva; puntos y rectas que importa mucho conocer para discutir la curva; es decir, para determinar con exactitud su forma y posicion.

§ I. — Tangentes.

99. **Definiciones.** — Llámase *tangente* á una curva AB (fig. 46) en uno determinado M de sus puntos al límite MT de las posiciones que va tomando una secante MS que pasa por este punto y que gira sobre el M, de tal modo que un segundo punto M' que tenga comun con la curva, vaya aproximándose indefinidamente al M.

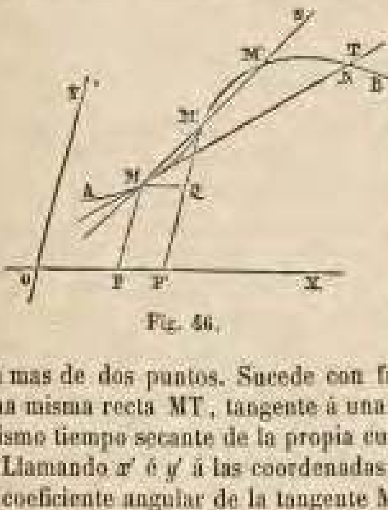


Fig. 46.

Decimos *un segundo punto de interseccion*, porque puede suceder que la secante corte á la curva en mas de dos puntos. Sucede con frecuencia en este caso que una misma recta MT, tangente á una curva en un punto M, es al mismo tiempo secante de la propia curva en otro N.

Llamando x' é y' á las coordenadas OP y MP del punto M, y m el coeficiente angular de la tangente MT, la ecuacion de esta tendrá la forma

$$y-y'=m(x-x'),$$

en la que hay que determinar el valor del coeficiente m.

100. Teorema. *El coeficiente angular de la tangente es igual á la derivada de la ordenada que corresponde al punto de contacto, considerando á esta ordenada como una funcion de su abscisa.*

Tírese la ordenada M'P', y la recta MQ paralela á OX; hágase, para abreviar, $MQ=h$ y $M'Q=k$; las coordenadas del punto M' serán $x'+h$ é $y'+k$. En virtud de esto, la secante MS que pasa por los puntos M y M' tendrá por ecuacion (70)

$$y-y'=\frac{k}{h}(x-x')$$

Si hacemos que la secante gire alrededor del punto M, de modo que el segundo punto M' comun con la curva se aproxime indefinidamente al primero, tanto k como h se irán aproximando á cero; pero su razon $\frac{k}{h}$ irá aproximándose á un límite determinado, que no es otra cosa que m, segun la definicion que hemos dado de la tangente: en su consecuencia

$$m=\text{límite de }\frac{k}{h}.$$

Ahora bien, k es el incremento de la ordenada y' correspondiente al incremento h de la abscisa x', y, por lo tanto, el límite hácia el cual tiende la razon que hay entre estos dos incrementos es el valor que toma la *derivada* de la ordenada de la curva, considerando á esta ordenada como una funcion de la abscisa, cuando á esta abscisa se da el valor x', y en su consecuencia el y' á la ordenada: lo cual concuerda con el enunciado del teorema.

Cuando pueda ponerse la ecuacion de la curva bajo la forma $y=\varphi(x)$, se tendrá, en general, para el punto cuya abscisa sea x',

$$m=\varphi'(x');$$

y, en virtud de esto, la ecuacion de la tangente á la curva en este punto será

$$y-y'=\varphi'(x')(x-x'),$$

á cuya ecuacion hay que añadir la relacion $y'=\varphi(x')$ que liga entre sí á las coordenadas del punto que se considera.

Si, por ejemplo, en la circunferencia que tenga por ecuacion

$$y^2+x^2=25$$

nos proponemos hallar la ecuacion de la tangente à esta circunferencia en el punto que tenga por abscisa $x=3$, tendrémos

$$y=\varphi(x)=\pm\sqrt{25-x^2},\quad \text{de donde resulta}\quad \varphi'(x)=\pm\frac{x}{\sqrt{25-x^2}},$$

y haciendo $x'=3$,

$$y=\varphi(3)=\pm 4 \quad \text{y} \quad \varphi'(3)=\pm\tfrac{3}{4}.$$

Si de los dos puntos que tienen por abscisa 3, consideramos el colocado encima del eje de las x, deberémos tomar los signos superiores, y será la ecuacion pedida

$$y-4=-\tfrac{3}{4}(x-3) \quad \text{ó sea} \quad y=-\tfrac{3}{4}x+\tfrac{25}{4}.$$

Por el contrario, cuando consideremos el punto que está por debajo del eje de las x, deberémos tomar los signos inferiores, y resultará para ecuacion de la tangente

$$y+4=\tfrac{3}{4}(x-3) \quad \text{ó sea} \quad y=\tfrac{3}{4}x-\tfrac{25}{4}.$$

101. Cuando no pueda ponerse la ecuacion de la curva bajo la forma $y=\varphi(x)$, podrá ponerse, por lo general, bajo esta otra

$$f(x, y)=0.$$

Si consideramos que y es una funcion de x, y tomamos las derivadas de ambos miembros, teniendo presente la regla de las funciones compuestas y tambien la de las funciones de funciones, tendrémos

$$f_x'(x, y)+f_y'(x, y)\cdot y_x'=0,$$

de donde resultará $\quad y_x'=-\dfrac{f_x'(x, y)}{f_y'(x, y)}.$

Esto nos hace ver que, *para tener el coeficiente angular de la tangente, hay que dividir la derivada del primer miembro de la ecuacion de la curva con relacion á* x *por la derivada del mismo con relacion á* y, *y afectar al resultado con signo contrario al que dé la division.*

En virtud de esto, la ecuacion de la tangente á la curva en o punto que tenga por coordenadas x' é y', será

$$y-y'=-\frac{f_x'(x', y')}{f_y'(x', y')}(x-x'),$$

ó bien

$$yf_y'(x', y')+xf_x'(x', y')=y'f_y'(x', y')+x'f_x'(x', y') \quad [3],$$

á la que siempre hay que añadir la relacion $f(x', y')=0$, que liga entre sí las coordenadas x' é y'.

Tomemos, para ejemplo, la curva que tiene por ecuacion

$$y^3-2xy+x^3=0,$$

y propongámonos tirarle una tangente en el punto que tenga por abscisa $x=1$. Tendrémos que

$$f_x'(x, y)=-2y+3x^2, \quad f_y'(x, y)=3y^2-2x;$$

Y X coordenadas de la tangente

x y de la curva

y llamando y' á la ordenada correspondiente á la abscisa $x=1$, tendrémos representada la tangente en la ecuacion

$$(y-y')(3y'^2-2)+(x-x')(3-2y')=0;$$

á la que hay que añadir

$$y'^3-2y'+1=0.$$

Las tres raices de esta ecuacion son reales, y hallarémos

$$y'=1 \quad \text{ó} \quad y'=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Tomando para y' el valor 1, la ecuacion de la tangente será

$$(y-1)(3-2)+(x-1)(3-2)=0 \quad \text{ó sea} \quad y=-x+2.$$

Observacion. Aunque el segundo miembro de la ecuacion (3) es del grado m^o con respecto á x' é y', puede rebajarse al $m-1$, en virtud de la relacion $f(x', y')=0$. La demostracion mas sencilla de esta propiedad se funda en el llamado *Teorema de las funciones homogéneas*, que consiste en que, *si* f(x, y) *es una funcion algebráica homogénea de* m° *grado, se verifica la identidad*

$$xf'_x(x, y)+yf'_y(x, y)=mf(x, y).$$

Para demostrarlo, se toma la derivada con relacion á t de los dos miembros de la identidad

$$f(tx, ty)=t^m f(x, y),$$

que define la homogeneidad de la funcion, y se hace en seguida $t=1$.

En este supuesto sea

$$f(x, y)=\varphi_m+\varphi_{m-1}+\ldots\ldots+\varphi_1+\varphi_0;$$

en que φ_m representa el conjunto de todos los términos del grado m; φ_{m-1}, el de todos los del grado $m-1$, etc.; y se tendrá, en virtud del teorema anterior,

$$\begin{aligned} xf'_x(x, y)+yf'_y(x, y) &= m\varphi_m+(m-1)\varphi_{m-1}+\ldots\ldots+\varphi_1 \\ &= m(\varphi_m+\varphi_{m-1}+\varphi_1+\varphi_0)-\varphi_{m-1}-2\varphi_{m-2}-3\varphi_{m-3}\ldots\ldots \\ &\quad -(m-1)\varphi_1-m\varphi_0; \end{aligned}$$

y como poniendo en lugar de x é y las coordenadas x' é y' del punto de contacto, se reduce á cero la suma que hay dentro del paréntesis, y el segundo miembro no es mas que del grado $m-1$, queda demostrado el teorema.

102. Subtangente.—Así se llama la distancia que hay desde el pié de la ordenada correspondiente al punto de contacto hasta el de interseccion de la tangente con el eje de las x.

La longitud de la subtangente que corresponde á una curva en el punto cuyos coordenadas sean x', y', se espresa por el valor de $x-x'$, sacado de la ecuacion de la tangente á la curva en dicho punto, haciendo $y=0$.

103. Normal y subnormal.—Se llama *normal* á la curva en uno de sus puntos la perpendicular levantada á la tangente en el de contacto. Segun esto, la ecuacion de la normal á la curva $f(x, y)=0$ en el punto que tenga por coordenadas (x', y') es

$$y-y'=\frac{f_y'}{f_x'}(x-x'),$$

si los ejes son rectangulares, ó

$$y-y'=\frac{f_y'-f_x'\cos\theta}{f_x'-f_y'\cos\theta}(x-x')$$

cuando sean oblicuos.

Subnormal es la distancia que hay desde el punto en que la normal encuentra al eje de las x al pié de la ordenada correspondiente al punto de contacto. Se espresa su longitud por el valor de $x-x'$, sacado de la ecuacion de la normal, despues de haber hecho en esta $y=0$.

104. Problemas relativos á las tangentes.—Con lo que llevamos dicho tenemos lo bastante para resolver, por medio del cálculo, todos los problemas relativos á las tangentes.

PROBLEMA I. *Desde un punto esterior* (x'', y'') *tirar una tangente á la curva que tiene por ecuacion* $f(x, y)=0$.

Llamemos, como antes, (x', y') á las coordenadas del punto de contacto; y como el punto (x'', y'') pertenece á la tangente, tendrán que satisfacer sus coordenadas á la ecuacion de dicha recta y que verificarse

$$(y''-y')f_y'(x', y')+(x''-x')f_x'(x', y')=0;$$

y como el punto (x', y') pertenece tambien á la curva, se verificará que

$$f(x', y')=0.$$

Por medio de estas dos ecuaciones determinarémos x' é y'; y tantos como sean los sistemas de valores reales de x' é y' que las satisfagan, otras tantas serán las tangentes que se podrán tirar á la curva desde el punto (x'', y'') esterior á ella. Cuando la ecuacion de la curva sea del grado m, la de la tangente será del $m-1$, y el número de soluciones será á lo más $m(m-1)$; de modo que, en las curvas de segundo grado, este número es igual á 2.

Por via de ejercicio nos propondrémos tirar por el punto que tiene por coordenadas $y''=0$ y $x''=13$ una tangente á la circunferencia representada por la ecuacion

$$x^2+y^2=25,$$

para lo cual tendrémos que resolver las dos siguientes:

$$(0-y').2y'+(13-x').2x'=0 \quad \text{y} \quad x'^2+y'^2=25,$$

ó
$$x'^2+y'^2-13x'=0 \quad \text{y} \quad x'^2+y'^2=25.$$

De ellas sacarémos muy fácilmente

$$x'=\tfrac{25}{13} \quad \text{é} \quad y'=\pm\tfrac{60}{13},$$

cuyos valores nos manifiestan que es posible tirar desde el punto dado dos tangentes á la circunferencia, como ya debíamos haber previsto.

Tambien puede resolverse gráficamente este problema, como se hizo en el círculo (96), construyendo las líneas representadas por las dos anteriores ecuaciones, considerando en ellas á x' é y' como coordenadas generales: los puntos de interseccion de estas dos líneas, una la propuesta, y la otra de un órden inferior, por lo menos en una unidad, son los de contacto que se buscan.

105. Problema II. *Tirar á la curva representada por la ecuacion* $f(x, y)=0$, *una tangente que sea paralela á la recta dada* $y=mx$. *Hallar la ecuacion de la tangente en funcion de su coeficiente angular.*

Si la tangente ha de ser paralela á esta recta estará representada por una ecuacion de la forma

$$y=mx+n,$$

en la que tendrémos que determinar n.

Conservemos las denominaciones x' é y' para las coordenadas del punto de contacto; y como la ecuacion de la tangente en funcion de estas coordenadas es

$$(y-y')f'_{y'}(x', y')+(x-x')f'_{x'}(x', y')=0,$$

ó sea $$y=-\frac{f_x'(x',y')}{f_y'(x',y')}x+y'+\frac{f_x'(x',y')}{f_y'(x',y')}x',$$

y esta ecuacion debe ser idéntica á la primera, tendrá que verificarse que

$$-\frac{f_x'(x',y')}{f_y'(x',y')}=m \quad \text{é} \quad y'+\frac{f_x'(x',y')}{f_y'(x',y')}x'=n \qquad [a];$$

además, hallándose el punto de contacto sobre la curva, es preciso que

$$f(x',y')=0 \qquad [b],$$

y con esta y las dos anteriores, tendrémos tres ecuaciones que servirán para determinar x', y' y n. Habrá tantas tangentes paralelas á la direccion dada como sistemas de valores reales de x' é y' satisfagan á la primera y tercera ecuaciones.

Esto será suponiendo que la recta dada no sea paralela al eje de las y; pues si lo fuese tendria la tangente por ecuacion $x=x'$, y no habria que resolver mas que las dos ecuaciones

$$f_y'(x',y')=0 \quad \text{y} \quad f(x',y')=0,$$

de las cuales la primera resulta de la hipótesis $m=\infty$.

Eliminando x' é y' entre las ecuaciones $[a]$ y $[b]$ para calcular el valor de n, se tendrá la ecuacion de la tangente en funcion de su coeficiente angular.

Para que sirva de ejemplo, supondrémos que se quiere tirar á la circunferencia representada por $x^2+y^2=25$ una tangente paralela á la recta que tiene por ecuacion $y=-\frac{5}{12}x$. Las ecuaciones que tenemos que resolver son

$$-\frac{2x'}{2y'}=-\frac{5}{12}, \quad y'+\frac{2x'}{2y'}\cdot x'=n, \quad x'^2+y'^2=25,$$

de las que sacarémos

$$x'=\pm\frac{25}{13}, \quad \text{y de este valor} \quad y'=\pm\frac{60}{13}, \quad \text{y despues} \quad n=\pm\frac{65}{12},$$

en cuyos valores tienen que corresponderse los signos; de modo que las ecuaciones de las dos tangentes son $y=-\frac{5}{12}x\pm\frac{65}{12}$.

106. Problema III. *Tirar una tangente que sea comun á las dos curvas representadas por las ecuaciones* $f(x,y)=0$ *y* $\varphi(x,y)=0$.

Sean $y=mx+n$ la ecuacion de la tangente comun; x', y', las coordenadas del punto de su contacto con la primera curva, y x''

é y'', las de aquel en que toca á la segunda. Considerando que esta recta es tangente á la primera curva, tendrémos

$$f_x'(x', y') + m f_y'(x', y') = 0, \quad y' = mx' + n, \quad f(x', y') = 0,$$

y porque tambien lo es á la segunda

$$\varphi_x'(x'', y'') + m\varphi_y'(x'', y'') = 0, \quad y'' = mx'' + n, \quad \varphi(x'', y'') = 0,$$

y por medio de estas seis ecuaciones podrémos determinar las incógnitas x', y', x'', y'', m y n: eliminando x' é y' entre las tres primeras, x'' é y'' entre las tres restantes, y quedándonos con las dos resultantes de estas eliminaciones, que servirán para determinar m y n, y despues con el auxilio de estas cantidades, determinarémos las x', y', x'' é y''.

Tomando, por ejemplo, las dos circunferencias representadas por

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad y \quad (x-\alpha)^2 + y^2 = r^2,$$

las seis ecuaciones que tendrémos que resolver, serán

$$x' + my' = 0, \quad y' = mx' + n, \quad x'^2 + y'^2 = R^2,$$
$$(x''-\alpha) + my'' = 0, \quad y'' = mx'' + n, \quad (x''-\alpha)^2 + y''^2 = r^2.$$

De las tres primeras se deducen

$$y' = \frac{n}{1+m^2}, \quad x' = -\frac{mn}{1+m^2}, \quad n^2 = R^2(1+m^2),$$

y de las tres últimas

$$y'' = \frac{n+m\alpha}{1+m^2}, \quad x''-\alpha = -\frac{m(n+m\alpha)}{1+m^2}, \quad (n+m\alpha)^2 = r^2(1+m^2);$$

y eliminando n entre las dos ecuaciones que contienen m y n, hallarémos

$$m = \pm \frac{R \pm r}{\sqrt{\alpha^2 - (R \pm r)^2}},$$

en cuyos valores se debe afectar á r con el mismo signo en numerador que en denominador. Estos valores son cuatro, como ya debíamos prever, porque cuatro son las tangentes que, por regla general, se pueden tirar á dos circunferencias dadas.

Conocido ya m, inmediatamente deducirémos los valores de n, $n = \pm R\sqrt{1+m^2}$, y, en su consecuencia, los de todas las demás incógnitas. Ninguna dificultad ofrece la discusion de estos valores, discusion que reproduce todas las circunstancias conocidas del problema geométrico que estamos resolviendo.

Tambien podemos deducir de estos valores la construccion geométrica ordinaria; pues si buscamos el punto en que la tangente corta á la recta que une los centros, que es la tomada por eje de las x, para la cual no hay mas que hacer $y=0$ en la ecuacion $y=mx+n$, resulta para abscisa de este punto

$$x=-\frac{n}{m},$$

ó poniendo, en vez de m y n, sus respectivos valores y simplificando

$$x=\frac{R\alpha}{R\pm r};$$

valores de x que nos llevarán á la construccion que ya conocemos.

107. PROBLEMA IV. *Suponiendo que una curva pase por el origen, hallar la tangente á la misma en este punto.*

Como la ecuacion de la tangente es en este caso $y=mx$, el coeficiente angular de la misma será el límite hácia el cual tiende la razon $\frac{y}{x}$, sacada de la ecuacion de la curva, cuando x tiende hácia cero.

Por ejemplo, cuando se tenga

$$y=\operatorname{sen} x,$$

resultará

$$\lim\frac{y}{x}=\lim\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1;$$

luego la tangente á la *sinusóide* en el origen es la bisectriz del ángulo que forman los ejes.

OBSERVACION. A veces será mas fácil hallar el límite de $\frac{x}{y}$ y tomarle inversamente.

§ II. — APLICACION DE LA TEORÍA DE LAS TANGENTES Á LA DISCUSION DE LAS CURVAS.

108. Discutiendo el coeficiente angular de la tangente á una curva se llegan á conocer las particularidades mas importantes que esta última ofrece en su curso.

Si dando á x valores crecientes desde uno que llamemos x' hasta otro x'', se conservase constantemente positivo en todo este intérvalo el coeficiente angular m de la tangente, sería prueba de que los incrementos h y k eran del mismo signo; mas h es positivo, porque hemos ido haciendo crecer el valor de x; luego tambien k es positivo, y la ordenada y ha crecido algebráicamente. Por el contrario, si en el intérvalo desde x' á x'' se conservase m constantemente negativo, sería prueba de que h y k tenían signos contrarios; pero siendo h positivo, tendría que ser k negativo, lo cual indicaría que la ordenada y decrecía algebráicamente. Por consiguiente, en el intérvalo de x' á x'' *se estenderá la curva hácia las y positivas ó negativas, segun que sea positivo ó negativo el coeficiente angular de la tangente.*

Como primer ejemplo presentarémos la curva que tiene por ecuacion

$$9y^2+4x^2-24x=0$$

de la que resulta

$$y=\pm\tfrac{2}{3}\sqrt{x(6-x)},$$

y tendrémos

$$m=\frac{4(3-x)}{9y}.$$

La abscisa x solamente puede variar desde 0 hasta 6; pero desde $x=0$ hasta $x=3$ se conserva m positivo; luego considerando únicamente la parte de la curva que corresponde á los valores positivos de y, vemos que se estiende hácia las y positivas. Por el contrario, desde $x=3$ hasta $x=6$, se conserva m negativo: luego la curva se estiende hácia las y negativas. Lo contrario sucederia tratando de la parte de curva correspondiente á los valores negativos de y: así es que la figura 47 representa esta curva.

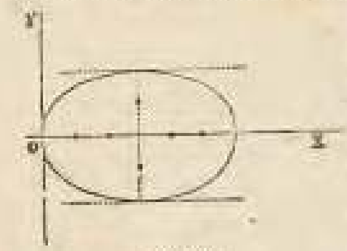


Fig. 47.

Como segundo ejemplo tratarémos de la curva representada por

$$y=x^2-4x+3,$$

en la que

$$m=2(x-2).$$

La abscisa x puede pasar por todos los estados de magnitud; pero desde $x=-\infty$ hasta $x=2$ se conserva m negativo; luego la curva se estiende hácia las y negativas: desde $x=2$ hasta $x=+\infty$ permanece positivo el valor de m; luego se estiende la curva hácia las y positivas. Por consiguiente, la forma de esta curva es la representada en la figura 48.

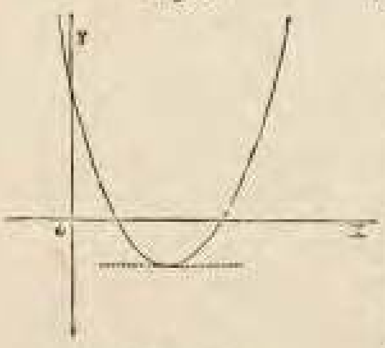


Fig. 48.

109. Sentido de la concavidad.—Si haciendo crecer á x desde un valor x' hasta otro x'', m fuese creciendo algebráicamente, deberíamos decir que el ángulo α formado por la tangente con la parte positiva del eje de las x va creciendo; pues, por regla general (66), se tiene

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{m\,\operatorname{sen}\theta}{1+m\cos\theta}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta+\frac{1}{m}},$$

y esta cantidad va creciendo algebráicamente al mismo tiempo que m; luego cuando m crece, aumenta α. Pero de este aumento

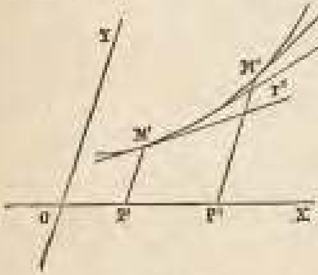


Fig. 49.

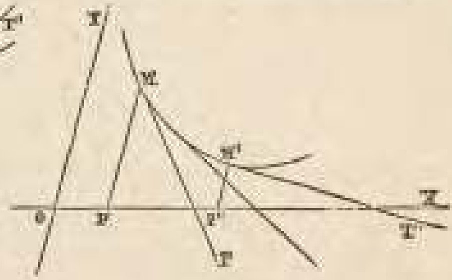


Fig. 50.

continuado de α, debemos deducir que la curva presenta su concavidad hácia las y positivas, segun se ve en las figuras 49 y 50.

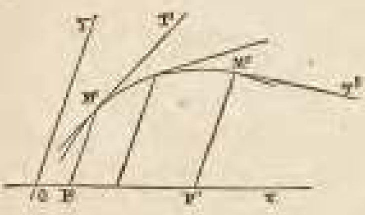


Fig. 51.

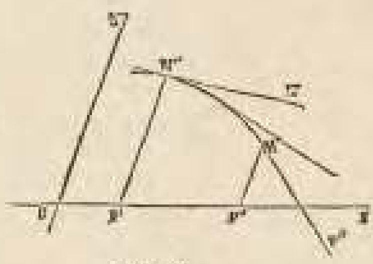


Fig. 52.

Por el contrario, si m disminuyese algebráicamente, α disminuiria tambien, y en este caso presentaria la curva su concavidad hácia las y negativas, segun representan las figuras 51 y 52. Vemos, pues, *que la concavidad de la curva se presenta hácia las* y *positivas ó hácia las negativas, segun que el coeficiente angular* m *de la tangente aumenta ó disminuye.*

Tambien puede darse en otros términos esta regla; pues si consideramos á m como una funcion de x, verémos, como en el número anterior, que aumenta ó disminuye, segun sea positiva ó negativa su primera derivada; y como esta primera derivada de m no es otra cosa que la segunda de y, podemos decir que *se presentará la convexidad de la curva, ya hácia las* y *positivas ó hácia las negativas, segun que sea positiva ó negativa la segunda derivada de* y *tomada con relacion á* x.

Segun los casos que se presenten, usarémos de una ú otra de estas dos reglas.

Tomemos, para primer ejemplo, la curva representada en la figura 47, en que, segun vimos antes,

$$y=\pm\tfrac{2}{3}\sqrt{x(6-x)} \quad \text{y} \quad m=\frac{4(3-x)}{9y}.$$

Consideremos primero la parte de curva correspondiente á los valores positivos de y. Ya vimos que desde $x=0$ hasta $x=3$, va creciendo y: en este intérvalo, m va disminuyendo, porque decrece su numerador y aumenta el denominador. Por el contrario, desde $x=3$ hasta $x=6$ decrece y: en este intérvalo m es negativo, pero aumenta en valor absoluto; por consiguiente, tambien disminuye m algebráicamente. En su consecuencia, la parte de curva que corresponde á los valores positivos de y vuelve su concavidad hácia las y negativas. Lo mismo veríamos que la correspondiente á los negativos de y la presenta hácia las y positivas.

Por segundo ejemplo tomarémos la curva de la figura 48, en que

$$y=x^2-4x+3 \quad \text{y} \quad m=2(x-2).$$

La primera derivada de m es $+2$, cantidad positiva; por lo tanto, esta curva presentará constantemente su concavidad hácia las y positivas.

Por último, consideremos la curva de la figura 49, que tiene por ecuacion (véase el núm. **151**)

$$2xy+x^2-2y-3x-1=0,$$

de la cual resulta
$$y=-\tfrac{1}{2}x+1+\frac{3}{2(x-1)},$$

y hallarémos
$$m=-\tfrac{1}{2}+\frac{3}{2(x-1)^2},$$

y llamando m' á la primera derivada de m,

$$m'=\frac{3}{(x-1)^3}.$$

El valor de m' se conserva negativo cuando se van dando á x todos los comprendidos desde $-\infty$ hasta $+1$: por consiguiente, la rama de curva que corresponde á estos valores vuelve su concavidad hácia las y negativas. Desde $x=+1$ hasta $x=+\infty$

resulta m' positiva; luego la rama correspondiente de curva tiene su concavidad vuelta hácia las y positivas.

Al mismo resultado llegaríamos observando que, desde $x=-\infty$ hasta $x=+1$, disminuye m, y que, por el contrario, aumenta desde $x=+1$ hasta $x=+\infty$.

110. Ordenadas máximas y mínimas. — Cuando una curva continua se estiende en el sentido de las y positivas, y luego retrocede hácia el de las y negativas, su ordenada pasa precisamente por un valor *máximo*; al contrario, cuando una curva, despues de haber marchado en el sentido de las y negativas, se vuelve y marcha en el de las positivas, tiene que pasar su ordenada por un valor *mínimo*. En general, la tangente es paralela al eje de las x en los puntos correspondientes á una ordenada máxima ó mínima, y, por lo mismo, estos puntos se hallan comprendidos entre aquellos á que corresponde $m=0$. Por consiguiente, en el caso que nos ocupa tendrémos un máximo ó un mínimo, segun que la curva presente su concavidad hácia las y negativas ó hácia las positivas; es decir, segun que sea negativa ó positiva la primera derivada de m (ó sea la segunda de y).

Volvamos á tomar, por ejemplo, la curva de la figura 47, en que tenemos

$$m=\frac{4(3-x)}{9y}=\pm\frac{2}{3}\frac{3-x}{\sqrt{x(6-x)}},$$

cantidad que se reduce á cero haciendo $x=3$, de donde resulta $y=\pm 2$. La derivada de m es

$$m'=-\frac{2x^2-12x+9}{\sqrt{x^3(6-x)^3}}=-\frac{4}{9}\cdot\frac{2x^2-12x+9}{y^3},$$

que, haciendo $x=3$ é $y=+2$, se reduce á

$$m'=-\tfrac{2}{9},$$

y haciendo $x=3$ é $y=-2$, á $\quad m'=+\tfrac{2}{9}$.

En su consecuencia, la ordenada $y=+2$ es un máximo, y la $y=-2$ un mínimo.

Volvamos á ocuparnos, para que sirva de segundo ejemplo, de la curva representada en la figura 48; y tendrémos

$$m=2(x-2),$$

cuyo valor se reduce á cero haciendo $x=2$, por lo que $y=-1$.

La derivada de m es $+2$; por consiguiente, la ordenada $y=-1$ es un mínimo.

111. Para completar la teoría de los máximos y mínimos tendríamos que salirnos de las condiciones de este tratado, empleando el cálculo infinitesimal; pero lo que dejamos dicho, es suficiente para la discusion de las curvas que mas frecuentemente ocurren en las aplicaciones.

Ya hemos visto en el núm. 23 que, en el caso de que dos variables estén ligadas entre sí por una ley desconocida, y que los esperimentos no hayan dado mas que cierto número de pares de valores correspondientes de aquellas variables, se puede construir cierto número de puntos que representen con aproximacion la relacion que una de las variables tiene con la otra. Si la variable que hayamos considerado como funcion de la otra puede admitir un valor máximo ó mínimo, es preciso que la curva que represente á aquella variable pueda tener una tangente paralela al eje de las x, y entonces la ordenada del punto de contacto es el máximo ó mínimo valor de la funcion.

Por ejemplo, si en la curva de la figura 12 (láminas) que espresa aproximadamente la ley en que varia *el coeficiente del efecto útil* (23) de una turbina en funcion del número de vueltas que esta da por minuto, tiramos á esta curva una tangente paralela al eje de las abscisas, hallarémos que el punto M de contacto corresponde á la abscisa 46, y tiene por ordenada 60,5. En vista de esto, dirémos que el máximo efecto útil de esta turbina corresponde á cuando esta dé 46 vueltas por minuto, y que este máximo efecto es 60,5 referido á la escala de la figura; es decir, que el efecto útil hallado es los 0,605 del trabajo absoluto del motor.

112. Inflexiones. — Se llama *punto de inflexion* á todo aquel en que la concavidad de una curva cambia de sentido, es decir, aquel en que, viniendo la curva presentando antes de llegar á él su concavidad hácia las y negativas, desde aquel punto empieza á presentarla hácia las y positivas, ó *vice-versa*. Segun esto, al llegar á este punto la segunda derivada de la ordenada (considerando á esta ordenada como funcion de la abscisa) pasa de positiva á negativa, ó de negativa á positiva. Por lo general, esta segunda derivada pasa por el valor cero para cambiar de signo, y en este caso los puntos de inflexion están entre aquellos para los cuales es nula esta derivada.

irva de ejemplo la curva que tiene por ecuacion

$$y = \tfrac{1}{3}x^3 - x,$$

y hallarémos

$$m = x^2 - 1$$

y

$$m' = 2x.$$

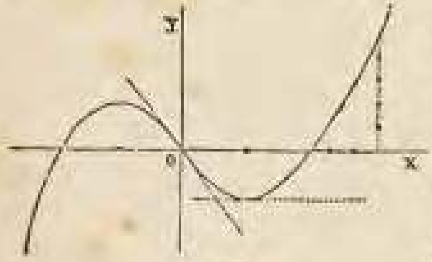


Fig. 53.

Esta segunda derivada se reduce á cero cuando lo es x, de donde resulta $y = 0$; por consiguiente, uno de los puntos de inflexion está en el orígen.

Además, nos convencerémos fácilmente de que el máximo valor de la ordenada corresponde á $x = -1$, y el mínimo á $x = +1$, y de que esta curva tendrá la forma que representa la figura 53.

Observacion. La tangente tirada en el punto de inflexion ofrece la particularidad de que deja á diferente lado suyo cada una de las dos partes de la curva inmediatamente próximas al punto de inflexion, la una anterior y la otra posterior á dicho punto, como se ve en la fig. 53.

Nada mas dirémos acerca de los puntos de inflexion, y omitirémos todo lo relativo á los demás *puntos singulares* que puede presentar una curva; porque el estudio completo de estos puntos sale del plan de esta obra, pues necesita del cálculo infinitesimal; además, no tiene gran interés bajo el punto de vista de sus aplicaciones.

§ III. — Asímtotas rectilíneas.

113. Definicion. — Se dice que una recta es *asímtota* de una curva cuando, teniendo esta última una rama infinita, se va aproximando continua é indefinidamente á la recta; esto es, cuando la distancia entre cada punto de la curva y la recta va disminuyendo y aproximándose á cero, segun se avanza en esta rama infinita de la curva.

En la investigacion de las asímtotas nos limitarémos al caso de que la ecuacion de la curva sea algebráica.

Asímtotas paralelas al eje de las y. — Para buscar las asímtotas que sean paralelas al eje de las y, supongamos que sean BC (figura 54) la rama de una curva que tenga una asímtota AL de esta especie, M un punto cualquiera de la rama de curva que consideramos, y MP la perpendicular bajada desde este punto á la recta AL. Tírese MQ paralela al eje de las x, y llamando θ al ángulo que formen entre sí los ejes, tendrémos $MP = MQ \operatorname{sen} \theta$, ó bien, llamando x á la abscisa del punto M, y d á la del Q,

$$MP=(x-d)\,\text{sen}\,\theta.$$

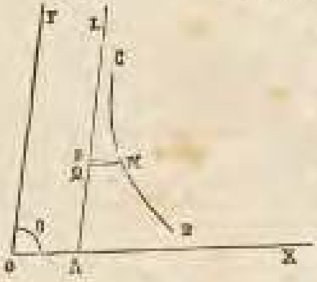


Fig. 64.

Segun la definicion que hemos dado de la asímtota, el valor de esta distancia debe irse aproximando á cero á medida que el punto M vaya alejándose al recorrer la curva; luego debe ser $x=d$ cuando sea $y=\infty$; y este carácter sirve para hallar la asímtota cuando se conoce la ecuacion de la curva.

Como hemos supuesto que esta ecuacion es algebráica, se puede escribir bajo la forma

$$y^n f(x)+y^{n-1}f_1(x)+y^{n-2}f_2(x)+\ldots\ldots+f_n(x)=0,$$

representando por $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)\ldots\ldots f_n(x)$ unas funciones algebráicas y enteras de x.

Dividiendo por y^n, resultará

$$f(x)+\frac{1}{y}f_1(x)+\frac{1}{y^2}f_2(x)+\ldots\ldots+\frac{1}{y^n}f_n(x)=0.$$

Haciendo en esta última espresion $x=d$ é $y=\infty$, como las espresiones $f_1(d)$, $f_2(d)\ldots\ldots$, $f_n(d)$ tendrán valores finitos, desaparecerán todos los términos desde el segundo en adelante, y quedará solamente

$$f(d)=0.$$

Si llamamos d_1, d_2, d_3, etc., á las raíces reales de esta ecuacion, las asímtotas á la curva paralelas al eje de las y serán

$$x=d_1,\quad x=d_2,\quad x=d_3,\quad \text{etc.},$$

con tal de que á estos valores de x correspondan otros reales de y, aunque sean infinitos; es decir, que se necesita que el valor de y resulte real cuando se vayan dando á x otros que se diferencien muy poco de d_1, d_2, d_3, etc., ya sea esta diferencia por esceso ó ya por defecto.

114. Ejemplo. Comparando la ecuacion

$$x^2y^2-xy^2-2y^2-x-2=0$$

con la forma general que pusimos arriba, harémos

$$f(d)=d^2-d-2=0,\quad \text{cuyas raices son}\quad d_1=2 \;\text{ y }\; d_2=-1;$$

y como de la ecuacion de la curva sacamos

$$y=\pm\sqrt{\frac{x+2}{(x+1)(x-2)}},$$

cuyos valores son reales cuando $x=2+\varepsilon$ ó $x=-1-\varepsilon$; representando por ε una cantidad positiva tan pequeña como se quiera, conocerémos que la curva tiene por asimtotas las paralelas al eje de las y que representan las ecuaciones

$$x=2 \;\text{ y }\; x=-1;$$

y si las coordenadas son rectangulares, la forma de la curva será la que indica la fig. 55.

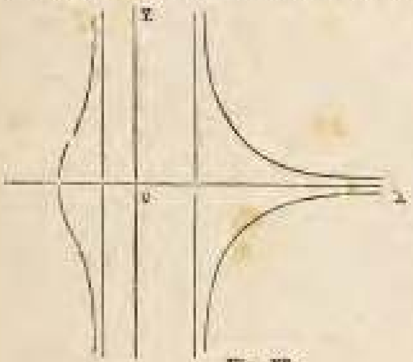


Fig. 55.

Por el contrario, si la ecuacion fuese

$$x^2y^2-x+1=0$$

tendríamos

$$f(d)=d^2=0,\quad \text{que da}\quad d=0;$$

y como de la ecuacion de la curva sacaríamos

$$y=\pm\frac{\sqrt{x-1}}{x},$$

y haciendo $x=\pm\varepsilon$, siendo ε una cantidad muy pequeña, resultarían para y valores imaginarios: la recta que tiene por ecuacion $x=0$, es decir el eje de las y, no es asimtota de la curva. La forma de esta curva, en el caso de que las coordenadas sean rectangulares, es la que representa la figura 56.

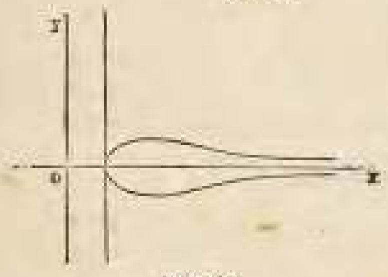


Fig. 56.

115. Asimtotas no paralelas al eje de las y. — Pasemos á buscar las asimtotas que no sean paralelas al eje de las y.

Supongamos que EF (fig. 57 ó 58) es una rama de cierta curva, y que esta rama tiene por asimtota una recta AL, que forma con el eje de las x un ángulo α. Sea M uno cualquiera de los puntos de la curva, bájese MC perpendicular á la asimtota; tírese la ordenada MP que cortará en D á la asímtota, y en el triángulo MCD tendrémos

$$\mathrm{CM} = \mathrm{DM}\ \mathrm{sen}\ \mathrm{CDM} = \mathrm{DM}\ \mathrm{sen}\,(\theta - \alpha),$$

siendo θ el ángulo de los ejes.

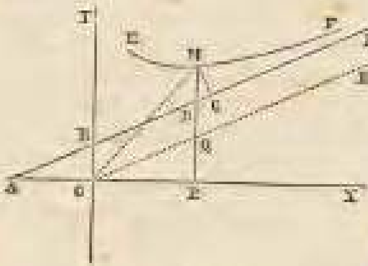


Fig. 57.

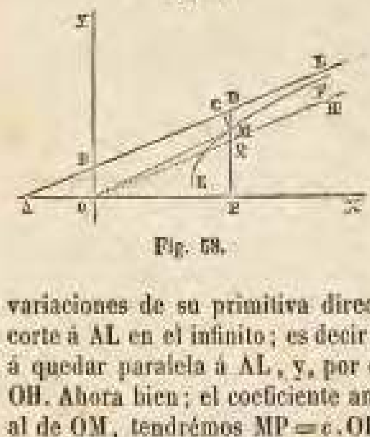


Fig. 58.

Como en virtud de la definicion que hemos dado de la asímtota, debe CM acercarse á cero á proporcion que el punto M se va alejando sobre la rama EF, deberá suceder lo mismo á la recta DM, que es proporcional con aquella.

Entendido esto, unirémos O con M, y tirarémos OH paralela á AL y que cortará á MP en Q; por último, sea la ecuacion de la asímtota $y = ax + b$.

Segun el punto M vaya avanzando sobre la rama EF y acercándose cada vez más á la asímtota, la recta OM, cualesquiera que fuesen las variaciones de su primitiva direccion, tenderá á tomar una que corte á AL en el infinito; es decir, que la tendencia de OM será á quedar paralela á AL, y, por consiguiente, á confundirse con OH. Ahora bien; el coeficiente angular de OH es a, y llamando c al de OM, tendrémos $\mathrm{MP} = c\,.\mathrm{OP}$ ó $y = cx$; en su consecuencia, cuando x tienda al infinito, tendrémos

$$a = \lim.\, c = \lim.\, \frac{y}{x};$$

es decir, que *el coeficiente angular de la asímtota es el límite hácia el cual tiende la relacion entre la ordenada y la abscisa de la curva cuando esta abscisa tiende hácia el infinito.*

116. Como la distancia MD se va aproximando á cero, á medida que el punto M se va alejando sobre la rama EF, MQ se va acercando cada vez mas á DQ ó á su igual OB, que es la ordenada en el orígen correspondiente á la asimtota; es decir, b. Pero tenemos que MQ=MP—PQ; por otra parte, MP$=y$ y PQ$=a$.OP$=ax$; por consiguiente, cuando x tienda hácia el infinito, será

$$b=\lim.(y-ax),$$

lo que quiere decir que *la ordenada en el orígen correspondiente á la asimtota es el límite hácia el cual tiende la espresion* y − ax *á proporcion que* x *tiende hácia el infinito*, suponiendo que el coeficiente a está determinado del modo que dijimos antes.

117. Nos queda ahora el aplicar las reglas que dejamos dadas; y para esto escribirémos la ecuacion de la curva bajo la forma

$$F_m(x, y)+F_{m-1}(x, y)+F_{m-2}(x, y).....+\text{etc.}=0,$$

en la cual F_m representa la suma de los términos del grado m; F_{m-1}, la de todos los del $m-1$, y así los demas.

Sustituyendo en vez de y su igual cx, todos los términos de F_m contendrán el factor x^m; todos los del F_{m-1}, el x^{m-1}, y así los demas; de modo que, dividiendo por x^m, resultará

$$F_m(1, c)+\frac{1}{x}F_{m-1}(1, c)+\frac{1}{x^2}F_{m-2}(1, c).....+\text{etc.}=0.$$

Si hacemos x igual al infinito, la razon c se reducirá á su límite a; y como todas las funciones de F conservarán valores finitos, desaparecerán todos los términos desde el segundo en adelante, quedando solo

$$F_m(1, a)=0 \qquad [1],$$

de donde sacarémos el valor de a.

Vemos, pues, que *para formar la ecuacion que ha de dar el coeficiente angular de la asimtota, hay que tomar la suma de los términos del grado mas elevado* m *que haya en la ecuacion de la curva, sustituir en todos ellos*, 1 *en vez de* x, y a *en lugar de* y, *é igualar á cero el resultado de esta sustitucion.*

118. Representando por β el valor variable de $y-ax$, de la ecuacion $y-ax=\beta$ sacarémos $y=ax+\beta$, y poniendo este valor en vez de y en la ecuacion de la curva, y haciendo los desarrollos por los métodos que ya conocemos, resultará

$$\left.\begin{array}{l}F_m(x, ax)+F'_m(x, ax).\beta+\frac{1}{2}F''_m(x, ax)\beta^2+\text{etc.}\\ \qquad +F_{m-1}(x, ax)\ +F'_{m-1}(x, ax)\beta+\text{etc.}\\ \qquad\qquad +F_{m-2}(x, ax)\ +\text{etc.}\end{array}\right\}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

habiéndose formado todas las derivadas con relacion á y, antes de sustituir ax por y.

Como todos los términos de F_m contienen el factor comun x^m; todos los de F'_m y los de F_{m-1} el x^{m-1}; los de F''_m, de F'_{m-1} y de F_{m-2} el x^{m-2}; y así diríamos de todos los demás: poniendo á la vista estos factores comunes, podrémos escribir

$$F_m(1, a).x^m+\left.\begin{array}{l}F'_m(1, a)\beta\\ +F_{m-1}(1, a)\end{array}\right| x^{m-1}+\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}F''_m(1, a)\beta^2\\ +F'_{m-1}(1, a)\beta\\ +F_{m-2}(1, a)\end{array}\right| x^{m-2}+\text{etc.}=0.$$

Segun la ecuacion que sirvió para determinar a, debe ser cero el término $F_m(1, a)$; luego suprimiéndole y dividiendo por x^{m-1}, podrémos poner

$$F'_m(1, a)\beta+F_{m-1}(1, a)+\frac{1}{x}\{\tfrac{1}{2}F''_m(1, a)\beta^2+F'_{m-1}(1, a)\beta$$
$$+F_{m-2}(1, a)\}+\ldots\ldots=0,$$

en la que se han omitido todos los términos que tienen x en el denominador.

Haciendo $x=\infty$, tomará β su valor límite, que es b; desaparecerán todos los términos que tengan x en el denominador y resultará

$$F'_m(1, a)b+F_{m-1}(1, a)=0 \qquad (2),$$

de donde sacarémos el valor de b correspondiente al que se haya elegido para a.

Esto nos hace ver que, *para formar la ecuacion de donde se ha de sacar el valor de la ordenada en el orígen correspondiente á la asímtota, hay que tomar la derivada con relacion á* a *del primer miembro de la ecuacion que haya servido para determinar este coeficiente angular; multiplicar esta derivada por* b; *añadir al producto la suma de todos los términos del grado* m—1, *sustituyendo en ellos* 1 *en vez de* x, *y* a *en vez de* y, *y despues igualar el resultado á cero.*

119. Presentarémos como ejemplo la ecuacion

$$y^3+xy^2-2x^2y-xy-x^2+1=0.$$

La ecuacion (1) se reduce para este caso á

$$a^3+a^2-2a=0,$$

y de ella resultan $\qquad a=0,\ \ a=1,\ \ y\ \ a=-2.$

La ecuacion (2) es ahora

$$(3a^2+2a-2)b-a-1=0,\ \text{ y de esta sale }\ b=\frac{a+1}{3a^2+2a-2}$$

Haciendo $\qquad a=0,$ hallarémos $b=-\frac{1}{2}$;

si $\qquad a=1,\qquad b=+\frac{2}{3}$;

y cuando $\qquad a=-2,\qquad b=-\frac{1}{6}$;

por consiguiente, son tres las asíntotas, y están representadas por las ecuaciones respectivas

$$y=-\tfrac{1}{2},\ \ y=x+\tfrac{2}{3}\ \text{ é }\ y=-2x-\tfrac{1}{6}.$$

120. Si a fuese una raiz doble de la ecuacion (1), reduciria á cero la primera derivada $F'_m(1,a)$; luego el valor correspondiente de b dado por la ecuacion (2) seria infinito, y no habria asímtota.

Sirva de ejemplo la ecuacion

$$y^3-2xy^2+x^2y-2xy-x^2+3=0.$$

La ecuacion (1) se convierte en $a^3-2a^2+a=0$, que da $a=0$ y $a=1$, siendo doble la segunda raiz.

La ecuacion (2) es, para este ejemplo,

$$(3a^2-4a+1)b-2a-1=0,\ \text{ y de ella resulta }\ b=\frac{2a+1}{3a^2-4a+1}$$

Al valor $\qquad a=0$ corresponde $b=1$,

al $\qquad a=1,\qquad b=\infty$;

luego no hay mas que una asímtota, que tiene por ecuacion $y=1$.

121. Si el valor de a que reduce á cero á $F_m(1,a)$ y $F'_m(1,a)$ anulase tambien á $F_{m-1}(1,a)$, no podriamos sacar nada de la ecuacion (2); pero en este caso, suprimiendo los términos que se destruyen por si mismos, podriamos dividir solamente por x^{m-2}, en vez de dividir por x^{m-1}; y haciendo en seguida $x=\infty$, quedaria para determinar b la ecuacion de segundo grado

$$\tfrac{1}{2}F''_m(1,a)b^2+F'_{m-1}(1,a)b+F_{m-2}(1,a)=0.$$

Por consiguiente, á un mismo valor de a corresponderian dos de b, y si estos fueran reales y finitos, tendria la curva dos asímtotas paralelas á una misma direccion.

Si los términos de esta ecuacion de segundo grado en b desapareciesen por sí mismos, habria que pasar á los siguientes, y quedaria dado b por una ecuacion de tercer grado, y así sucesivamente. No nos entretendrémos en dar ejemplos de este caso completamente escepcional.

122. Aunque se encuentre para a un valor real, y el correspondiente de b sea tambien real y finito, no por esto se ha de decir de un modo absoluto que la ecuacion $y=ax+b$ represente una asímtota de la curva, porque puede muy bien suceder que esta recta forme parte del lugar. Para asegurarse de ello se dividirá el primer miembro de la ecuacion de la curva por $y-ax-b$.

Sea, por ejemplo, la ecuacion $y^3-xy^2-2xy+2x^2=0$, de la cual resultará

$$a^3-a^2=0, \quad \text{de donde} \quad a=0 \quad \text{y} \quad a=1,$$

y, segun lo dicho,

$$(3a^2-2a)b-2a+2=0, \quad \text{y de aquí} \quad b=\frac{2a-2}{3a^2-2a}.$$

Haciendo

$$a=0, \quad \text{tendrémos} \quad b=\infty,$$
$$a=1, \qquad\qquad b=0;$$

por lo tanto, no hay que tener en cuenta mas que una ecuacion, $y=x$. Pero dividiendo el primer miembro de la ecuacion propuesta por $y-x$, resultará el cociente exacto y^2-2x; luego el lugar geométrico se compondrá de la curva que tiene por ecuacion $y^2-2x=0$, y de la recta $y=x$.

El método que sirve para hallar las asímtotas rectilíneas, debia dar esta recta, porque se la puede considerar que es asímtota de sí misma.

Esta observacion que acabamos de hacer se aplica particularmente al caso en que el lugar no se componga mas que de rectas: el método de las asímtotas da todas estas rectas, y sirve para descomponer el primer miembro de una ecuacion algebráica con dos variables en factores de primer grado, siempre que sea posible esta descomposicion.

123. Para terminar lo que tenemos que decir sobre las asímtotas, nos falta hacer aplicacion de este método á las curvas de segundo grado.

Siendo la ecuacion de estas curvas

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0;$$

tendrémos para determinar a la ecuacion

$$Aa^2+Ba+C=0 \qquad [4],$$

cuyas raices no pueden ser reales sino en el caso de que

$$B^2-4AC>0 \quad \text{ó de que} \quad B^2-4AC=0$$

Para determinar b, tendrémos la ecuacion

$$(2Aa+B)b+Da+E=0 \qquad [5],$$

De la [4] sacarémos $a=\dfrac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$;

y sustituyendo en [5], resultará

$$b=-\frac{D}{2A}\pm\frac{BD-2AE}{2A\sqrt{B^2-4AC}}.$$

Téngase presente que en estos valores de a y de b hay que tomar á un mismo tiempo los signos superiores ó los inferiores.

I. Cuando sea $B^2-4AC>0$, son estos valores reales y finitos; y la curva tiene dos asimtotas, cuyas ecuaciones son

$$y=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}x-\frac{D}{2A}\pm\frac{BD-2AE}{2A\sqrt{B^2-4AC}},$$

ó $$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\left(x\sqrt{B^2-4AC}+\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}\right) \qquad [6].$$

Hay un medio mnemónico muy sencillo para hallar estas ecuaciones, y es el siguiente: se resuelve con relacion á y la ecuacion de la curva; en la cantidad sub-radical se sustituye, en vez del término independiente de x, otro que haga cuadrado perfecto al trinomio en x, y estrayendo la raiz, se vuelven á hallar los valores de y dados por las ecuaciones anteriores.

Para que sirva de ejemplo, tomarémos la ecuacion

$$4y^2-8xy+3x^2-4y+6x-4=0$$

de la que sacarémos $$y=x+\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2-2x+5}.$$

Sustituyendo $+1$ en vez de $+5$ debajo del radical, quedará transformado el trinomio en un cuadrado perfecto; y estrayendo su raiz cuadrada, resultará

$$y=x+\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}(x-1).$$

que son las ecuaciones de las asímtotas, y separando una de otra, quedará cada una espresada respectivamente por

$$y=\tfrac{3}{2}x \quad \text{é} \quad y=\tfrac{1}{2}x+1.$$

124. II. Cuando $B^2-4AC=0$, toma b valores infinitos, y, por consiguiente, no hay asimtotas, ó bien, si quiere decirse así, las hay, pero colocadas á una distancia infinita.

Observacion. Cuando se verificasen simultáneamente $B^2-4AC=0$ y $BD-2AE=0$, en cuyo caso la ecuacion propuesta representaria dos paralelas

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{D^2-4AF},$$

se reduciria á cero independientemente de b el primer miembro de la ecuacion (5); es decir, que nos hallariamos en el caso de que viene dado b por una ecuacion de segundo grado (**121**). Esta ecuacion seria

$$Ab^2+Db+F=0, \quad \text{de la que sale} \quad b=-\frac{D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{D^2-4AF}.$$

Por consiguiente, las ecuaciones de las dos asimtotas serán

$$y=-\frac{B}{2A}x-\frac{D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{D^2-4AF},$$

y estas asimtotas son en realidad las dos paralelas representadas por la ecuacion de segundo grado, como debiamos prever recordando la observacion del núm. 122.

§ IV. — Centros.

125. *Centro* de una curva es el punto que goza de la propiedad de que toda secante que pase por él corta á la curva en otros dos equidistantes de aquel.

126. La determinacion del centro de una curva se funda en el siguiente teorema:

Cuando una curva tiene por centro el origen de las coordenadas no cambia su ecuacion, aun cuando se ponga en ella, en vez de x, −x, *y en vez de* y, −y; *y recíprocamente si una ecuacion no cambia poniendo* −x *en vez de* x, *y* −y *en vez de* y, *la curva que representa tiene por centro el origen.*

Concíbase una curva que tenga por centro el orígen O de las coordenadas (fig. 59), y que M (x, y) sea un punto de esta curva: uniendo este punto con el centro y prolongando la recta OM en una cantidad OM' = OM, el punto M' tendrá por coordenadas $-x$ y $-y$; y como el punto M' pertenece á la curva, en virtud de la definicion que hemos dado del centro, la ecuacion de esta deberá quedar satisfecha por las coordenadas $-x$ y $-y$, lo que demuestra la primera parte del teorema.

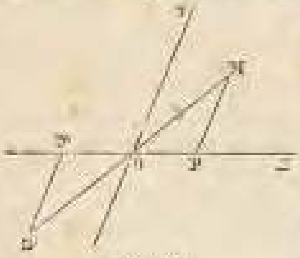


Fig. 59.

Para demostrar la segunda, supongamos que M (x, y) y M' $(-x, -y)$ sean dos puntos de la curva; y como los dos triángulos MOP y M'OP' son iguales por tener un ángulo igual comprendido entre dos lados tambien iguales, tendrá que ser OM' la prolongacion de OM; el punto O quedará en medio de MM'; y como lo que se dice de esta cuerda queda dicho de todas, pues la MM' es una cualquiera de la curva, el orígen de las coordenadas sirve de punto medio á todas las cuerdas que pasan por él, que es lo que faltaba demostrar.

Corolario. Para que una curva algebráica esté referida á unos ejes que pasen por su centro, es necesario y suficiente que todos los términos de su ecuacion sean de una misma *paridad*; es decir, que todos sean de grado par ó todos de grado impar. En este último caso es preciso que la ecuacion no tenga término constante, y el centro se halla sobre la misma curva.

127. Cuando la curva no tenga su centro en el orígen de las coordenadas, puede tenerle en otro punto; y para determinarle se transporta á los ejes paralelamente á sí mismos hasta que el orígen pase por un punto indeterminado (x_1, y_1), y se ve si existen valores de x_1 é y_1 capaces de hacer que la ecuacion de la curva referida á estos nuevos ejes no cambie cuando se ponga en ella $-x$ en vez de x, y $-y$ en lugar de y. Si no hay valores de x_1 é y_1 que satisfagan á esta condicion, se puede asegurar que la curva no tiene centro; pero si los hay, tendrá tantos centros como pares de valores reales y finitos puedan admitir x_1 é y_1. Cuando las curvas de que se trate sean algebráicas, se determina x_1 é y_1 igualando á cero los coeficientes de aquellos términos de la ecuacion transformada que no sean de la misma paridad que el grado de esta.

Observacion. En caso de que una curva algebráica dotada de un solo centro tenga asíntotas, pasarán precisamente por el centro; pues tomando el centro por orígen de las coordenadas se reduce á cero la suma de todos los términos del grado $m-1$, y en su consecuencia las ordenadas correspondientes en el orígen á las asíntotas son iguales á cero (118).

128. Sea $y=\cos x$, que es la ecuacion de la cosinusóide. Poniendo en ella $y+y_1$ en vez de y, y $x+x_1$ en lugar de x, resulta

$$y+y_1=\cos x\cos x_1-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} x_1;$$

como para que esta ecuacion no cambie, aunque se ponga $-x$ en vez de x, y $-y$ en vez de y, se necesita que sean

$$y_1=0,\quad \cos x_1=0;\quad \text{y, por lo tanto, que}\quad x_1=2K\pi\pm\frac{\pi}{2},$$

debemos decir que la cosinusóide tiene una infinidad de centros colocados todos en el eje de las x, siendo constante la distancia que separa á cada centro de su anterior.

Teoremas para demostrar. I. *Cuando una curva tiene dos centros, tiene otra infinidad colocados todos á iguales distancias sobre la recta que une aquellos dos.*

II. *Cuando una curva tiene tres centros que no están en línea recta, tiene otra infinidad, colocados en las intersecciones de la curva, con dos sistemas de rectas paralelas y equidistantes.*

III. *Las curvas algebráicas no pueden tener mas que un centro.*

La demostracion de este último teorema resulta inmediatamente de los dos anteriores, que se plantean con facilidad por medio de la Geometría; mas tambien se puede demostrar directamente, haciendo ver que, entre los coeficientes de la ecuacion transformada que hay que igualar á cero, existen siempre dos que son de primer grado con relacion á las coordenadas del centro.

§ V. — Diámetros.

129. Se llama *diámetro* de una curva el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas paralelas á una misma direccion.

Las ecuaciones de los diámetros de una curva del grado m son, por lo general, del $\frac{m(m-1)}{2}$; pues una curva del grado m puede quedar cortada por una recta en m puntos; y combinados estos de dos en dos, dan $\frac{m(m-1)}{2}$ cuerdas, y, por consiguiente, otros tantos puntos medios. Esto hace ver que las ecuaciones de los diámetros de una curva son de grado mas elevado que la de esta curva, escepto en las de segundo grado, cuyos diámetros tienen las ecuaciones de primer grado, y son, por consiguiente, rectas.

130. Hay varios métodos para deducir de la ecuacion de una curva las de sus diámetros, pero únicamente darémos á conocer el mas sencillo.

Suponiendo que la curva tenga por ecuacion $f(x, y) = 0$, propongámonos buscar la del diámetro que divida en dos partes iguales á todas las cuerdas que sean paralelas á la recta $y = mx$. Todas estas cuerdas tienen por ecuacion

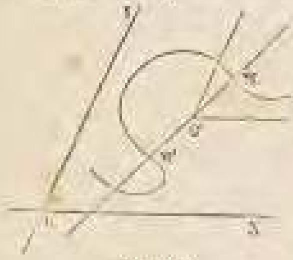


Fig. 60.

$$y = mx + n,$$

siendo n un parámetro variable; de modo que podemos considerar que una de ellas es la MM' (fig. 60).

Trasladando el orígen de las coordenadas al punto O' (x_1, y_1), medio de la cuerda MM', para lo que pondrémos $x + x_1$ en vez de x, é $y + y_1$ en vez de y, la ecuacion de la curva se transformará en

$$f(x + x_1, y + y_1) = 0 \qquad [1];$$

y como la recta MM' pasa ahora por el nuevo orígen y forma con el eje de las x el mismo ángulo que formaba con el antiguo, tendrá por ecuacion

$$y = mx \qquad [2].$$

Las nuevas coordenadas de los puntos M y M' deben ser iguales y de signo contrario; de modo que si eliminamos y entre las ecuaciones [1] y [2], la resultante

$$f(x + x_1, mx + y_1) = 0$$

ha de tener dos raices iguales y de signo contrario, por ser las abscisas de los puntos en que la recta MM' corta á la curva.

Sea $\varphi(x_1, y_1, m) = 0$ la relacion entre las coordenadas x_1, y_1 del medio de la cuerda, y el coeficiente angular m, la que espresa esta condicion: como esta relacion es independiente del parámetro n, que únicamente varia con la posicion de la cuerda será la ecuacion del diámetro.

OBSERVACION. En vez de espresar que una ecuacion algebráica y entera $F(x)=0$ tiene dos raices iguales y de signo contrario es mas conveniente demostrar que las dos ecuaciones $F(x)=0$ y $F(-x)=0$ tienen dos raices comunes; pues estas últimas equivalen á las

$$F(x)+F(-x)=0 \quad \text{y} \quad F(x)-F(-x)=0,$$

de las que la primera no contiene mas que los términos de grado par, y la segunda los de impar de la ecuacion propuesta, por lo que la segunda será siempre divisible por x.

131. Diámetros rectilíneos. —Estos son los únicos que importa considerar en la discusion de las curvas. Para que una curva tenga diámetros rectilíneos, es preciso que haya valores de m que hagan que el primer miembro de la ecuacion general de los diámetros de la curva pueda contener factores lineales; mas como la determinacion de estos valores de m es por lo general impracticable, por la dificultad de los cálculos, se emplea otro método que vamos á indicar.

Suponiendo que una curva tenga un diámetro rectilíneo, tomándole por eje de las x, y por el de las y una paralela á las cuerdas que el diámetro ha de dividir en dos partes iguales, á cada abscisa corresponderán dos ordenadas de la curva iguales y de signo contrario; de modo que la ecuacion de la curva no cambiará, aunque se ponga en ella $-y$ en vez de y. Recíprocamente, si esta ecuacion no cambia, aunque se ponga $-y$ por y, es prueba de que el eje de las x es un diámetro que divide en dos partes iguales á todas las cuerdas paralelas al de las y. Bajo este supuesto, para hallar los diámetros rectilíneos de una curva representada por la ecuacion $f(x,y)=0$, se sustituirán en esta los valores (58)

$$x=x_1+\frac{x'\operatorname{sen}(\theta-\alpha)+y'\operatorname{sen}(\theta-\alpha')}{\operatorname{sen}\theta}, \quad y=y_1+\frac{x'\operatorname{sen}\alpha+y'\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\theta},$$

y se verá si hay valores de x_1, y_1, α y α' que hagan que la ecuacion transformada no cambie cuando se sustituya $-y$ en vez de y. Cuando tales valores existan, tendrá la curva diámetros rectilíneos, y se conocerá un punto de estos y su direccion. Sin embargo, como puede hallarse el nuevo orígen en cualquier punto del diámetro, quedarán indeterminados los valores de x_1 é y_1, y vendrán dados por una ecuacion de primer grado, que no será otra que la ecuacion misma del diámetro rectilíneo.

132. Ejes, vértices. — Se llama *eje* de una curva á todo diámetro rectilíneo que sea perpendicular á las cuerdas que divida en dos partes iguales. Los estremos de los ejes se llaman *vértices* de la curva.

Para hallar los ejes de una curva se puede buscar, por el método precedente, sus diámetros rectilíneos, suponiendo que $\alpha' - \alpha = 90°$.

133. Diámetros conjugados. — Así se llaman dos diámetros rectilíneos de una curva cuando cada uno divide en dos partes iguales á las cuerdas paralelas al otro.

Cuando una recta es paralela á las cuerdas que un diámetro rectilíneo divide en dos partes iguales, se dice que es *conjugada* con la direccion de este diámetro, y recíprocamente.

Cuando una curva está referida á dos de sus diámetros conjugados, no varía su ecuacion cuando se cambia el signo de una de las coordenadas, ni aun variando los signos de las dos; y recíprocamente, cuando esto se verifica, los ejes coordenados se pueden llamar diámetros conjugados de la curva.

134. TEOREMAS PARA DEMOSTRAR. I. *Cuando la ecuacion de una curva no cambia, ó cuando sus términos no hacen mas que cambiar de signo al sustituir x por y é y por x, la bisectriz del primero y tercer ángulo que forman los ejes coordenados es un eje de la curva.*

II. *Cuando la ecuacion no cambia, ó cuando únicamente cambian de signo sus términos al poner −y en vez de x y −x por y, la bisectriz del segundo y cuarto ángulo que forman los coordenados es un eje de la curva.*

III. *Cuando una curva algébrica está cortada por una série de secantes paralelas, y sobre cada una de estas se determina el centro de las distancias medias de los puntos de interseccion reales ó imaginarios, todos estos centros están en línea recta.*

CAPÍTULO VI.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON DOS VARIABLES

§ I. — Discusion de la ecuacion general de segundo grado con dos variables.

135. Clasificacion de las líneas de segundo órden en tres géneros. — La ecuacion mas general de segundo grado con dos variables tiene la forma

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \qquad (1).$$

Resolviéndola con relacion á y, suponiendo que no sea cero el coeficiente A, resulta

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF}.$$

Construyamos primeramente la recta que tiene por ecuacion

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \qquad (2).$$

Para hallar las ordenadas correspondientes á la línea representada por la ecuacion (1), no hay mas que añadir ó quitar á cada ordenada de la recta (2) el valor que tome la espresion

$$\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF} \quad (3),$$

cuando se ponga por x el valor correspondiente de la abscisa. La recta (2), que divide en dos partes iguales á cada una de las cuerdas paralelas al eje de las y, es un diámetro del lugar que la ecuacion (1) representa.

Para hallar la forma de este lugar hay que discutir la espresion (3); es decir, hay que examinar en qué se convierte el trinomio colocado debajo del radical cuando se va dando á x diferentes valores.

Recordemos antes de todo que, cuando se tiene un polinomio entero respecto de x ordenado con relacion á las potencias decrecientes de esta variable, es siempre posible dar á x un valor positivo y otro negativo que hagan que el valor de todo el polinomio tenga el mismo signo que su primer término, y que, á partir de estos, cuando x varíe hasta $\pm\infty$, se conserve constante el signo del polinomio. En virtud de esto, para discutir la espresion (3), que representarémos por Y, irémos suponiendo sucesivamente que $B^2-4AC<0$, que $B^2-4AC>0$, y, finalmente, que $B^2-4AC=0$.

136. Supongamos que $B^2-4AC<0$. Resulta del teorema de álgebra que acabamos de recordar que para todos los valores de x, á partir de un cierto límite hasta $+\infty$, y para todos los que pueda tomar la misma x desde otro cierto límite hasta $-\infty$, conservará el trinomio sub-radical el mismo signo que su primer término; y como el coeficiente de este término es negativo, y x^2 positivo, este trinomio se conservará negativo por todos aquellos valores de x, resultando imaginarios los de Y. Por consiguiente, el lugar geométrico representado por la ecuacion (1) está limitado, tanto por el lado de las x positivas como por el de las negativas. Además, como Y se conserva finito por cualquier valor finito de x, dicho lugar tambien está limitado hácia un lado y otro del diámetro (2). Las líneas de segundo órden limitadas en todos sentidos toman el nombre de *elipses*.

137. Si $B^2-4AC>0$, el trinomio se conserva positivo por todos los valores que se den á x desde un cierto límite hasta $+\infty$, y desde otro cierto límite hasta $-\infty$; por consiguiente, los valores que irán correspondiendo á Y serán reales y crecientes hasta el infinito. El lugar representado por la ecuacion (1) se estiende indefinidamente, tanto por el lado de las x positivas como por el de las negativas, y tanto por encima como por debajo del diámetro (2). Las líneas de segundo órden que se estienden indefinidamente en todos sentidos reciben el nombre de *hipérbolas*.

138. Cuando $B^2-4AC=0$, tendrémos

$$Y=\frac{1}{2A}\sqrt{2(BD-2AE)x+D^2-4AF},$$

en cuya fórmula se ve que, si $BD-2AE>0$, la cantidad que hay debajo del radical permanecerá positiva siempre que se den á x valores que desde un cierto límite vayan creciendo hasta $+\infty$. Por consiguiente, Y va aumentando indefinidamente cuando aumenta x, y la ecuacion (1) representa un lugar geométrico que se estiende indefinidamente por el lado de las x positivas desde un cierto límite, tanto por encima como por debajo del diámetro (2).

Si $BD - 2AE < 0$, el lugar geométrico se va estendiendo indefinidamente hácia el lado de las x negativas desde un cierto límite, tanto por encima como por debajo del diámetro [2].

Las líneas de segundo órden que se estienden indefinidamente, pero nada mas que en un sentido, llevan el nombre de *parábolas*.

139. Casos particulares. — La clasificacion que precede de las líneas de segundo órden está basada en la consideracion del signo que afecte al binomio $B^2 - 4AC$, binomio que depende únicamente de los coeficientes de los términos de segundo grado que entran en la ecuacion [1], y supone que A es diferente de cero: además, no hemos hecho hipótesis alguna sobre los coeficientes B y C. Para completar esta clasificacion vamos á examinar los casos particulares que pueden ocurrir.

Supongamos $A = 0$ y $B^2 - 4AC > 0$, lo que exige que $B \gtreqless 0$, y hagamos las dos hipótesis $C \gtreqless 0$, y despues la de que $C = 0$.

Sea $C \gtreqless 0$; y como se puede cambiar de nombre á los ejes equivale este caso particular á suponer que $C = 0$ y $A \gtreqless 0$; pero entonces, resolviendo la ecuacion [1] con relacion á y, resulta B^2 para el coeficiente que lleva x^2 debajo del radical; lo que hace ver que el lugar representado por la ecuacion es, en este caso particular, una hipérbola.

Si $C = 0$, la ecuacion será de la forma

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0 \qquad [4],$$

que no siendo ya de segundo grado con relacion á ninguna de las dos variables, no se puede discutir del modo que lo hemos hecho. Resolviéndola primeramente con relacion á x y despues con relacion á y, hallarémos sucesivamente

$$y = -\frac{Ex + F}{Bx + D} \quad \text{y} \quad x = -\frac{Dy + F}{By + E},$$

de donde resulta que á cada valor real de x corresponde otro real de y, y recíprocamente; por lo tanto, el lugar geométrico representado por la ecuacion [4] se estiende indefinidamente en todos sentidos y representa una hipérbola.

Dejamos al lector el cuidado de continuar la discusion de los casos particulares; pues ya tendrémos ocasion de volvernos á ocupar de ellos al discutir separadamente cada género de las curvas de segundo grado.

140. Género elipse caracterizado por $B^2-4AC<0$. — Sea EF (fig. 61) el diámetro representado por la ecuacion (2). Para

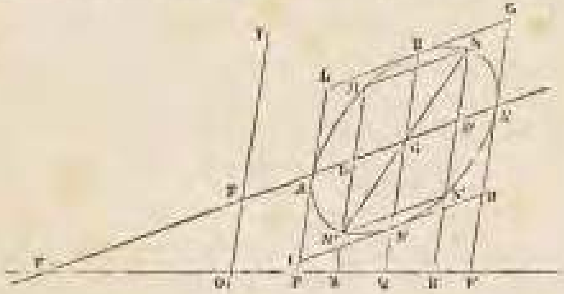


Fig. 61.

discutir Y, descompongamos el trinomio colocado debajo del radical en dos factores de primer grado con relacion á x, lo que dará

$$Y=\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)(x-x')(x-x'')},$$

en que x' y x'' representan las raices del trinomio; y tendrémos que examinar tres casos.

1.° *Cuando las raices* x' *y* x'' *sean reales y desiguales*, haciendo $x=x'=OP$ ó $x=x''=OP'$, resulta $Y=0$; luego las ordenadas de la curva correspondientes á estas abscisas son iguales á las del diámetro, y, por consiguiente, x' y x'' serán las abscisas de los puntos A y A' en que la curva corta al diámetro.

Dando á x cualquier valor menor que x' ó mayor que x'', resultará negativo el del trinomio ó imaginario el de Y; y, por el contrario, dando á x valores que estén comprendidos entre x' y x'', se conservará positivo el trinomio y reales los valores de Y. La curva queda, pues, comprendida entre las dos rectas AP y AP' paralelas al eje de las y.

Como el valor de Y se reduce á cero cuando $x=x'$ y cuando $x=x''$, tiene que pasar en este intermedio por un *máximo*. Este máximo corresponde al del valor absoluto del producto

$$(x-x')(x''-x);$$

el cual tiene lugar cuando $x=\dfrac{x'+x''}{2}$, pues la suma de los dos factores $x-x'$ y $x''-x$ es igual á la cantidad constante $x''-x'$. Vemos, pues, que el *máximo* valor de Y corresponde á la abscisa media $\frac{x'+x''}{2}$, que es la del punto Q medio de PP'. Si B' y B son los puntos de la curva correspondientes á este valor máximo de Y, y por ellos tiramos LG é IH paralelas al diámetro EF, quedará la curva comprendida entre estas dos paralelas; y como hemos visto que tambien lo está entre las AP y AP', queda toda en el paralelógramo LGHI.

El punto C en que la ordenada máxima corta al diámetro es un centro de la curva, como se podria demostrar buscando las coordenadas del centro por medio de la ecuacion de la curva; pero tambien puede hacerse directamente. Para esto observarémos que Y conserva el mismo valor cuando $x=\frac{x'+x''}{2}+h$ y cuando $x=\frac{x'+x''}{2}-h$, de lo que resulta que, tomando á uno y otro lado del punto Q las longitudes QR = QR' = h, se tendrá MD = DM' = ND' = D'N'. En virtud de esto, si tiramos las rectas CN y CM', serán iguales los dos triángulos ND'C y M'DC, y, por lo mismo CN = CM' y DCM' = NCD'; y como de la igualdad de estos ángulos resulta que CM' es prolongacion de CN, el punto C, medio de la cuerda NM', es centro de la curva. El cuadrilátero MND'D es un paralelógramo por tener los lados ND' y MD iguales y paralelos, y, por consiguiente, MN será paralelo al diámetro AA'; y una vez que BB' divide en dos partes iguales á DD' en el punto C, tambien dividirá á MN en dos partes iguales. Dividiendo la recta BB' en partes iguales á todas las cuerdas paralelas al diámetro AA', es tambien un diámetro de la curva y diámetro *conjugado* del AA'.

Por último, la curva es tangente á los lados del paralelógramo LGHI en los puntos A, A', B y B', lo cual resulta de que una curva de segundo órden no puede quedar cortada por una recta mas que en dos puntos (60), y de que se puede considerar que los cuatro lados del paralelógramo son los límites de las secantes que, habiendo girado cada una alrededor de uno de los puntos de su interseccion con la curva, se ha confundido el otro con este. Tambien se puede demostrar buscando el valor del coeficiente angular de la tangente en cada uno de aquellos cuatro puntos.

Resulta de esta discusion que la curva de que nos vamos ocupando tiene la forma que representa la figura 61.

EJEMPLO. Sea la ecuacion

$$4y^2-4xy+2x^2-8y-2x+9=0,$$

que dará

$$y=\tfrac{1}{2}x+1\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-(x-1)(x-5)}.$$

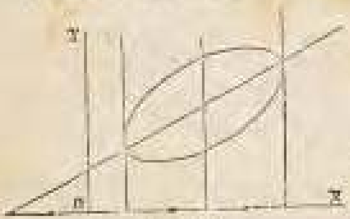


Fig. 62.

Segun lo dicho anteriormente, el diámetro de la curva será $y=\frac{1}{2}x+1$; estará toda ella comprendida entre las rectas $x=1$ y $x=5$; el mayor valor de Y corresponderá á $x=3$, y será $Y=1$. Las coordenadas del centro serán $x=3$, $y=\frac{5}{2}$, y la curva tendrá la forma y posicion de la figura 62.

141. 2.° *Cuando las raices* x′ *y* x″ *sean reales é iguales* se podrá escribir el valor de Y bajo la forma

$$Y=\frac{1}{2A}(x-x')\sqrt{B^2-4AC},$$

y siendo imaginario el radical, es preciso que sea $x=x'$ para que Y resulte real. Vemos, por lo tanto, que en este caso queda reducido el lugar de la ecuacion (4) al punto único C (fig. 61), y se dice que la elipse se ha reducido a su centro.

EJEMPLO. Sea la ecuacion

$$y^2+4xy+5x^2-2y-10x+10=0,$$

de la que sacarémos $\quad y=-2x+1\pm(x-3)\sqrt{-1},$

cuya ecuacion no admite mas que un sistema de valores reales, que es

$$x=3,\quad \text{que da}\quad y=-5.$$

Por consiguiente, no representa mas que el punto que tiene por coordenadas estos valores.

142. 3.° *Que las raices* x′ *y* x″ *sean imaginarias.* Bajo esta hipótesis, el producto $(x-x')(x-x'')$ permanecerá positivo, cualquiera que sea el valor real que se dé á x; por lo tanto, el trinomio subradical será negativo, é imaginario el valor de Y. En este caso se dice que la ecuacion (4) representa una *elipse imaginaria*, que equivale á decir que no admite dicha ecuacion representacion alguna geométrica, pero que, sin embargo, presenta el carácter general de las elipses.

EJEMPLO. Si tenemos la ecuacion

$$4y^2-8xy+5x^2+4y-3x+2=0,$$

resuelta con relacion á y, tendrá debajo del radical el trinomio

$$-(x^2+x+1).$$

Pero las raices de la ecuacion $x^2+x+1=0$ son imaginarias; luego la propuesta representa una elipse imaginaria

OBSERVACION. En el caso de la elipse no pueden faltar en la ecuacion A ni C; es decir, que no puede ser cero el coeficiente de y^2 ni el de x^2, y, por lo mismo, no puede carecer la ecuacion del cuadrado de ninguna de estas variables.

143. Resúmen. — Reasumiendo cuanto llevamos dicho, dirémos que el género elipse comprende, como variedades suyas, el punto y la elipse imaginaria.

Es evidente que la circunferencia de círculo pertenece al género elipse.

144. Género hipérbola caracterizado por la condicion $B^2-4AC>0$. — Sea EF (fig. 63) el diámetro representado por la ecuacion (2), ó

$$Y=\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)(x-x')(x-x'')},$$

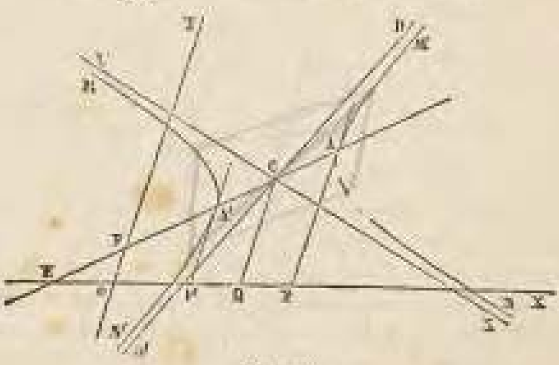


Fig. 63.

en que x' y x'' son las raices que resultan de haber igualado á cero el trinomio colocado debajo del radical.

1.° *Suponiendo que las dos raices x' y x'' sean reales y desiguales*, haciendo $x=x'=OP'$, ó $x=x''=OP$, resulta $Y=0$; luego las ordenadas de la curva correspondientes á estas abscisas son iguales á las del diámetro EF; de modo que en este caso, lo mismo que sucedió en la elipse, las abscisas x' y x'' determinan los puntos A y A′ en que la curva corta al diámetro.

Para que el radical sea real, es preciso que $x-x'$ tenga el mismo signo que $x-x''$, y esto sucederá únicamente cuando se den a x valores menores que x' ó mayores que x''. De aquí se deduce que la curva no tiene punto alguno entre las rectas AP′ y AP paralelas al eje de las y representadas por las ecuaciones $x=x'$ y $x=x''$. Por el contrario, haciendo variar x desde x' á $-\infty$, ó desde x'' hasta $+\infty$, resultan valores reales para Y; luego la curva se compone de cuatro ramas infinitas, dos que arrancan del punto A y otras dos del punto A′.

145. Tirando por el punto Q, medio de P′P, la CQ paralela al eje de las y, y que tiene por ecuacion $x=\frac{x'+x''}{2}$, se podrá demostrar, lo mismo que se hizo en la elipse: 1.° que C es el centro de la curva; 2.° que CQ es un diámetro conjugado con el EF, 3.° que la curva es tangente á las rectas A′P′ y AP en los puntos A′ y A.

146. La hipérbola tiene dos asímtotas; pues las ecuaciones de las que corresponden á las curvas representadas por la ecuacion [1] son [123]

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\left(x\sqrt{B^2-4AC}+\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}\right),$$

y en la curva de que nos vamos ocupando es $B^2-4AC>0$. Esto mismo nos hace ver que ni la elipse ni la parábola pueden tener asímtotas.

Debemos recordar que se hallan estas ecuaciones completando el cuadrado, cuyos dos primeros términos en x están debajo del radical, y sustituyendo este radical por la raiz de aquel cuadrado.

Examinando estas asímtotas podrémos determinar mejor la forma y posicion de la curva. En primer lugar, ya sabemos (**127**, OBSERVACION) que pasan por el centro C; y, con efecto, suponiendo

$$x\sqrt{B^2-4AC}+\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}=0,$$

resulta

$$x = -\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}} = \frac{x'+x''}{2},$$

lo que hace ver que las ordenadas correspondientes á las asimtotas se confunden con la CQ del diámetro.

Supongamos que DD' sea la asimtota representada por

$$Y_1 = -\frac{Bx+D}{2A} + \frac{1}{2A}\left(x\sqrt{B^2-4AC} + \frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}\right),$$

y LL' la que tiene por ecuacion

$$Y_2 = -\frac{Bx+D}{2A} - \frac{1}{2A}\left(x\sqrt{B^2-4AC} + \frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}\right).$$

Comparando las ordenadas de la asimtota DD' con las de la rama AM de la curva, rama cuya ecuacion puede escribirse bajo la forma

$$y = -\frac{Bx+D}{2A}$$

$$+\frac{1}{2A}\sqrt{\left(x\sqrt{B^2-4AC} + \frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}\right)^2 + D^2 - 4AF - \frac{(BD-2AE)^2}{B^2-4AC}}$$

que resulta de completar el cuadrado, cuyos dos primeros términos en x están bajo el radical, verémos que, haciendo variar á x desde x'' hasta $+\infty$, la diferencia $Y_1 - y$ se conserva constantemente positiva, va decreciendo y tiene por límite cero. Por consiguiente, á esta rama de curva sirve de asimtota la recta D'D por el lado de las x positivas, y queda siempre colocada debajo de esta asimtota con relacion al diámetro EF. Comparando igualmente las ordenadas de las otras tres ramas de la curva con las correspondientes á las rectas DD' y LL', reconocerémos que estas últimas son verdaderas asimtotas de la hipérbola, que tendrá la posicion indicada en la figura 63.

Ejemplo. Si tenemos la ecuacion

$$4y^2 - 8xy + 3x^2 + 4y - x + 5 = 0,$$

sacarémos
$$y = x - \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{x^2-3x-4},$$

ó sea
$$y = x - \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(x+1)(x-4)}.$$

Observando esta atentamente, verémos que la curva que representa se estiende indefinidamente en todas direcciones; que ninguno de sus puntos está comprendido entre las

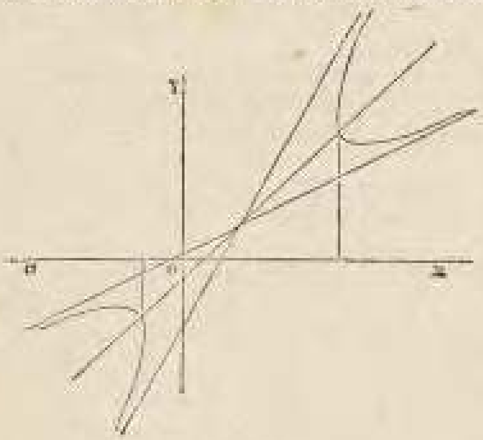


Fig. 64.

paralelas al eje de las y, que tienen por ecuaciones $x=-1$ y $x=4$, y que estas abcisas son las correspondientes á los puntos de interseccion de la curva y su diámetro

Completando el cuadrado sometido al radical y estrayendo su raiz cuadrada, se encuentra

$$y=x+\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}(x-1),$$

que son las ecuaciones de las asímtotas, y que separadas serán

$$y=\tfrac{3}{2}x \quad \text{ó} \quad y=\tfrac{1}{2}x+1.$$

La forma y posicion de la curva están representadas en la figura 64.

147. 2.° *Cuando las raices* x′ *y* x″ *son reales é iguales*, tenemos

$$Y=\frac{1}{2A}(x-x')\sqrt{B^2-4AC},$$

ó
$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}(x-x')\sqrt{B^2-4AC};$$

luego la ecuacion (1) representa en este caso dos rectas reales, que son precisamente las asimtotas DD′ y LL′ que hemos hallado en el anterior. Con efecto, siendo iguales las raices de la ecuacion que resulta igualando á cero la cantidad subradical, se verifica

$$x'=-\frac{BD-2AE}{B^2-4AC},$$

y de aquí que

$$x - x' = x + \frac{BD - 2AE}{B^2 - 4AC},$$

y, por consiguiente,

$$y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\left(x\sqrt{B^2 - 4AC} + \frac{BD - 2AE}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right).$$

OBSERVACIONES. I. Cuando la ecuacion (1) se reduce á las de las asíntotas de la hipérbola, se la puede poner bajo la forma

$$\left(y + \frac{Bx + D}{2A}\right)^2 - \frac{1}{4A^2}\left(x\sqrt{B^2 - 4AC} + \frac{BD - 2AE}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right)^2 = 0,$$

cuyo primer miembro se puede descomponer en dos factores, que igualado cada uno á cero, dan las ecuaciones de las asíntotas.

II. Como estas ecuaciones no dependen del término constante F, resulta que si $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ representan dos rectas que se cortan, la ecuacion

$$(ax + by + c)(a'x + b'y + c') + F = 0$$

representará todas las hipérbolas que tengan por asíntotas aquellas dos rectas.

148. 3.° *Si las raices* x' *y* x'' *son imaginarias*, como se sabe

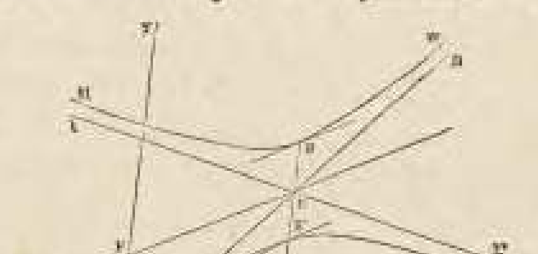


Fig. 65.

que en este caso el producto $(x - x')(x - x'')$ se conserva constantemente positivo, cualquiera que sea el valor real que se dé á x, resulta que Y será siempre real é irá creciendo hasta el infinito, sin que jamás se anule: así es que la curva no encuentra á su diámetro EF, y que Y pasa por un *valor mínimo*, que corresponde á la abscisa $x=\frac{x'+x''}{2}$.

Supongamos que PC (fig. 65) sea la paralela al eje de las y tirada por un punto P tal que $OP=\frac{x'+x''}{2}$, y que B y B′ sean los puntos en que esta paralela corta á la curva: si por estos tiramos dos paralelas al diámetro EF, ningun punto de la curva quedará comprendido entre estas paralelas, y además estas serán tangentes al lugar geométrico.

El punto C es el centro de la curva, como se puede demostrar lo mismo que se hizo en la elipse. Finalmente, si DD′ y LL′ son las asímtotas, comparando sus ordenadas con las correspondientes del lugar geométrico, hallarémos que este tiene la forma y posicion indicadas en la figura 65.

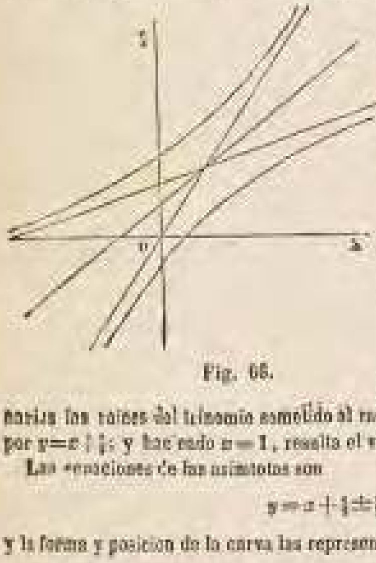


Fig. 66.

EJEMPLO. Sea la ecuacion

$$4y^2-8xy+3x^2-4y+6x-4=0,$$

de la que resulta

$$y=x+\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2-2x+5}.$$

La curva se extiende indefinidamente en todos sentidos: pero siendo imaginarias las raíces del trinomio sometido al radical, no corta al diámetro representado por $y=x+\frac{1}{2}$; y haciendo $x=1$, resulta el valor mínimo de Y, que es $Y=1$.

Las ecuaciones de las asímtotas son

$$y=x+\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}(x-1);$$

y la forma y posicion de la curva las representadas en la figura 66.

149. Casos particulares. — Supongamos que $A=0$, y quedará la ecuacion (1) reducida á la forma

$$Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

que se puede resolver con relacion á x y discutirla como en el caso general, pero que es preferible resolverla con relacion á y.

Haciéndolo, sacarémos

$$y=-\frac{Cx^2+Ex+F}{Bx+D},$$

que verificando la division hasta donde es posible, y llamando $Mx+N$ al cociente y R al residuo, da

$$y=Mx+N+\frac{R}{Bx+D}.$$

Suponiendo $y_1=\frac{R}{Bx+D}$ se ve que, si se construye la recta DD' (figura 67), que tiene por ecuacion $y=Mx+N$, se hallarán los

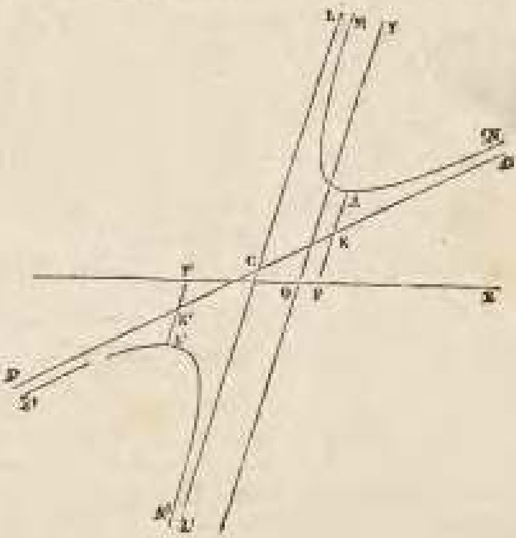


Fig. 67.

puntos del lugar geométrico añadiendo algebraicamente á las ordenadas de aquella recta los valores que vaya tomando y_1 por cada uno de los que se vaya dando á x.

Si $x=OP$ es un valor de la abscisa que haga positivo á y_1, y A el punto correspondiente de la curva, haciendo variar á x desde OP hasta $+\infty$, irá disminuyendo y_1 desde AK hasta cero; por consiguiente, existe una rama AN de la curva que, partiendo del punto A, se estiende indefinidamente por el lado de las x positivas, y que tiene por asimtota D'D. Haciendo que x varie desde $x = \mathrm{OP}$ hasta $x = -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{B}}$, que es el valor que reduce á cero al denominador $\mathrm{B}x + \mathrm{D}$, y_1 variará desde $y_1 = \mathrm{AK}$ hasta $+\infty$; luego si LL' es la paralela al eje de las y, que tiene por ecuacion $x = -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{B}}$, habrá en la curva otra rama AM, á la que servirá de asimtota la recta L'L por el lado de las y positivas.

Si $x = \mathrm{OP}'$ es una abscisa que haga negativo á y_1, y A' el punto correspondiente de la curva, haciendo variar á x desde $x = \mathrm{OP}'$ hasta $x = -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{B}}$, irá y_1 variando desde A'K' hasta $-\infty$; y, por el contrario, variando x desde $x = \mathrm{OP}'$ hasta $-\infty$, variará y_1 desde K'A' hasta cero; luego la curva tiene otras dos ramas infinitas A'N' y A'M', á una de las cuales sirve de asimtota LL', y á la otra DD'.

El punto C en que se cortan las dos asimtotas, es el centro de la curva, como puede demostrarse observando que $x = -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{B}}$ es la abscisa del punto C, y que haciendo $x = -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{B}} \pm h$, resultan iguales y de signo contrario los valores de y_1.

150. La discusion que precede supone que $\mathrm{B} \gtrless 0$. Cuando $\mathrm{B} = 0$, tendríamos

$$y = -\frac{\mathrm{C}x^2 + \mathrm{E}x + \mathrm{F}}{\mathrm{B}x + \mathrm{D}} = \mathrm{M}x + \mathrm{N},$$

y seria
$$(y - \mathrm{M}x - \mathrm{N})(\mathrm{B}x + \mathrm{D}) = 0,$$

que es la ecuacion de las dos asimtotas. Se dice que, en este caso, la hipérbola se ha reducido á sus asimtotas.

151. Cuando $\mathrm{A} = 0$ y $\mathrm{C} = 0$, queda reducida la ecuacion [1] á la forma

$$\mathrm{B}xy + \mathrm{D}y + \mathrm{E}x + \mathrm{F} = 0;$$

y resolviéndola con relacion á y, resulta

$$y = -\frac{\mathrm{E}x + \mathrm{F}}{\mathrm{B}x + \mathrm{D}},$$

que haciendo la division y designando el resto por R, se tiene

$$y = -\frac{E}{B} + \frac{R}{Bx + D}.$$

$\frac{E}{B}$ es const. luego la [illegible] paralela al eje X

Por una discusion análoga en todo á la seguida en el núm. 149 se veria que si $R \gtrless 0$, esta ecuacion representaria una hipérbola

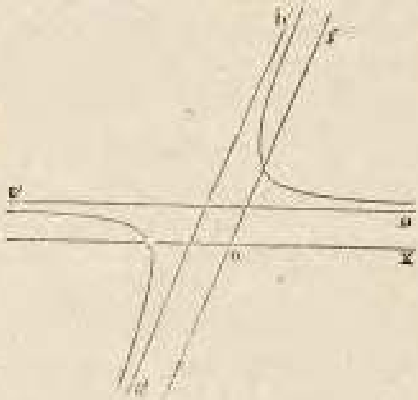


Fig. 68.

que tendria por asimtotas la paralela D'D (fig. 68) al eje de las x representada por la ecuacion $y = -\frac{E}{B}$, y la paralela L'L al eje de las y, cuya ecuacion es $x = -\frac{D}{B}$.

Cuando $R = 0$, la ecuacion representa las dos asimtotas DD' y LL'.

Ejemplos. I. Sirva de tal la ecuacion

$$2xy + x^2 - 2y - 3x - 1 = 0,$$

de la que se saca

$$y = \frac{-x^2 + 3x + 1}{2x - 2} = -\tfrac{1}{2}x + 1 + \frac{3}{2(x-1)}.$$

Esta curva es ilimitada en todos sentidos, y tiene por asimtotas las dos rectas

$$y = -\tfrac{1}{2}x + 1 \quad y \quad x = 1.$$

La figura 69 representa la forma y posicion de esta curva.

II. Si la ecuacion es

$$2xy + x^2 - 2y - 3x + 2 = 0$$

se sacará

$$y = \frac{-x^2 + 3x - 2}{2x - 2} = -\tfrac{1}{2}x + 1,$$

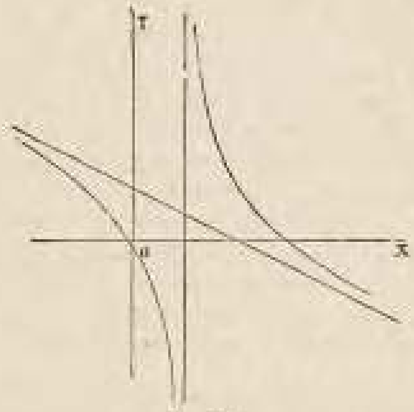


Fig. 69.

y como el cociente es exacto, puede descomponerse el primer miembro de la ecuacion propuesta en dos factores, y se tendrá

$$(y + \tfrac{1}{2}x - 1)(2x - 2) = 0,$$

de donde salen las siguientes ecuaciones

$$y = -\tfrac{1}{2}x + 1 \quad \text{y} \quad x = 1,$$

que son las de dos rectas asíntotas de la curva representada en la figura 69.

152. Resúmen. — El género hipérbola comprende como variedades suyas dos rectas que se cortan.

153. Hipérbola equilátera. — Así se llama la que tiene una de sus asíntotas perpendicular á la otra; y es respecto á las ordinarias lo que el círculo respecto á las elipses.

Como los coeficientes angulares de las asíntotas vienen [123] dados por la ecuacion

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0 \qquad [5],$$

se necesita para que aquellas sean perpendiculares, en el caso de ser rectangulares los ejes, que el producto $\alpha'\alpha''$ de las raices de esta ecuacion sea igual á -1, y esto exige que $A = -C$.

Cuando los ejes sean oblicuos es preciso (75) que

$$1+(a'+a'')\cos\theta+a'a''=0,$$

ó, en virtud de las relaciones $a'+a''=-\dfrac{B}{A}$ y $aa'=\dfrac{C}{A}$,

que $$A+C=B\cos\theta.$$

154. Observaciones acerca de las asimtotas de la hipérbola.— Cuando $A=0$, la ecuacion (5) tiene una raiz infinita, y, por lo tanto, una de las asimtotas es paralela al eje de las y. Si $C=0$, es nula una de las raices y paralela una de las asimtotas al eje de las x. Por consiguiente, cuando falta en la ecuacion de una hipérbola el cuadrado de alguna de las variables, hay una asimtota paralela al eje del mismo nombre que la variable cuyo cuadrado falta: por ejemplo, si falta el término en x^2, una de las asimtotas es paralela al eje de las x; y si faltasen á la vez los cuadrados de las dos variables, las dos asimtotas serian respectivamente paralelas á los ejes.

Cuando juntamente con el cuadrado de una de las variables falte el término de primer grado de la misma, el eje del mismo nombre es asimtota de la curva. En efecto, suponiendo que se tenga simplemente $A=0$, se reduce la ecuacion (1) á

$$Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

que, aplicando el método propio para hallar las asimtotas paralelas al eje de las y, es decir, dividiendo esta ecuacion por y, y haciendo en seguida $y=\infty$, se convierte en

$$Bx+D=0,$$

que es la ecuacion de la asimtota paralela al eje de las y; pero haciendo ahora $D=0$, se reduce esta última ecuacion á $x=0$, que representa el eje de las y. Así es que, si en la ecuacion de una hipérbola faltan los términos en y^2 y en y, el eje de las y es una asimtota de esta curva; por el contrario, si faltasen los términos en x^2 y en x, una de las asimtotas seria el eje de las x. Finalmente, cuando la ecuacion de la hipérbola no contenga mas que el término en xy y el constante, las asimtotas de la curva son los ejes coordenados.

La discusion precedente confirma todas estas observaciones.

155. Género parábola caracterizado por la condicion $B^2-4AC=0$. En este caso, tendrémos

$$Y=\frac{1}{2A}\sqrt{2(BD-2AE)x+D^2-4AF}=\frac{1}{2A}\sqrt{2(BD-2AE)(x-x')},$$

en cuya fórmula representamos por x' el valor de x que reduce á cero el binomio sometido al radical.

Tenemos que considerar tres casos:

1.° $BD-2AE>0$. Si EF (fig. 70) es el diámetro representado por la ecuacion [2], y se hace $x=x'$, resulta $y=0$; luego la ordenada de la curva es la misma que la del diámetro para este valor de x; de modo que si $OP=x'$, el punto A que en el diámetro EF corresponde á esta abscisa será el de interseccion de la curva con este diámetro. Dando á x valores menores que x', resultan imaginarios los correspondientes de Y; por el contrario, dando á x valores crecientes desde x' hasta $+\infty$, se conservan reales los de Y; luego la curva no tiene punto alguno á la izquierda de la recta AP paralela al eje de las y representada por la ecuacion $x=x'$; pero se estiende hasta el infinito por la derecha de esta paralela en el lado de las x positivas, presentando la forma que indica la figura 70.

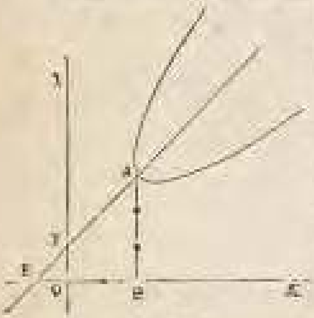


Fig. 70.

Ejemplo. Propondrémos como tal la ecuacion

$$y^2-2xy+x^2-2y+x+3=0,$$

que resuelta con relacion á y, da

$$y=x+1\pm\sqrt{x-2}.$$

La curva corta al diámetro que tiene por ecuacion $y=x+1$ en el punto cuyas coordenadas son $x=2$, $y=3$: ninguno de sus puntos puede hallarse á la izquierda de la paralela al eje de las y representada por $x=2$; pero es ilimitada hácia la parte de las x positivas. Su forma y posicion están representadas en la figura 70.

2.° Si $BD-2AE<0$, la curva no tiene punto alguno á la derecha de la paralela AP (fig. 70) al eje de las y representada por $x=x'$; pero se estiende indefinidamente por el lado de las x negativas.

EJEMPLO. Sea la ecuacion

$$y^2-2xy+x^2-2y+3x-1=0$$

de la que resulta $\qquad y=x+1\pm\sqrt{-x+2}.$

Esta curva corta al diámetro representado por $y=x+1$ en un punto que tiene por coordenadas $x=2$ é $y=3$; ninguno de sus puntos se halla á la derecha de la paralela al eje de las y, que tiene por ecuacion $x=2$; finalmente, es ilimitada en el sentido de las x negativas. En la figura 71 puede verse su forma y posicion.

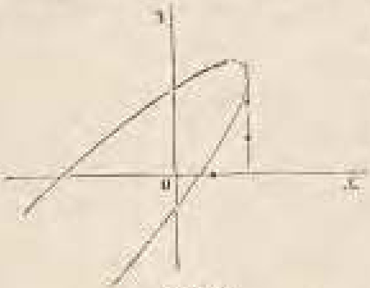


Fig. 71.

3.° Finalmente, si

$$BD-2AE=0,$$

será

$$Y=\frac{1}{2A}\sqrt{D^2-4AE},$$

donde se ve que Y es real, cero ó imaginario, segun que la cantidad sometida al radical sea positiva, cero ó negativa. En el primer caso, la ecuacion (1) representa dos rectas paralelas al diámetro EF; en el segundo, dos rectas que se confunden con este diámetro; en el tercero, no admite dicha ecuacion representacion alguna geométrica, pero es costumbre decir que representa dos paralelas imaginarias.

156. Caso particular. — Suponiendo $A=0$ tendrá que ser tambien $B=0$ para que se verifique la relacion $B^2-4AC=0$, y entonces la ecuacion (1) toma la forma

$$Cx^2+Dy+Ex+F=0 \qquad [6],$$

que da

$$y=-\frac{Cx^2+Ex+F}{D}=-\frac{C}{D}(x-x')(x-x''),$$

en que x' y x'' son las raices de

$$Cx^2+Ex+F=0.$$

Cuando $-\frac{C}{D}$ es positivo, la ecuacion (6) representa la parábola MAN (fig. 72), si las raices x' y x'' son reales y desiguales; la M'A'N', si son reales é iguales; y finalmente, la M''A''N'', si son

[illegible]

imaginarias. Estas tres curvas tienen por diámetro la paralela AA′ al eje de las y, cuya ecuacion es $x=\frac{x'+x''}{2}$.

Si $-\frac{C}{D}$ es negativo, la ecuacion [6] representa tres parábolas

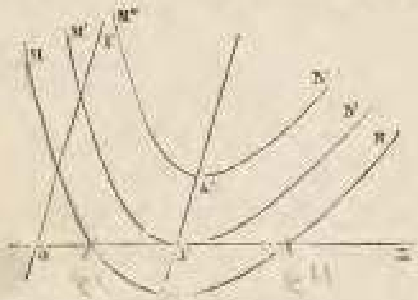


Fig. 72.

iguales á las indicadas en la figura 72, pero teniendo su abertura vuelta hácia las y negativas.

157. Resúmen. — El género parábola comprende como variedades dos rectas paralelas, dos rectas que se confunden en una sola y dos paralelas imaginarias.

158. Aconsejamos á los lectores que reasuman la discusion anterior formando un cuadro que esprese las condiciones á que deben satisfacer los coeficientes de la ecuacion [1]: 1.° para que represente una elipse real, un punto ó una elipse imaginaria; 2.° para que represente una hipérbola que encuentre al diámetro, una que no le encuentre ó dos rectas que se corten; 3.° para que el lugar geométrico sea una parábola, dos rectas paralelas, dos rectas que se confundan en una sola ó dos paralelas imaginarias.

EJEMPLOS. Tambien es conveniente que los lectores se ejerciten en construir las líneas de segundo grado representadas por las ecuaciones siguientes:

$$y^2-4xy+4x^2+2y-3x=0,$$
$$4y^2-4xy+x^2-4x+2y-4=0,$$
$$4y^2-4xy+x^2-4y+2x+1=0,$$
$$4y^2-4xy+x^2-4y+2x+6=0,$$
$$2xy-x^2+4y-4=0,$$
$$xy-x^2-y+1=0,$$
$$y^2-2xy+2x^2-2y+2x-3=0.$$

§ II. — Centro, diámetros y ejes de las curvas de segundo grado.

159. Las curvas de segundo grado, que acabamos de estudiar de un modo general, gozan de numerosas propiedades, cuyo estudio ha sido por mucho tiempo el objeto casi esclusivo de la Geometría analítica de dos dimensiones. Para facilitar este estudio se emplea la ecuacion de cada curva reducida á su mas sencilla espresion; pero estando fundada esta reduccion en las propiedades del centro y los diámetros, debemos principiar por el conocimiento de estas propiedades.

160. Centro. — Volvamos á tomar la ecuacion

$$f(x, y) = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \quad [1].$$

Para que la curva representada por esta ecuacion tenga un centro, es preciso que, tomando este punto por orígen de las coordenadas, desaparezcan todos los términos de primer grado [127]. Sean, por consiguiente, x_1, y_1 las coordenadas del centro: sustituyendo en la ecuacion [1] $x + x_1$ en vez de x, é $y + y_1$ en lugar de y, resulta

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + f_y'(x_1, y_1)y + f_x'(x_1, y_1)x + f(x_1, y_1) = 0 \quad [2].$$

Para que desaparezcan los términos de primer grado es preciso que se verifique

$$f_y'(x_1, y_1) = 0, \quad f_x'(x_1, y_1) = 0,$$

ó que

$$2Ay_1 + Bx_1 + D = 0, \quad By_1 + 2Cx_1 + E = 0 \quad [3].$$

Esto manifiesta que, para hallar las ecuaciones que determinan las coordenadas del centro de las curvas de segundo grado, hay que igualar á cero la derivada del primer miembro de la ecuacion de la curva tomada con relacion á x, y la derivada del mismo tomada con relacion á y, sustituyendo en ellas x_1 é y_1 en vez de x é y.

Resolviendo las ecuaciones [3] se halla

$$x_1 = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \quad y = \frac{BE - 2CD}{B^2 - 4AC}.$$

Como las ecuaciones [3] son compatibles cuando $B^2 - 4AC \gtrless 0$;

es decir, en los casos de la elipse y de la hipérbola, é incompatibles si

$$B^2-4AC=0 \quad y \quad 2AE-BD \gtreqless 0;$$

esto es, en el caso de la parábola, debemos decir que la elipse y la hipérbola tienen centro, y que no le tiene la parábola.

Finalmente, las ecuaciones [2] se reducen á una sola cuando se verifica simultáneamente que

$$B^2-4AC=0 \quad y \quad 2AE-BD=0;$$

y entonces hay una infinidad de centros colocados todos en la recta que tiene por ecuacion $f_y'=0$ ó $f_x'=0$, considerando en estas x_1 é y_1 como coordenadas generales. En este caso, la ecuacion [1] representa dos rectas paralelas.

Observacion. Cuando se considera que x_1 é y_1 son coordenadas generales, las ecuaciones [3] representan dos rectas; y, segun que estas rectas se corten, se confundan en una sola ó que sean paralelas, la curva representada por la ecuacion [1] tendrá un centro único, una infinidad de centros, ó no lo tendrá.

161. Tomando el centro por origen, se reduce la ecuacion [2] á

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+f(x_1, y_1)=0 \qquad [4].$$

Ahora bien; multiplicando la primera de las ecuaciones [3] por y_1, la segunda por x_1, y sumándolas, se hallará

$$2Ay_1^2+2Bx_1y_1+2Cx_1^2+Dy_1+Ex_1=0=2f(x_1, y_1)-Dy_1-Ex_1-2F,$$

de la que resulta

$$f(x_1, y_1)=\frac{Dy_1+Ex_1}{2}+F.$$

Esto hace ver que en la ecuacion [4], que representa todas las elipses é hipérbolas referidas á su centro, así como todas las variedades de estas curvas, el término independiente de las variables es igual al término conocido de la ecuacion primitiva aumentado con la mitad de la suma de todos los de primer grado, habiendo sustituido en ellos las coordenadas del centro en vez de las generales; de modo que designando por $-P$ este término, podrá ponerse la ecuacion [4] bajo la forma

$$Ay^2+Bxy+Cx^2=P.$$

162. Diámetros. — Si $y=mx$ es la ecuacion de una recta paralela á las cuerdas que divide en dos partes iguales el diámetro buscado, estas cuerdas estarán representadas por $y=mx+n$, en que n es un parámetro variable. Trasladando el orígen de las coordenadas al medio de una de ellas, la ecuacion de estas cuerdas se trasformará (130) en

$$y=mx,$$

y la de la curva en

$$f(x+x_1, y+y_1)=0,$$

llamando x_1 é y_1 las coordenadas del nuevo orígen.

La eliminacion de y entre estas dos ecuaciones, dará

$$f(x+x_1, mx+y_1)=0;$$

es decir,

$$(Am^2+Bm+C)x^2+(mf'_y(x_1,y_1)+f'_x(x_1,y_1))x+f(x_1,y_1)=0 \quad [5],$$

que tiene por raices las abscisas correspondientes á los estremos de la cuerda á cuyo medio hemos trasladado el orígen. Como estas dos abscisas deben ser iguales y de signo contrario, es preciso que

$$mf'_y(x_1,y_1)+f'_x(x_1,y_1)=0 \qquad [6],$$

que es la ecuacion del diámetro buscado, y en la cual x_1 é y_1 representan coordenadas generales. Quitando los índices se convierte en

$$(2Ay+Bx+D)m+By+2Cx+E=0,$$

y ordenándola, en

$$(2Am+B)y+(Bm+2C)x+Dm+E=0 \qquad (7).$$

Los coeficientes que x é y tienen en esta última ecuacion son las derivadas f'_x y f'_y de los términos de segundo grado contenidos en la ecuacion de la curva, sin mas diferencia que la de haber puesto en ellos 1 en vez de x, y m en lugar de y, y el término constante es la suma algebráica de todos los de primer grado despues de haber hecho la misma sustitucion.

163. *Tanto en la elipse como en la hipérbola todos los diámetros pasan por el centro; mas en la parábola todos son paralelos.*

Efectivamente; como la ecuacion (6) se verifica, cualquiera que sea el valor de m, por todos los de x é y que satisfagan á $f'_y=0$ y $f'_x=0$; es decir, por las coordenadas del centro, cualquier diámetro de la elipse ó de la hipérbola pasa por el centro

Por el contrario, estando el centro de la parábola colocado en el infinito, es fácil prever que los diámetros son paralelos; y, con efecto, el coeficiente angular del diámetro (7) es

$$-\frac{Bm+2C}{2Am+B};$$

y como en la parábola es $B^2-4AC=0$, de donde se deduce que $2C=\frac{B^2}{2A}$, sustituyendo y haciendo las reducciones, resulta

$$-\frac{Bm+2C}{2Am+B}=-\frac{B}{2A},$$

valor independiente de m que demuestra la segunda parte del teorema.

104. Recíprocamente, *en la elipse y en la hipérbola toda recta que pase por el centro es un diámetro de la curva (se exceptúa el caso de que en la hipérbola coincida la recta de que se trate con alguna de las asímtotas).*

Estando el centro de la elipse ó el de la hipérbola determinados por la interseccion de las dos rectas $f_y'=0$ y $f_x'=0$, la ecuacion general de las rectas que pasen por el centro de estas curvas es (73)

$$mf_y'+f_x'=0 \qquad [8],$$

que es la de un diámetro conjugado con las cuerdas que tienen por coeficiente angular m. Pero fijándonos en la ecuacion (5), verémos que, para que una recta $y=mx$ determine una cuerda, ó para que corte á la curva en dos puntos, se ha de verificar

$$Am^2+Bm+C \gtrless 0;$$

pues si

$$Am^2+Bm+C=0 \qquad [9],$$

no podria la recta cortar mas que en un punto á la curva, y esta no tendria cuerdas paralelas á dicha recta. Bajo este supuesto, como la ecuacion (9) no puede tener lugar en el caso de una elipse, todas las rectas que pasen por el centro serán diámetros.

Como en la hipérbola las raices de la ecuacion [9] son precisamente los coeficientes angulares de las asímtotas (123), se deduce que las paralelas á estas no cortan á la curva mas que en un punto; además, por estos valores de m, la ecuacion [8] representa las mismas asimtotas; luego queda completa la demostracion del teorema.

165. *La tangente á la curva en el estremo de un diámetro es paralela á las cuerdas que este divide en dos partes iguales.*

En efecto, el coeficiente angular de la tangente es $-\frac{f_x'}{f_y'}$, y el m de las cuerdas conjugadas con el diámetro representado por la ecuacion [6] es tambien igual á $-\frac{f_x'}{f_y'}$; luego estos coeficientes angulares son iguales por unos mismos valores de x é y, lo que demuestra el teorema.

166. **Diámetros conjugados.** — *En la elipse y en la hipérbola cada diámetro tiene su conjugado.*

Representando por m' el coeficiente angular de un diámetro, y por m el de las cuerdas que divide en dos partes iguales, tendrémos

$$m' = -\frac{Bm + 2C}{2Am + B},$$

ó sea $$2Amm' + B(m + m') + 2C = 0 \qquad [10];$$

y como esta relacion es simétrica con relacion á m y m', resulta que m es el coeficiente angular del diámetro conjugado con las cuerdas que tienen m' por coeficiente angular; luego los valores de m y m' que verifiquen la relacion [10] son los coeficientes angulares de dos diámetros conjugados, puesto que cada uno de ellos dividirá en dos partes iguales las cuerdas paralelas al otro. Como esta relacion es de primer grado, á cada valor real de m corresponde otro de m'; luego queda demostrado lo que nos habiamos propuesto.

En la elipse puede darse á m cualquier valor, y siempre resultará otro para m'; pero en la hipérbola no se puede dar á m los que determinan la direccion de las asimtotas.

167. **Ejes.** — Para que el diámetro representado por la ecuacion [7] sea perpendicular á las cuerdas que divide en dos partes iguales, es preciso, en el caso de que los ejes sean rectangulares, que se verifique (75)

$$-\frac{Bm + 2C}{2Am + B} . m = -1,$$

ó sea $$m^2 - \frac{2(A-C)}{B}m - 1 = 0 \qquad (11).$$

De esta ecuacion se saca

$$m = \frac{A-C \pm \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{B},$$

cuyas raices son reales, y multiplicadas dan -1; luego las direcciones que determinan son perpendiculares entre sí; de consiguiente, si hay cuerdas que sean paralelas á estas direcciones, la curva representada por la ecuacion (1) tendrá dos ejes perpendiculares entre sí. Sustituyendo estas raices en la ecuacion (9), que es la que determina las direcciones de las rectas que no cortan á la curva mas que en un punto, resulta $B^2 - 4AC = 0$, igualdad que nunca se verifica en el caso de la elipse ni en el de la hipérbola; por lo tanto, cada una de estas dos últimas curvas tiene dos ejes perpendiculares entre sí.

Parece á primera vista que la parábola no ha de tener ejes, porque la ecuacion (9) queda satisfecha por las raices de la (11) en el caso de esta curva; pero si antes de hacer la sustitucion se reduce las raices de la (11), teniendo en cuenta que $B^2 - 4AC = 0$, resulta $m' = \frac{2A}{B}$ y $m'' = -\frac{2C}{B}$, y encontrarémos que solo m'' verifica la ecuacion (9). Así es que en la parábola no existe mas que un sistema de cuerdas paralelas que puedan ser perpendiculares al diámetro correspondiente; luego esta curva tiene solo un eje. Siendo el coeficiente angular de estas cuerdas $m' = \frac{2A}{B}$, el del eje correspondiente será $-\frac{B}{2A}$, como se debia verificar (163).

168. En todo lo que precede se ha supuesto que es $B \gtreqless 0$; pero si se supone que $B = 0$ y que $A \gtreqless C$, en cuyo caso la ecuacion (1) representa una elipse ó una hipérbola, las raices de la ecuacion (11) serán $m' = 0$, $m'' = \infty$, que determinan dos rectas paralelas á los ejes de las coordenadas; y como estos valores no satisfacen á la ecuacion (9), es claro que *en la elipse y en la hipérbola los ejes de la curva son paralelos á los coordenados cuando no entra en la ecuacion el rectángulo* xy *de las variables.*

Cuando se trate de una parábola, y sea $B = 0$, como tambien na de ser $B^2-4AC=0$, es preciso que se verifique que $A=0$, ó que $C=0$, de donde resulta que el eje de la parábola es paralelo al eje de las x, si $C=0$, ó al de las y cuando $A=0$; es decir, *paralelo al eje del mismo nombre que la variable cuyo cuadrado falta en la ecuacion.*

Finalmente, si $B=0$ y $A=C$, son indeterminadas las raices de la ecuacion [11], y habrá una infinidad de ejes, como era fácil prever, pues en este caso la ecuacion [1] representa un círculo.

169. Resúmen.—La elipse y la hipérbola tienen un centro; mas la parábola carece de él.

La elipse y la hipérbola tienen dos ejes perpendiculares entre si; pero la parábola no tiene mas que un eje.

Por último, cuando falta el rectángulo de las variables en la ecuacion de una elipse ó de una hipérbola, los ejes de la curva son paralelos á los coordenados; y en el caso de la parábola, su único eje es paralelo á uno de los coordenados.

§ III.—REDUCCION DE LA ECUACION DE SEGUNDO GRADO CON DOS VARIABLES Á SU MAS SIMPLE EXPRESION POR EL CAMBIO DE EJES COORDENADOS.

170. Lo que dejamos dicho en el párrafo anterior hace prever la posibilidad de reducir la ecuacion general de segundo grado con dos variables á formas mas sencillas, y aun permite indicar la forma que deberá tener la ecuacion reducida para cada una de las tres curvas de este órden.

En efecto, como la elipse y la hipérbola tienen dos ejes que pasan por el centro, tomándolos por coordenados, las ecuaciones de estas curvas no deberán cambiar cuando se cambie el signo á una de las coordenadas, ni aun cuando se cambie el de las dos; luego serán de la forma

$$My^2+Nx^2=P \qquad [1].$$

Tomando el eje de la parábola por el de las x, y la tangente á esta curva en el vértice por el de las y, como la curva quedará simétrica respecto al primero y pasará por el origen, tendrá una ecuacion de la forma

$$My^2+Px=0 \qquad [2].$$

OBSERVACION. Cuando la ecuacion general de segundo grado represente una elipse ó una hipérbola, puede reducirse de infinitos modos á la forma [1], tomando por ejes de las coordenadas cualquier sistema de diámetros conjugados. Tambien en el caso de la parábola se la puede poner bajo la forma [2] de infinidad de modos, tomando por eje de las x cualquiera de sus diámetros, y por el de las y la tangente tirada á la curva por el estremo de este diámetro.

171. Reduccion de la ecuacion general cuando represente una elipse ó una hipérbola. — Para efectuar esta reduccion se principia por referir la curva á su centro, con lo que desaparecen los términos de primer grado, y la ecuacion se reduce á

$$Ay^2+Bxy+Cx^2=P \qquad [3],$$

en que P tiene un valor fácil de calcular por la regla del número 161.

172. En seguida, para que desaparezca el rectángulo xy de las variables, se toman por nuevos ejes coordenados los mismos de la curva. Siempre se puede suponer que los ejes primitivos eran rectangulares; pues si no lo fuesen, se empezaria por referir la curva á unos rectangulares, lo que no cambiaria la forma de la ecuacion [3]. Bajo este supuesto, sustitúyanse en esta última, en vez de x é y, los valores que dan las fórmulas

$$x=x'\cos\alpha-y'\operatorname{sen}\alpha,\quad y=x'\operatorname{sen}\alpha+y'\cos\alpha \qquad [4],$$

que sirven para pasar de un sistema de ejes rectangulares á otro de la misma especie; y suprimiendo los acentos de las nuevas variables, resultará

$$\left.\begin{array}{r}A\cos^2\alpha\\-B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\\+C\operatorname{sen}^2\alpha\end{array}\right|y^2+\left.\begin{array}{r}2A\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\\+B\cos^2\alpha\\-B\operatorname{sen}^2\alpha\\-2C\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\end{array}\right|xy+\left.\begin{array}{r}A\operatorname{sen}^2\alpha\\+B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\\+C\cos^2\alpha\end{array}\right|x^2=P \qquad [5].$$

Podemos valernos de la indeterminacion de α para que, al determinar esta cantidad, desaparezca el término en xy, y para esto habrá que suponer

$$2A\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+B\cos^2\alpha-B\operatorname{sen}^2\alpha-2C\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=0,$$

ó sea

$$(A-C)\operatorname{sen}2\alpha+B\cos2\alpha=0,\quad \text{de donde sale}\quad \operatorname{tang}2\alpha=-\frac{B}{A-C}.$$

A esta tangente corresponden los arcos

$$2\alpha,\quad 2\alpha+\pi,\quad 2\alpha+2\pi,\quad 2\alpha+3\pi,\quad \text{etc.};$$

y tomando su mitad, resultarán para α los valores

$$\alpha, \quad \alpha+\tfrac{1}{2}\pi, \quad \alpha+\pi, \quad \alpha+\tfrac{3}{2}\pi, \quad \text{etc.},$$

que, bien mirado, darán solamente un sistema de ejes; pero podrá tomarse uno ú otro por eje de las x, y en cada uno de ellos contar en dos sentidos opuestos las coordenadas positivas.

Despues de conocido α, podrémos calcular sen α y cos α, y poner en la ecuacion [5] sus valores. Pero pueden hallarse por un método muy sencillo los coeficientes de y^2 y x^2; porque llamándolos M y N, se tendrá

$$M = A\cos^2\alpha - B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + C\,\mathrm{sen}^2\alpha,$$
$$N = A\,\mathrm{sen}^2\alpha + B\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha,$$

que sumados primero y despues restados, dan

$$M+N = A+C$$

y $$M-N = (A-C)\cos 2\alpha - B\,\mathrm{sen}\,2\alpha \qquad [6].$$

Además, $$0 = (A-C)\,\mathrm{sen}\,2\alpha + B\cos 2\alpha \qquad [7].$$

Sumando miembro á miembro los cuadrados de las dos ecuaciones últimas, resulta

$(M-N)^2 = (A-C)^2 + B^2$, de donde $M-N = \pm\sqrt{(A-C)^2+B^2}$.

Conviniendo en tomar para 2α el menor de los arcos positivos á que corresponda la tangente $\frac{-B}{A-C}$, se verá claramente que se debe tomar el radical con signo contrario al que tenga B. En efecto, eliminando cos 2α entre las ecuaciones [6] y [7], puede escribirse la [6] como sigue:

$$M-N = \frac{\mathrm{sen}\,2\alpha\,[(A-C)^2+B^2]}{-B};$$

y como sen 2α es siempre positivo, lo mismo que la cantidad comprendida en el paréntesis, es preciso que los signos de M—N y de B sean contrarios.

Conociendo M + N y M — N, inmediatamente se deducirá M y N, valores que serán siempre reales, y, por lo tanto, posible la transformacion de que se trata; de modo que la ecuacion se reducirá á la forma

$$My^2 + Nx^2 = P \qquad [8],$$

segun habíamos anunciado.

173. Sea la ecuacion

$$y^2-2xy+3x^2-2y+4x-5=0,$$

que representa una elipse. Los coordenadas del centro vienen dadas por las ecuaciones

$$y_1-x_1=1,\quad -y_1+3x_1=-2,$$

de las que se saca $y_1=\frac{1}{2}$ y $x_1=-\frac{1}{2}$, y, por consiguiente, $P=5+y_1+2x_1=\frac{13}{2}$. Además, siendo $M+N=1+3=4$, y $M-N=\sqrt{(1-3)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$, resultan $M=2+\sqrt{2}$ y $N=2-\sqrt{2}$. Por consiguiente, la ecuacion simplificada de la elipse que representa la ecuacion propuesta es

$$(2+\sqrt{2})y^2+(2-\sqrt{2})x^2=\frac{13}{2}.$$

Siguiendo la regla dada en el párrafo anterior hemos tomado el radical con el signo $+$, porque es negativo el coeficiente de xy.

174. Se puede aplicar á la ecuacion [8] la regla que sirve para reconocer las elipses y las hipérbolas; pero no estará de más el decir que la cantidad B^2-4AC, no solamente conserva su signo al efectuar la transformacion, como debia esperarse, sino que tampoco altera su valor numérico. En efecto, se tiene

$$4MN=(M+N)^2-(M-N)^2=(A+C)^2-(A-C)^2-B^2=4AC-B^2;$$

por consiguiente, $\quad 0-4MN=B^2-4AC.$

M y N tendrán, por consiguiente, el mismo signo, si la ecuacion propuesta representa una elipse, y serán de signos contrarios si representa una hipérbola.

I. Ecuacion simplificada de la elipse. — En el primer caso, siempre es posible que M y N sean positivos cambiando convenientemente todos los signos de la ecuacion.

Si P fuese positivo, podriamos establecer las igualdades

$$\frac{M}{P}=\frac{1}{b^2}\quad \text{y}\quad \frac{N}{P}=\frac{1}{a^2},$$

con lo cual, dividiendo la ecuacion por P, tomará la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad [9].$$

Cuando $a=b$, esta ecuacion representará una circunferencia.

Si P fuese negativo, no habria sistema alguno de valores reales de x y de y que satisficiera á la ecuacion [8], la cual representaria, por consiguiente, una elipse imaginaria.

Cuando fuera $P=0$, únicamente quedaria satisfecha la ecuacion haciendo $x=0$ é $y=0$; por consiguiente, representaria un punto, que seria el nuevo orígen de coordenadas.

II. Ecuacion simplificada de la hipérbola.—En el segundo caso podemos siempre hacer que M sea positivo, y si P fuese negativo, podriamos establecer las igualdades

$$\frac{M}{P}=-\frac{1}{b^2} \quad \text{y} \quad \frac{N}{P}=\frac{1}{a^2},$$

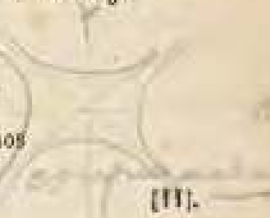
por lo cual, dividiendo la ecuacion [8] por P, se tendrá

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad [10].$$

Haciendo en esta ecuacion $x=0$, resulta y imaginario, y haciendo $y=0$, resulta $x=\pm a$; por lo tanto, la hipérbola encuentra en este caso al eje de las x, pero no al de las y.

Si P es positivo, podemos establecer

$$\frac{M}{P}=\frac{1}{b^2} \quad \text{y} \quad \frac{N}{P}=-\frac{1}{a^2},$$



y dividiendo la ecuacion [8] por P, hallarémos

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \qquad [11].$$

Si hacemos en esta ecuacion $x=0$, resulta $y=\pm b$; y si $y=0$, será x imaginario; de modo que esta hipérbola corta al eje de las y, pero no al de las x.

Si fuese $P=0$, la ecuacion [8] dará

$$y=\pm x\sqrt{-\frac{N}{M}} \qquad [12],$$

cuyos dos valores resultarán siempre reales, porque M y N son de signos contrarios; por lo tanto, la ecuacion [8] representa en este caso dos rectas que se cortan en el orígen de las coordenadas.

175. Reduccion en el caso de la parábola.—Como la parábola no tiene centro, no se puede hacer que desaparezcan los términos de primer grado, pero sí el rectángulo xy de las variables

Para esto, sustituirémos en la ecuacion general, en vez de x y de y, los valores [4] del núm. 172, la cual, suprimiendo los acentos de las nuevas variables y usando de la misma notacion que en el núm. 172, se convertirá en

$$My^2 + Nx^2 + (D\cos\alpha - E\,\text{sen}\,\alpha)y + (D\,\text{sen}\,\alpha + E\cos\alpha)x + F = 0 \quad [13],$$

y tendrémos, como anteriormente,

$$M + N = A + C, \quad M - N = \pm\sqrt{(A-C)^2 + B^2},$$

y

$$\text{tang}\, 2\alpha = \frac{-B}{A-C}.$$

Pero siendo en la parabola $B^2 - 4AC = 0$, y, por consiguiente $B^2 = 4AC$, será

$$M - N = \pm\sqrt{(A-C)^2 + 4AC} = \pm(A + C);$$

y como tambien $\quad M + N = A + C,$

es preciso que uno de los coeficientes M ó N sea cero, y el otro igual á $A + C$; luego en el caso de la parábola, al mismo tiempo que el rectángulo de las variables, desaparece el cuadrado de una de estas, como podia preverse; pues, siendo $B^2 - 4AC = 0$, cuando B sea cero, necesariamente se ha de verificar que A ó C lo sea. Si suponemos que $B < 0$, habrá que tomar el signo $+$ delante del radical, y se tendrá $N = 0$ y $M = A + C$. Haciendo

$$D\cos\alpha - E\,\text{sen}\,\alpha = D', \quad \text{y} \quad D\,\text{sen}\,\alpha + E\cos\alpha = E',$$

se reducirá la ecuacion [13] á

$$My^2 + D'y + E'x + F = 0 \qquad [14],$$

que puede representar todas las parábolas que tengan su eje paralelo al nuevo de las x.

176. Trasladando el origen á un punto indeterminado (x_1, y_1), para lo cual sustituirémos en la ecuacion [14] x por $x + x_1$ é y por $y + y_1$, resultará

$$\left.\begin{array}{l|l} My^2 + 2My_1 & y + E'x + My_1^2 \\ \quad + D' & \qquad\qquad + D'y_1 \\ & \qquad\qquad + E'x_1 \\ & \qquad\qquad + F \end{array}\right\} = 0,$$

que tomando por x_1 é y_1 las raices de las ecuaciones

$$2My_1 + D' = 0, \quad My_1^2 + D'y_1 + E'x_1 + F = 0,$$

que son

$$y_1 = -\frac{D'}{2M}, \quad x_1 = \frac{D'^2 - 4MF}{4ME'},$$

harémos desaparecer el término en y y el término independiente, y se reducirá la ecuacion [14] á la forma

$$My^2 + E'x = 0,$$

segun habiamos anunciado. Por último, haciendo $\frac{E'}{M} = -2p$, tendrémos la ecuacion

$$y^2 = 2px,$$

que representa la parábola

177. EJEMPLO. Sea la ecuacion

$$y^2 - 2xy + x^2 - 2y + x + 3 = 0,$$

que representa una parábola. Siguiendo la marcha que dejamos trazado iremos hallando sucesivamente

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2}{0}, \quad 2\alpha = 90^\circ, \quad \alpha = 45^\circ, \quad \operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

y por ser

$$B < 0, \quad M = 2, \quad N = 0, \quad E' = -2\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

por consiguiente, la ecuacion simplificada es en este caso

$$2y^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x = 0, \quad \text{ó, lo que es lo mismo,} \quad y^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}x,$$

178. Puede ocurrir que al cambiar de ejes, no solo desaparezcan el término en xy y el de x^2, sino tambien el término en x, y se tenga únicamente $E' = 0$; entonces se reduce la ecuacion [14] á la forma

$$My^2 + D'y + F = 0 \qquad [15],$$

que se puede poner bajo la siguiente:

$$My^2 + Q = 0,$$

con solo cambiar la posicion del orígen sobre el mismo eje de las x.

Esta reduccion no ofrecerá interés alguno; pues no teniendo la ecuacion [15] mas que una incógnita, representa el sistema de dos rectas paralelas, cuyas ecuaciones se halla resolviéndola con rerelacion á y.

Por regla general, cuando al discutir una ecuacion de segundo grado, segun hemos indicado en el primer párrafo de este capítulo, se halle que representa un punto, una recta ó dos paralelas; es decir, alguna de las variedades de las curvas de segundo órden, no se debe tomar el trabajo de reducirla á una forma mas sencilla; sin embargo, aconsejamos al lector que trate algunos ejemplos, por via de ejercicio, y vea el grado de aproximacion que se obtiene en los resultados, lo cual puede conocer por los términos que deberian desaparecer por sí mismos, y que por lo comun no se anularán del todo.

CAPÍTULO VII.

PROPIEDADES PRINCIPALES DE LA ELIPSE.

§ I.—CENTRO; EJES; ORDENADAS; FOCOS Y DIRECTRICES.

179. Centro y ejes.—Ya vimos en el núm. 174 que la forma mas sencilla de la ecuacion de una elipse referida á ejes rectangulares es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad [1].$$

Esta ecuacion no se altera aunque se cambie en ella los signos de x y de y; luego la recta que va desde el punto (x, y) al $(-x, -y)$ pasa por el origen (70, IV); además, esta recta queda dividida en el origen en dos partes iguales, pues la distancia desde este origen á cada uno de aquellos puntos (7, II) es $\sqrt{x^2+y^2}$. Esto nos manifiesta que *toda cuerda que pase por el origen queda dividida en este en dos partes iguales*. Por este motivo se da al origen el nombre de *centro* de la curva.

A cada valor de x corresponden dos de y iguales y de signo contrario; por lo tanto, *toda cuerda paralela al eje de las y queda dividida por el de las x en dos partes exactamente iguales*. Del mismo modo veriamos que *toda cuerda paralela al eje de las x queda dividida en dos partes iguales por el de las y*. Por otra parte, como los ejes coordenados son rectangulares, lo son de simetría para la curva, y se los llama *ejes de la curva*, en cuyo concepto se dice que la ecuacion [1] representa la elipse *referida á sus centro y ejes*. Por lo que dejamos dicho podemos convencernos de que esta curva se compone de cuatro partes superponibles unas á otras.

Si hacemos $y=0$, hallarémos $x=\pm a$, y si $x=0$, $y=\pm b$: estas distancias a y b que hay desde el origen hasta los puntos en que corta la elipse á sus ejes se llaman *las longitudes de los semiejes de la curva*; por consiguiente, las longitudes de los ejes enteros serán respectivamente $2a$ y $2b$.

De la ecuacion [1] sale

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad [2].$$

Dando á x valores crecientes desde cero hasta a, irán decreciendo los de y desde b hasta cero, lo cual nos manifiesta que la curva tiene la forma que indica la figura 73.

Los puntos A, A′, B, B′, en que corta á sus ejes, se llaman los *vértices*.

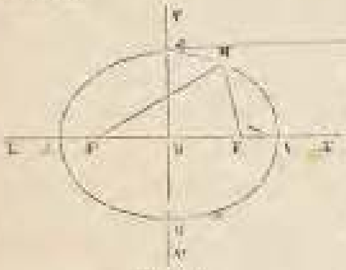


Fig. 73.

Como los ejes a y b son desiguales, pues de lo contrario se convertiria la curva en una circunferencia (174), supondrémos que $a > b$; bajo esta hipótesis, se llama á la distancia AA′ el *eje mayor* de la elipse, y á la BB′ el *menor*.

180. Pueden calcularse las coordenadas de tantos puntos como se quiera de la curva sin estraer ninguna raiz; pues para conseguirlo, basta conocer

$$x = \pm a . \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ó \quad y = \pm b . \frac{2t}{1+t^2},$$

cuyas fórmulas verifican la ecuacion [1] independientemente de t. Si hacemos crecer á t desde 0 hasta 1, x variará desde a hasta 0, haciéndolo y desde 0 hasta b.

Cuando la elipse se redujese á un círculo cuyo radio fuera r, serian las fórmulas

$$x = \pm r \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ó \quad y = \pm r \frac{2t}{1+t^2}.$$

181. Teorema. *La razon que existe entre las ordenadas perpendiculares al eje mayor y las correspondientes del círculo que tiene este eje por diámetro, es la misma que guarda el eje menor con el mayor.*

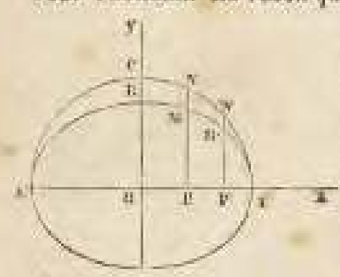


Fig. 74.

Supongamos que se trata de la elipse ABA′ (fig. 74), y que ACA′ sea el círculo que se haya construido tomando por diámetro el eje mayor AA′. Como la ecuacion de este círculo es

$$Y^2 + x^2 = a^2 \qquad [3],$$

y de aquí resulta que $Y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$, comparando este valor con el que la ecuacion [2] da para la ordenada de la elipse, hallarémos la relacion

$$\frac{y}{Y}=\frac{b}{a}$$

entre los valores absolutos de las ordenadas de la elipse y del círculo, relacion que demuestra el teorema.

Observaciones. I. De un modo análogo hallaríamos que, describiendo un círculo sobre el eje menor por diámetro, las abscisas de la elipse están con las correspondientes de este círculo en la misma razon que el eje mayor con el menor

II. Fundados en estas propiedades se puede seguir un método muy sencillo para construir la elipse por puntos. No hay mas que describir un círculo que tenga por diámetro el eje mayor de la elipse, levantar las ordenadas NP, N'P', etc., del círculo, y disminuirlas en la razon que guarde b con a; de este modo los puntos M, M', etc., corresponderán á la elipse. Como se podrán construir así los puntos que se quiera de esta curva, no habrá mas que unirlos por una línea contínua, y se la tendrá con tanta mas exactitud, cuanto mas inmediatas se hallen las ordenadas.

182. Teorema. *Los cuadrados de las ordenadas perpendiculares á un mismo eje guardan entre sí igual razon que los productos de los segmentos producidos en este eje por aquellas ordenadas.*

En el círculo ACA' se verifica que

$$\overline{NP}^2=AP.A'P \quad \text{y} \quad \overline{N'P'}^2=AP'.A'P'$$

podemos establecer $$\frac{\overline{NP}^2}{\overline{N'P'}^2}=\frac{AP.A'P}{AP'.A'P'};$$

pero en virtud del teorema anterior,

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{NP}^2}=\frac{\overline{M'P'}^2}{\overline{N'P'}^2},$$

que podemos escribir bajo la forma

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{M'P'}^2}=\frac{\overline{NP}^2}{\overline{N'P'}^2},$$

y la razon comun $\frac{\overline{NP}^2}{\overline{NP'}^2}$,

dará $$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{M'P'}^2}=\frac{AP.A'P}{AP'.A'P'},$$

segun queriamos demostrar.

Tambien pudiéramos demostrarlo muy fácilmente por medio de la ecuacion de la elipse; pues llamando y é y' á las ordenadas MP y M'P' correspondientes á las abscisas (OP y OP'), que llamarémos x y x', tendrémos

$$y^2=\frac{a^2}{b^2}(a^2-x^2) \quad \text{é} \quad y'^2=\frac{a^2}{b^2}(a^2-x'^2),$$

que, haciendo la division, darán

$$\frac{y^2}{y'^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2-x'^2},$$

que puede escribirse

$$\frac{y^2}{y'^2}=\frac{(a-x)(a+x)}{(a-x')(a+x')}.$$

Si observamos el segundo miembro, verémos que

$$a-x=AP,\quad a+x=A'P,\quad a-x'=AP',\quad a+x'=A'P';$$

luego queda demostrado que

$$\frac{y^2}{y'^2}=\frac{AP.A'P}{AP'.A'P'}.$$

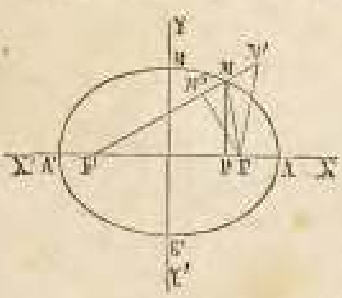


Fig. 75.

183. Focos. — Ya vimos en el núm. 11 que toda curva en que sea constante la suma de las distancias de cada uno de sus puntos á dos fijos, es una elipse; y ahora vamos á demostrar que en toda elipse se verifica esta propiedad.

Tomemos en el eje mayor y á los dos lados del centro una distancia $c=\sqrt{a^2-b^2}$, y tendrémos así dos puntos F y F' (fig. 75).

Supongamos que M es un punto de esta elipse que tenga una abscisa positiva, unámosle con F y F', y tendrémos

$$\overline{MF}^2 = y^2 + (c-x)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) + (c-x)^2$$

$$= b^2 + c^2 - 2cx + x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) = a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = \left(a-\frac{cx}{a}\right)^2,$$

de donde resulta $$MF = a - \frac{cx}{a} \qquad [4];$$

en atencion á ser x igual á lo mas á a, y c menor que a, será menor que a el término $\frac{cx}{a}$.

Del mismo modo tendrémos

$$\overline{MF'}^2 = y^2 + (c+x)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) + (c+x)^2$$

$$= b^2 + c^2 + 2cx + x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) = a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = \left(a+\frac{cx}{a}\right)^2,$$

por lo cual será $$MF' = a + \frac{cx}{a} \qquad [5],$$

y sumando ordenadamente las [4] y [5], tendrémos

$$MF + MF' = 2a,$$

que siendo constante el segundo miembro, demuestra la propiedad enunciada para la porcion de la elipse situada á la derecha del eje de las y. Es evidente que sucede lo mismo respecto á las otras tres partes por la simetría de la figura.

Los puntos F y F' se llaman los *focus* de la elipse, nombre que es debido á ciertas propiedades que en la Física pertenecen á estos puntos. Las distancias MF y MF' se llaman los *radios vectores* del punto M, denominacion tomada de la Astronomía. En virtud de estas denominaciones se puede enunciar la propiedad que acabamos de demostrar, diciendo que *la suma de los radios vectores es igual en la elipse al eje mayor*.

Observaciones. I. Esta es una propiedad de que solamente gozan los puntos de la elipse; porque si M' es un punto colocado fuera de la curva, uniéndole con F y F', la M'F' cortará á la elipse en un punto M, que unido con F, nos dará

$$MM'+M'F>MF,$$

y añadiendo MF' á los dos miembros, resultará

$$M'F'+M'F>MF'+MF, \quad \text{ó, lo que es lo mismo,} \quad >2a.$$

Si M'' estuviese dentro de la curva, uniéndole con F y F', y prolongando una cualquiera de las rectas de union, la M''F' por ejemplo, esta cortará á la curva en un punto M, que unido con F, dará

$$M''F'+M''F<M''F'+MM''+MF,$$

ó, lo que es lo mismo,

$$M''F'+M''F<MF'+MF, \quad \text{ó bien} \quad <2a.$$

Por consiguiente, podemos decir que *un punto está fuera de la elipse, sobre la elipse ó dentro de ella, segun que la suma de sus distancias á los focus sea mayor, igual ó menor que el eje mayor.*

II. Para construir los focus, no habrá mas que hacer centro en uno de los estremos del eje menor, por ejemplo en el B, y con un radio igual á la mitad a del eje mayor, trazar un arco de círculo que en los dos puntos F y F' en que ha de cortar al eje mayor determinará los focus. La distancia $FF'=2c$ se llama la *escentricidad* de la elipse. Para hablar con todo rigor debiera reservarse este nombre á la razon $\frac{2c}{2a}$; es decir, á la razon que existe entre la distancia que separa á los dos focus y la longitud del eje mayor.

III. Fundándose en la propiedad que acabamos de demostrar es muy fácil trazar la curva; pues no hay mas que hacer centro en cada uno de los focus F y F', y trazar desde cada uno un arco, cuyo radio, sumado con el del que se trace desde el otro focus, sea igual á $2a$; porque los puntos en que se corten estos dos arcos tienen que estar precisamente situados en la elipse.

IV. Segun acabamos de ver, todo radio vector está espresado por una funcion racional, entera y de primer grado de la abscisa correspondiente al punto á que el radio pertenece; y como cambiando el origen y la direccion de los ejes quedará reemplazada esta abscisa por otra funcion racional, entera y de primer grado de las nuevas coordenadas (58), se puede tambien decir que el radio vector está espresado por una funcion racional, entera y de primer grado de las coordenadas rectilíneas del punto que se considera.

184. Directrices. — Supongamos que DL (fig. 76) sea una recta perpendicular al eje mayor y que diste del centro O la longitud $OD=d$; bajemos á esta recta desde cualquier punto M de la

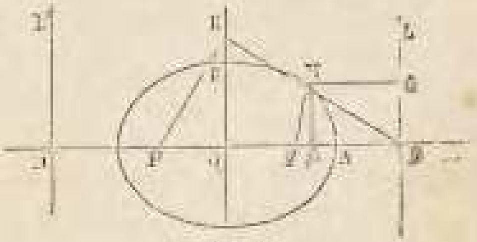


Fig. 76.

elipse una perpendicular MG, y unamos el punto M con el F; segun antes hemos hallado

$$MF=a-\frac{cx}{a},$$

y es fácil convencerse de que

$$MG=d-x.$$

Por consiguiente, $$\frac{MF}{MG}=\frac{a-\frac{cx}{a}}{d-x}.$$

La distancia d puede determinarse de modo que sea constante la última relacion. Con efecto, representemos por k el valor de esta relacion, y de la ecuacion

$$\frac{a-\frac{cx}{a}}{d-x}=k \quad \text{resultará} \quad \left(k-\frac{c}{a}\right)x+a-dk=0.$$

Como es menester, para que k sea constante, que esta condicion se verifique independientemente de todo valor particular que se dé á x, habrán de verificarse separadamente las siguientes:

$$k-\frac{c}{a}=0 \quad \text{y} \quad a-dk=0,$$

de donde
$$k=\frac{c}{a} \quad \text{y} \quad d=\frac{a}{k}=\frac{a^2}{c};$$

por lo tanto, la distancia d es una tercera proporcional á la mitad de la escentricidad y á la mitad del eje mayor; y la razon entre las distancias MF y MG, es la misma que hay entre la escentricidad y el eje mayor.

Del mismo modo hallariamos otra recta D'L' que gozaria, respecto al segundo focus F', de igual propiedad que la DL tiene respecto al F.

Estas dos rectas DL y D'L' se llaman las *directrices* de la elipse. Usando esta denominacion puede enunciarse la propiedad que se acaba de demostrar del modo siguiente: *las distancias desde un mismo punto de la elipse al focus y á la directriz correspondiente guardan entre sí la misma razon que la escentricidad con el eje mayor.*

OBSERVACIONES. I. Para construir una de las directrices, la DL por ejemplo, no hay mas que tomar $OH=a$, unir H con F' y tirar la HD perpendicularmente á HF'. Con efecto,

$$OD=\frac{\overline{OH}^2}{OF'}=\frac{a^2}{c};$$

por consiguiente, DL es la directriz que se pedia.

II. Como en el círculo son iguales ambos ejes es $a=b$, la escentricidad nula, y, por lo tanto, los focus se confunden con el centro, y las directrices se alejan al infinito.

§ II. — TANGENTE Y NORMAL.

185. Segun lo que hemos visto en el núm. 101, el coeficiente angular de la tangente á la elipse en el punto (x', y') tiene por valor

$$m=-\frac{b^2x'}{a^2y'} \qquad [1].$$

Si consideramos la parte de curva que está comprendida en el ángulo YOX, verémos que conforme va creciendo x' desde 0 hasta a, va decreciendo y' desde b hasta 0; luego por ambas causas aumenta el valor absoluto de m; por lo tanto, m decrece algebráicamente. Resulta de aquí [109] que en el intérvalo que consideramos, la concavidad de la curva está vuelta hácia las y negativas; y á causa de la simetría de esta curva respecto á los dos ejes puédese decir que presenta siempre su concavidad hácia el centro.

Tenemos en los estremos del eje menor $x'=0$ ó $y'=b$; por consiguiente $m=0$, y la tangente á la elipse en este punto será paralela al eje mayor. En los del eje mayor, $x'=a$ é $y'=0$; por consiguiente, será $m=\infty$, y en su virtud, la tangente tirada en cualquiera de estos puntos á la curva será perpendicular al eje mayor.

186. En virtud de lo que antecede [101] la ecuacion de la tangente á la elipse en el punto (x', y') es

$$y-y'=-\frac{b^2x'}{a^2y'}(x-x') \qquad [2],$$

á la que hay que añadir una relacion que esprese que el punto (x', y') pertenece á la curva; esto es, la

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \qquad [3].$$

La ecuacion [2] puede ponerse bajo la forma

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2};$$

por consiguiente, y en virtud de la [3], se puede escribir

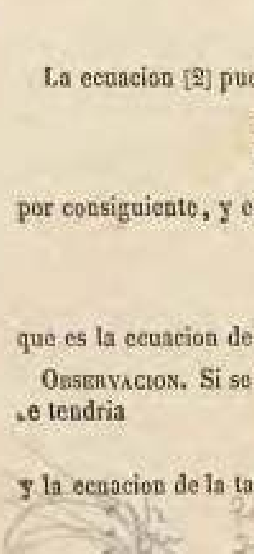
$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1 \qquad [4],$$

que es la ecuacion de la tangente.

Observacion. Si se tratase de un círculo cuyo radio fuera r, se tendria

$$a=b=r,$$

y la ecuacion de la tangente se convertiria en



$$\frac{xx'}{r^2}+\frac{yy'}{r^2}=1, \quad \text{ó sea} \quad xx'+yy'=r^2,$$

como vimos ya en el núm. 93.

187. Problemas. I. *Tirar una tangente á una elipse por un punto (x'', y'') exterior á esta.*

La ecuacion de esta tangente es la misma (4); pero hay que determinar las coordenadas x' é y' del punto de contacto.

Para conseguirlo, tendrémos presente que, perteneciendo este punto á la curva, es preciso que sus coordenadas satisfagan á la ecuacion de la elipse, y que se verifique, por lo tanto, que

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

Además, por hallarse tambien el punto de contacto sobre la tangente, la ecuacion (4) de esta deberá quedar satisfecha por las coordenadas del mismo; por lo tanto,

$$\frac{x''x'}{a^2}+\frac{y''y'}{b^2}=1.$$

Tenemos, pues, dos ecuaciones para determinar x' é y'. Eliminando entre ellas una de las incógnitas, resulta una ecuacion de segundo grado para determinar la otra; lo que manifiesta que por un punto dado pasan por regla general dos tangentes de la elipse. Podríamos comprobar que ambas soluciones son reales ó ambas imaginarias, segun que el punto dado esté fuera ó dentro de la elipse, y que se reducen á una sola cuando dicho punto pertenece á la elipse misma. Mas por lo mismo que debia esperarse este resultado carecen de interés aquellas comprobaciones.

Es mas útil tener presente que, si en las dos ecuaciones que anteceden se toma á x' é y' como dos variables, cada una de dichas ecuaciones representará un lugar geométrico, y los puntos de interseccion de ambos serán los de contacto que se buscaban. El primero de dichos lugares es la misma elipse, y el segundo una recta; por consiguiente, esta es la recta que pasa por los dos puntos de contacto que se buscan, y por esta razon se la llama *cuerda de los contactos*. Segun su ecuacion, es muy fácil construirla, pues tiene por coordenadas en el origen

$$x=\frac{a^2}{x''} \quad \text{é} \quad y=\frac{b^2}{y''}.$$

II. *Tirar una tangente que sea paralela á una recta dada.*

Suponiendo que sea m el coeficiente angular de la recta á que ha de ser paralela la tangente, tendrémos para determinar x' é y' las relaciones

$$m=-\frac{b^2x'}{a^2y'} \quad \text{é} \quad \frac{y'^2}{b^2}+\frac{x'^2}{a^2}=1.$$

Sacando de estas ecuaciones los valores de x' é y', y sustituyéndolos en la [4], hallarémos

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2},$$

que nos manifiesta que hay dos tangentes que satisfacen al problema.

Observaciones. I. Para x' é y' resultan dos pares de valores iguales y de signo contrario; por consiguiente, los dos puntos de contacto son los estremos de una recta que pasa por el centro de la curva.

II. Cuando la curva de que se trata es un círculo, las ecuaciones de las dos tangentes se reducen á

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1},$$

de conformidad con lo dicho en el núm. 94.

188. Pasemos á encontrar el punto en que la tangente corta á uno cualquiera de los ejes coordenados, por ejemplo, al de las x. Para conseguirlo, habrá que hacer $y=0$ en la ecuacion de la tangente, y tendrémos

Fig. 77.

$$x=\frac{a^2}{x'},$$

que es bien fácil de construir. Lo mas notable que ofrece este resultado es que no depende de b; es decir, que describiendo diferentes elipses ABA', ACA', AB'A', etc., sobre un mismo eje AA' (figura 77), y tirando tangentes á estas en los puntos M, N, M', etc., que tienen una misma abscisa x', todas estas tangentes cortarán al eje de las x en un mismo punto I.

Esto proporciona un método fácil para tirar una tangente á una elipse en un punto M dado sobre la curva; pues una de las elipses que pueden trazarse sobre el eje AA', es la circunferencia ACA', que tiene por radio a. Por consiguiente, tirando la ordenada MP, prolongándola hasta que corte en N á la circunferencia ACA', tirando en este punto N la tangente NI á la circunferencia, el punto en que esta tangente corte al eje OX es el mismo en que tiene que cortarle la tangente tirada á la elipse en el punto M; de modo que uniendo el punto M con el I, tendrémos la tangente pedida.

En vez de hacer uso del punto en que la tangente corta al eje de las x, pudiéramos valernos de la interseccion de dicha tangente con el eje de las y; no habria mas diferencia en la construccion que la de servirnos de la circunferencia trazada sobre el eje menor.

189. Esta misma propiedad suministra el medio de tirar una tangente á la elipse por un punto H esterior á ella. Con efecto, sean IM é IN las tangentes á la elipse y al círculo cuyo radio es a; tírese la ordenada HR, prolongándola hasta que corte en K á la tangente del círculo: como las rectas IP, IM, IN cortan proporcionalmente á las paralelas KHR y NMP, tendrémos

$$\frac{HR}{KR}=\frac{MP}{NP}=\frac{b}{a}.$$

Por consiguiente, tomando sobre el eje mayor la longitud RQ igual á b, y la RL igual á a, uniendo Q con H y tirando LK paralela á QH, el punto K en que esta paralela corte á RH pertenecerá á la tangente al círculo. Con efecto, se verificará que

$$\frac{HR}{KR}=\frac{RQ}{RL}=\frac{b}{a}.$$

Entendido esto, no habrá mas que tirar la tangente al círculo en el punto K, y en el punto I en que corte al eje OX, tendrémos uno de la tangente á la elipse, que unido con el H, la determinará. El punto de contacto de la elipse y la tangente será el M, en que IH corte á la ordenada NP del círculo.

190. **Normal.**—Se llama *normal* de una curva la perpendicular levantada á la tangente en el punto de contacto.

Llamando m al coeficiente angular de la tangente, el de la normal será $-\frac{1}{m}$, en virtud de lo dicho en el núm. 75, suponiendo que sean rectangulares los ejes.

En virtud de esto, siendo el coeficiente angular de la tangente á la elipse $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$, el de la normal será $\frac{a^2y'}{b^2x'}$, y la ecuacion de esta recta

$$y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x')$$

Observacion. Cuando se trate de un círculo será $a=b$, y la ecuacion de su normal quedará reducida á

$$y-y'=\frac{y'}{x'}(x-x') \quad \text{ó sea} \quad y=\frac{y'}{x'}x.$$

Observando esta ecuacion vemos que en el círculo pasa la normal por el centro, que es el orígen de las coordenadas.

191. Para hallar el punto en que la normal corta al eje de las x harémos en su ecuacion $y=0$, y resultará

$$x=x'-\frac{b^2x'}{a^2}=\frac{c^2x'}{a^2}.$$

Esta distancia se reduce á cero cuando $x'=0$; es decir, en los estremos del eje menor; y tiene su máximo valor cuando $x'=\pm a$, en cuyo caso tendrémos $x=\pm\frac{c^2}{a}$. La distancia x se aproxima tanto mas al valor $\frac{c^2}{a}$, cuanto mas próximo á cualquiera de los estremos del eje mayor esté el punto de contacto.

Análogamente, hay un límite para el punto en que la normal encuentra al eje de las y; la ordenada de este punto se aproxima tanto más á $\pm\frac{c^2}{b}$, cuanto más se aproxima el punto de contacto á los estremos del eje menor.

Haciendo la hipótesis de que $a>b$, serán positivas las cantidades $\frac{c^2}{a}$ y $\frac{c^2}{b}$; la primera es menor que a, pero la segunda puede tomar cualquier valor: así es que la normal encuentra siempre al eje mayor en un punto comprendido dentro de la curva; pero puede cortar fuera de ella al eje menor.

192. TEOREMA. *Toda normal de una elipse divide en dos partes iguales al ángulo que forman los radios vectores.*

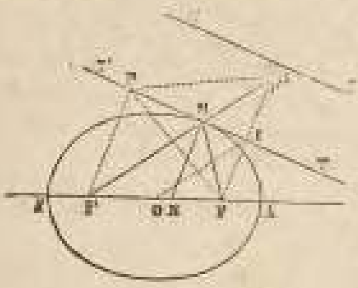


Fig. 78.

Sean MN (fig. 78) la normal en el punto M, y MF y MF' los radios vectores correspondientes al mismo punto. Vamos á demostrar que es cierta la igualdad

$$\frac{\text{NF}}{\text{NF}'}=\frac{\text{MF}}{\text{MF}'}$$

En efecto, segun acabamos de ver,

$$\text{ON}=\frac{c^2x}{a^2}$$

llamando x á la abscisa del punto M: de aquí resulta

$$\text{NF}=c-\frac{c^2x}{a^2}=\frac{c(a^2-cx)}{a^2}$$

y

$$\text{NF}'=c+\frac{c^2x}{a^2}=\frac{c(a^2+cx)}{a^2},$$

de donde

$$\frac{\text{NF}}{\text{NF}'}=\frac{a^2-cx}{a^2+cx}.$$

Pero hemos visto en el núm. 183 que los valores respectivos de los radios vectores son

$$\text{MF}=a-\frac{cx}{a}=\frac{a^2-cx}{a}$$

y

$$\text{MF}'=a+\frac{cx}{a}=\frac{a^2+cx}{a},$$

de donde sale

$$\frac{\text{MF}}{\text{MF}'}=\frac{a^2-cx}{a^2+cx},$$

Por consiguiente, las dos razones $\frac{\text{NF}}{\text{NF}'}$ y $\frac{\text{MF}}{\text{MF}'}$ son iguales, y la recta MN la bisectriz del ángulo FMF' formado por los radios vectores.

193. Resulta de esto que *los ángulos* TMF *y* T'MF' *que la tangente* TT' *forma con los radios vectores son iguales.*

Esta propiedad sugiere un nuevo método para tirar una tangente á la elipse por un punto dado. Supongamos primeramente que el punto M que se da esté colocado sobre la misma elipse. Tirarémos los radios vectores MF y MF'; prolongarémos F'M en una cantidad MH igual á MF; unirémos H con F; desde el punto M bajarémos una perpendicular MT á la MF, y esta perpendicular TT' será la tangente que buscamos. Con efecto, la construccion que hemos empleado da IMF = IMH é IMH = F'MT', como opuestos por el vértice; luego IMF = T'MF'; luego TT' es la tangente á la elipse en el punto M.

194. Supongamos, en segundo lugar, que el punto P que se haya dado esté fuera de la curva. Desde el punto P como centro, y con un radio igual á la distancia PF, describirémos un arco de circunferencia; desde F' como centro, y con radio igual al eje mayor, ó sea $2a$, trazarémos otro arco de circunferencia que cortará al primero en un punto H; unirémos F con H, y bajarémos desde P la PI perpendicular á FH, y tendrémos en PI la tangente que buscábamos, y para tener el punto de contacto M unirémos F' con H.

Siempre que el punto P esté fuera de la elipse podrá ejecutarse esta construccion: para demostrarlo, debemos hacer ver que los arcos de circunferencia trazados, el uno desde P con el radio PF, y el otro desde F' con el $2a$, tienen que cortarse. Con efecto, uniendo P con F', tendrémos en primer lugar

$$PF' < PF + FF', \quad \text{y con mas razon} \quad < PF + 2a;$$

luego la distancia de los centros es menor que la suma de los radios.

En segundo lugar, siendo el punto P esterior á la curva, tendrémos (183, OBS. I)

$$PF' + PF > 2a \qquad [1].$$

Pero tambien en el triángulo FPF' tenemos

$$PF' + FF' > FP, \quad \text{y con mas razon será} \quad PF' + 2a > FP \ [2].$$

Cuando FP sea menor que $2a$, la desigualdad [1] dará

$$PF' > 2a - PF.$$

Si FP fuese mayor que $2a$, sacaríamos de la desigualdad (2)

$$PF' > FP - 2a.$$

Por consiguiente, tanto en uno como en otro caso, será la distancia de los centros mayor que la diferencia de los radios; luego los dos arcos tienen que cortarse.

OBSERVACIONES. I. Estos arcos tendrán dos puntos comunes que serán otras tantas posiciones del punto H, que darán, por lo tanto, dos tangentes.

II. Uniendo O con I, como la recta OI une los puntos medios de FF' y de FH, será la mitad de F'H; por consiguiente, $OI = a$. De aquí se deduce este teorema: *el lugar geométrico de los piés de todas las perpendiculares que se bajen desde uno de los focus de una elipse á sus tangentes es la circunferencia de círculo que tiene por diámetro el eje mayor.*

195. Tambien podemos tirar á una elipse una tangente que sea paralela á una recta dada LL' (fig. 78), fundándonos en la propiedad demostrada en el núm. 193. Para esto, tirarémos á la recta dada una perpendicular desde el focus F; haciendo centro en el otro focus F', trazarémos con el radio $2a$ un arco de círculo que cortará á la recta que hemos tirado perpendicularmente á LL' en un punto H; por el punto medio I de FH tirarémos una paralela á LL'; esta paralela será la tangente pedida, y el punto de contacto M será el de su interseccion con F'H.

Esta construccion puede siempre ejecutarse, pues el punto F está dentro de la circunferencia trazada desde F' como centro con el radio $2a$.

Habrá dos soluciones, pues esta circunferencia cortará á FH en dos puntos.

§ III. — DIÁMETROS, Y CUERDAS SUPLEMENTARIAS.

196. **Diámetros.** — Aunque ya hemos dado en los números 62 y siguientes la ecuacion general de los diámetros de una curva cualquiera de segundo grado y demostrado sus principales propiedades, vamos á ocuparnos de esto mismo, estudiando esta ecuacion para cada curva de segundo grado en particular.

Sea $y = mx + n$ la ecuacion de una cuerda dividida en dos partes iguales por el diámetro que se considere; y llamando ξ y η á las coordenadas de su punto medio, como este punto pertenece á la cuerda, habrá de verificarse

$$\eta = m\xi + n \qquad [1],$$

y para hallar las coordenadas de los estremos de esta cuerda, será preciso combinar su ecuacion con la de la elipse; es decir, con $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Eliminando y, resulta

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0,$$

cuya ecuacion tiene por raices las abscisas de los puntos estremos de la cuerda. Su semisuma, que es igual á la abscisa ξ del punto medio, tiene por valor

$$\xi = -\frac{a^2mn}{a^2m^2 + b^2} \qquad [2].$$

Eliminando n entre las ecuaciones [1] y [2], resultará otra entre ξ, η, y las constantes a, b y m, que será la del lugar.

De este modo hallarémos

$$\eta = -\frac{b^2}{a^2m}\xi \qquad [3];$$

y como esta ecuacion espresa que la recta que representa pasa por el origen, debemos decir que *los diámetros de la elipse son líneas rectas y pasan por el centro.*

Observaciones. I. Llamando m' al coeficiente angular del diámetro, tendrémos

$$m' = -\frac{b^2}{a^2m} \quad \text{y de aqui resulta} \quad mm' = -\frac{b^2}{a^2} \qquad [4];$$

por consiguiente, el producto mm' es constante.

II. De aquí resulta *recíprocamente* á lo dicho arriba, que toda recta tirada por el centro de la elipse es un diámetro; pues si

$$y = m'x$$

es la ecuacion de esta recta, y consideramos las cuerdas paralelas, cuyo coeficiente angular m satisfaga á la relacion

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}, \quad \text{será} \quad m = -\frac{b^2}{a^2m'};$$

el lugar geométrico de los puntos medios de estas cuerdas tendrá por ecuacion

$$\eta=-\frac{b^2}{a^2m}\xi,$$

ó bien sustituyendo, en vez de m, su valor

$$\eta=m'\xi,$$

y esta será la recta propuesta.

197. TEOREMA. *La tangente tirada á la elipse en el estremo de un diámetro, es paralela á todas las cuerdas que este divide en dos partes iguales.*

Podríamos llegar á este teorema considerando á la tangente como límite de las posiciones de las cuerdas paralelas á ella; pero tambien le podemos demostrar sencillamente del modo que sigue.

Llamemos m' al coeficiente angular del diámetro; m'' al de la tangente, y x' é y' á las coordenadas del punto de contacto, que está por el supuesto en el estremo del diámetro. Como el diámetro es una recta tirada desde el origen al punto (x', y'), tendrémos (70)

$$m'=\frac{y'}{x'};$$

pero como tambien este punto es el de contacto, será (185)

$$m''=-\frac{b^2x'}{a^2y'};$$

y como multiplicando término por término estas relaciones resulta

$$m'm''=-\frac{b^2}{a^2} \qquad [5],$$

si comparamos la relacion [4] con la [5], verémos que $m''=m$, y quedará demostrado el teorema.

198. Cuerdas suplementarias. — Se llaman *cuerdas suplementarias* las que partiendo de un mismo punto de la elipse, van á terminar en los estremos de un mismo diámetro. Sus coeficientes angulares guardan entre sí una relacion que conviene estudiar.

Llamando x' é y' á las coordenadas de uno de los estremos de un diámetro, las del otro estremo tendrán que ser $-x'$ y $-y'$.

Supongamos que x'' é y'' sean las de un punto cualquiera de la curva, así como μ y μ' los coeficientes angulares de las dos cuerdas suplementarias que partan del punto (x'', y'') y vayan á terminar en los estremos del diámetro que se considera: segun sabemos (70), se verificará

$$\mu=\frac{y''-y'}{x''-x'} \quad \text{y} \quad \mu'=\frac{y''+y'}{x''+x'}$$

de donde resulta

$$\mu\mu'=\frac{y''^2-y'^2}{x''^2-x'^2}.$$

Ahora bien, como los puntos (x', y') y (x'', y'') pertenecen á la elipse, tiene que verificarse que

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \quad \text{y} \quad \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1,$$

de donde resulta, haciendo la sustraccion,

$$\frac{y''^2-y'^2}{b^2}+\frac{x''^2-x'^2}{a^2}=0,$$

y, por consiguiente,

$$\frac{y''^2-y'^2}{x''^2-x'^2}=-\frac{b^2}{a^2},$$

y así tendrémos, por último, la relacion

$$\mu\mu'=-\frac{b^2}{a^2} \qquad [6],$$

que es la que nos habiamos propuesto establecer

199. Comparando la relacion [4] con la [6] verémos que, si es $\mu=m$, tiene que ser $\mu'=m'$, lo cual quiere decir que *el diámetro que divide una cuerda en dos partes iguales es paralelo á la suplementaria de esta.*

Del mismo modo, comparando la [5] con la [6], verémos que, si $\mu'=m'$, ha de ser $m''=\mu$; esto es, que *si tiramos una cuerda paralela á un diámetro dado, y por el estremo de este una tangente á la elipse, esta tangente tiene que ser paralela á la cuerda suplementaria de la primera.*

Esto nos proporciona otro método para tirar una tangente á la elipse, ya sea por un punto colocado sobre la curva ó ya paralelamente á una recta dada.

1.° Cuando se quiera tirar una tangente á la elipse por uno M (figura 79) de sus puntos, se trazará el diámetro OM correspondiente á este; por otro cualquiera de la curva se tirará una cuerda AD paralela á aquel diámetro; se trazarán el diámetro DD', la cuerda AD' suplementaria de la primera; y la TT' paralela á esta última, que pase por el punto M, será la tangente pedida.

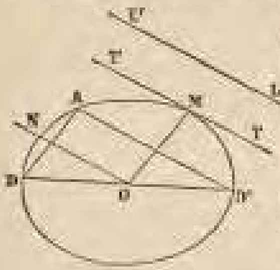


Fig. 79.

2.° Para tirar una tangente que sea paralela á una recta dada LL', trazarémos una cuerda cualquiera AD' paralela á esta recta, el diámetro D'D y la suplementaria AD de la primera; construirémos el diámetro OM paralelo á AD, cuyo estremo M dará el punto de contacto, y tirando por M una paralela TT' á LL', tendrémos la tangente buscada.

Hubiéramos podido ahorrar la construccion de las rectas D'D y AD, fundándonos en el teorema del núm. 197, uniendo solamente el centro con el punto medio de la cuerda AD'.

Siempre puede verificarse la construccion que dejamos dicho.

200. Diámetros conjugados. — Segun lo demostrado en el número 198, si m y m' son los coeficientes angulares de dos diámetros conjugados debe verificarse la relacion

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Recíprocamente, *cuando esta relacion se verifique, los diámetros á quienes correspondan estos coeficientes angulares tienen que ser conjugados.* Con efecto, si μ y μ' son los coeficientes angulares de dos cuerdas suplementarias, tendrémos

$$\mu\mu' = -\frac{b^2}{a^2};$$

pero eligiendo una de estas cuerdas paralela á un diámetro de estos, de modo que se verifique, por ejemplo, que $\mu = m$, resultará $m' = \mu'$; por consiguiente, los dos diámetros serán respectivamente paralelos á dos cuerdas suplementarias, y, por lo tanto, conjugados.

Cada uno de los diámetros conjugados divide en dos partes iguales á las cuerdas paralelas al otro. La razon de esto es que, representando por m'' el coeficiente angular de las cuerdas que divide en dos partes iguales el diámetro conjugado que tenga por coeficiente angular m, se verificará (196) que

$$mm''=-\frac{b^2}{a^2};$$

mas siendo conjugados los dos diámetros, tambien será, como acabamos de ver,

$$mm'=-\frac{b^2}{a^2};$$

y comparando estas dos relaciones, deducirémos que $m''=m'$; esto es, que las cuerdas divididas en dos partes iguales por el primero de los diámetros, son paralelas al segundo.

201. Problema. *Dado un diámetro, construir su conjugado.*

Si OM (fig. 79) es el diámetro dado, tirando una cuerda AD paralela á este, el diametro DD′ y la cuerda AD′ suplementaria de aquella, tendrémos en el diámetro ON paralelo á esta el conjugado que se pide.

Tambien se hubiera podido abreviar la construccion uniendo el centro con el punto medio de la cuerda AD paralela al diámetro dado.

Si la ecuacion de un diámetro fuese $y=mx$, la de su conjugado seria $y=-\frac{b^2}{a^2m}x$.

Observacion. Los diámetros conjugados de un círculo son perpendiculares entre sí.

202. Angulo de dos diámetros conjugados.—Llamando V al ángulo que forman entre sí dos diámetros conjugados de la elipse, tendrémos (74)

$$\operatorname{tang} V=\frac{m+\frac{b^2}{a^2m}}{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{a^2}{c^2}\left(m+\frac{b^2}{a^2m}\right).$$

Este ángulo V no puede ser recto sino cuando $m=0$ ó $m=\infty$;

es decir, cuando uno de los diámetros conjugados se confunda con alguno de los ejes de la curva; y como en este caso tendrémos que $-\frac{b^2}{a^2m}=\infty$, ó $-\frac{b^2}{a^2m}=0$, debemos decir que *los únicos diámetros conjugados de la elipse, que pueden ser perpendiculares entre sí, son los ejes de la misma curva.*

Para hallar el máximo ó el mínimo valor de la tangente V, hay que hallar el máximo ó mínimo de la cantidad comprendida entre paréntesis, haciendo con este objeto

$$m+\frac{b^2}{a^2m}=2k, \quad \text{que dará} \quad m=k\pm\sqrt{k^2-\frac{b^2}{a^2}}.$$

Segun esto, el menor de los valores que pueden darse á k es

$$k=\pm\frac{b}{a},$$

del que resulta

$$m=\pm\frac{b}{a},$$

y, por consiguiente, $-\frac{b^2}{a^2m}=\mp\frac{b}{a}$.

Para construir los diámetros correspondientes, levantarémos al eje mayor OA (fig. 80) en su estremo A una perpendicular, tomarémos por encima y por debajo de A las distancias AH y AH' igual cada una al semi-eje menor b, y unirémos con el centro O los estremos H y H' de estas distancias.

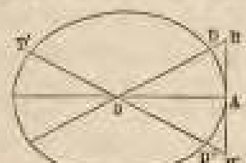


Fig. 80.

Estos diámetros OD y OD' forman con el eje mayor ángulos iguales, pero á diferente lado del mismo eje, y por causa de la simetría de la curva son tambien iguales los mismos diámetros. El ángulo DOD' es el mayor de los que pueden formar entre sí dos diámetros conjugados, así como el menor es el DOD''.

Para hallar el valor absoluto de la tangente de estos ángulos suplementarios, pondrémos en la espresion de la tang V, en vez de m, el valor $\frac{b}{a}$; así hallarémos

$$\text{tang V}=\frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

OBSERVACION. Por lo que acabamos de esplicar se comprende que los límites entre los cuales varía el ángulo que forman entre sí dos diámetros conjugados son los mismos que aquellos entre los cuales varía el ángulo que forma la tangente á la elipse con el diámetro que pasa por el punto de contacto (197, 198, 200).

Para que este ángulo sea recto es preciso que el punto de contacto coincida con algun estremo de los ejes.

203. Vamos á buscar la longitud d del semidiámetro que tenga por ecuacion $y=mx$.

Combinando esta ecuacion con la de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

hallarémos para los cuadrados de las coordenadas de cualquiera de los estremos del diámetro

$$x^2=\frac{a^2b^2}{a^2m^2+b^2} \quad \text{ó} \quad y^2=\frac{a^2b^2m^2}{a^2m^2+b^2}.$$

En su consecuencia será

$$d^2=x^2+y^2=\frac{a^2b^2(1+m^2)}{a^2m^2+b^2} \qquad [1].$$

Hallada esta longitud, para obtener la d' del semidiámetro conjugado con este, no hay mas que sustituir, en vez del coeficiente angular m, el correspondiente al conjugado, es decir, $-\frac{b^2}{a^2m}$, y despues de hecha la reduccion, tendrémos

$$d'^2=\frac{a^4m^2+b^4}{a^2m^2+b^2} \qquad [2].$$

En el caso de que se quiera determinar m, de modo que sea $d'=d$, habrá que igualar los numeradores de estas espresiones, y resultará

$$a^4m^2+b^4=a^2b^2m^2+a^2b^2, \quad \text{ó sea} \quad (a^2-b^2)(a^2m^2-b^2)=0,$$

de donde $$m=\pm\frac{b}{a}.$$

Volvemos á encontrar los diámetros conjugados que forman entre sí el máximo y mínimo ángulo posibles, y vemos que *no hay mas que este solo sistema de diámetros conjugados que sean iguales.*

OBSERVACION. Cuando se trate de un círculo será nulo el factor a^2-b^2, y cualquiera que sea el valor de m se verificará la ecuacion anterior, lo cual quiere decir que todos los diámetros conjugados de un círculo son iguales.

204. TEOREMA. *La suma de los cuadrados de dos diámetros conjugados es constante (é igual á la de los cuadrados de los ejes).*

Sumando miembro á miembro las relaciones (1) y (2) del número anterior, hallarémos

$$d^2+d'^2=\frac{a^4m^2+b^4+a^2b^2m^2+a^2b^2}{a^2m^2+b^2}=\frac{(a^2m^2+b^2)(a^2+b^2)}{a^2m^2+b^2},$$

y como de aquí resulta

$$d^2+d'^2=a^2+b^2,$$

queda demostrado el teorema.

205. TEOREMA. *El área del paralelógramo construido sobre dos diámetros conjugados es constante (é igual á la del rectángulo construido sobre los ejes).*

Valuando el área del paralelógramo construido sobre los dos semidiámetros conjugados d y d', que forman entre sí el ángulo V, como esta área es la cuarta parte de la del paralelógramo construido sobre los diámetros enteros, si probamos que es constante quedará demostrado el teorema. Llamando á aquella S, tendrémos

$$S=dd'\operatorname{sen}V,\quad \text{ó elevando al cuadrado}\quad S^2=d^2d'^2\operatorname{sen}^2V.$$

En el núm. 202 hemos hallado que

$$\operatorname{tang}V=\frac{m+\dfrac{b^2}{a^2m}}{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\frac{a^2m^2+b^2}{(a^2-b^2)m},$$

de donde se deduce

$$\operatorname{tang}^2V=\frac{(a^2m^2+b^2)^2}{(a^2-b^2)^2m^2},$$

y, por consiguiente,

$$\operatorname{sen}^2V=\frac{(a^2m^2+b^2)^2}{(a^2m^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2m^2}=\frac{(a^2m^2+b^2)^2}{a^4m^4+a^4m^2+b^4m^2+b^4}$$

$$=\frac{(a^2m^2+b^2)^2}{(a^4m^2+b^4)(m^2+1)}.$$

Por lo tanto, sustituyendo en el valor de S^2 los de d^2, d'^2 y $\operatorname{sen}^2 V$, resultará

$$S^2 = \frac{a^2b^2(1+m^2)}{a^2m^2+b^2} \cdot \frac{a^4m^2+b^4}{a^2m^2+b^2} \cdot \frac{(a^2m^2+b^2)^2}{(a^4m^2+b^4)(m^2+1)},$$

ó sea $\qquad S^2 = a^2b^2$, ó bien $S = ab$,

que es lo que habiamos enunciado.

206. Teorema. *La ecuacion de la elipse referida á un sistema de diámetros conjugados tiene la misma forma que cuando está referida á sus ejes.*

Con efecto, una vez que cada diámetro conjugado divide en dos partes iguales á todas las cuerdas paralelas al otro (200), si contamos las coordenadas en sentido paralelo á estos ejes, por cada valor de cualquiera de ellas habrá dos de la otra, que serán iguales y tendrán el signo contrario; y como esto exige que la ecuacion no contenga mas que términos de grado par, tanto respecto de x como de y, será de segundo grado (58, obs.), y tendrá la forma $Mx^2 + Ny^2 = P$.

Llamando a' al semidiámetro en cuya direccion se cuenten las abscisas x, y b' aquel sobre el que se cuenten las ordenadas y,

haciendo $\quad y = 0$, debemos tener, $\quad x = \pm a'$;

y haciendo $\quad x = 0$, $\qquad y = \pm b'$,

lo que dará $\qquad \frac{P}{M} = a'^2 \quad$ y $\quad \frac{P}{N} = b'^2$,

de donde sacarémos $\quad M = \frac{P}{a'^2} \quad$ y $\quad N = \frac{P}{b'^2}$.

Sustituyendo estos valores y suprimiendo el factor comun P, hallarémos

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

que es lo que queriamos demostrar.

Observacion. Las propiedades demostradas en los números 185, 186, 187 y 197 á 200, no dependen en manera alguna de que los ejes coordenados sean rectangulares, y se verifican tambien cuando la elipse está referida á cualquier sistema de diámetros conjugados.

Por ejemplo, la ecuacion de la tangente á la elipse en el punto (x', y') es

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1.$$

La de una tangente paralela á la recta que tiene por ecuacion $y=mx$ es

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

Los coeficientes angulares m y m' de dos cuerdas suplementarias, ó sean el de una cuerda y el del diámetro que la divide en dos partes iguales, ó tambien el de dos diámetros conjugados, satisfacen á la relacion

$$mm'=-\frac{b'^2}{a'^2}.$$

207. De aquí se deduce un método para *construir la elipse cuando se conozcan dos diámetros conjugados y el ángulo que forman entre sí.*

Sean $AA'=2a'$ y $BB'=2b'$ (fig. 81) los dos diámetros conjugados que se dén, y que formen entre sí un ángulo BOA conocido. Levántese la CC′ perpendicular á AA′, tómese $OC=OC'=OB$, y descríbase, por cualquiera de los métodos anteriormente esplicados en los números 11, 181 ó 183, una elipse auxiliar sobre AA′ y CC′ considerados como ejes. Hecho esto, para trazar por puntos la elipse que se pide, supongamos que N

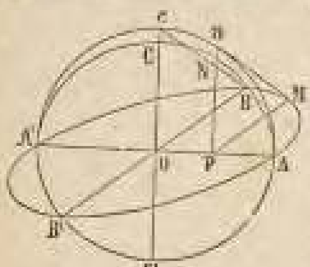


Fig. 81.

sea uno cualquiera de la elipse auxiliar, y NP su ordenada rectangular; tirando por P una paralela á BB′, y tomando sobre ella $PM=NP$, este punto M será uno de los de la elipse que se busca. Con efecto, existiendo entre las coordenadas rectangulares del punto N la relacion

$$\frac{\overline{OP}^2}{a'^2}+\frac{\overline{NP}^2}{b'^2}=1,$$

porque a' y b' son sus semiejes, tambien existirá entre las oblicuas del punto M la relacion

$$\frac{\overline{OP}^2}{a'^2}+\frac{\overline{MP}^2}{b'^2}=1;$$

por consiguiente, el punto M pertenece á la elipse que tiene por diámetros conjugados AA' y BB'.

Esto nos manifiesta que hay que describir una elipse sobre los diámetros dados colocados perpendicularmente uno al otro y tomados por ejes, y que despues es preciso inclinar las ordenadas hasta que formen el ángulo dado.

Combinando este procedimiento con el del núm. 181 se puede tambien hacer uso del círculo descrito sobre AA' como diámetro, en vez de trazar la elipse auxiliar. En efecto, si es c el estremo del radio perpendicular al diámetro AA' del círculo, y n el estremo de la ordenada correspondiente á la abscisa OP, bastará para tener el punto M tirar, como hemos hecho arriba, la PM paralela á OB, unir c con B, y tirar por n nM paralela á cB, y la interseccion de esta paralela con PM dará el punto que se buscaba. Efectivamente, la semejanza de los triángulos cOB y nPM dará

$$\frac{MP}{Pn}=\frac{OB}{Oc};$$

además sabemos que

$$\frac{NP}{Pn}=\frac{OC}{Oc}, \quad \text{ó bien} \quad \frac{OB}{Oc};$$

por consiguiente, MP = NP. No hay pues necesidad de trazar la elipse auxiliar.

Observacion. Si fuesen iguales los diámetros conjugados, la ecuacion de la elipse referida á ellos seria de la misma forma que la del círculo, esto es $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{a'^2}=1$; pero serian oblicuas las coordenadas.

§ IV. — Area de la elipse.

208. Para valuar el área de la elipse, la compararémos con la del círculo que tenga por diámetro el eje mayor ó con la del trazado sobre el eje menor.

Concibamos que se haya inscrito un polígono de cualquier número de lados en la semielipse ABA' (fig. 82), y que se hayan tirado por los vértices de este polígono las ordenadas correspondientes, prolongándolas hasta que corten á la semicircunferencia ACA', determinando así en ella los vértices de otro polígono de igual número de lados que el inscripto en la semielipse; y sean M y M' dos vértices consecutivos del polígono inscripto en la elipse, y N, N' los correspondientes del inscripto en la circunferencia.

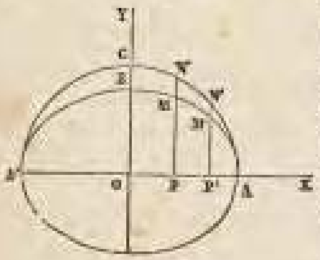


Fig. 82.

Los trapecios PMM'P' y PNN'P', que tienen la misma altura PP', son entre sí como las sumas de sus bases; y como las bases correspondientes á cada uno están en la razon de $b:a$ (181), en la misma estarán sus sumas; por consiguiente, los dos trapecios son entre sí como $b:a$. Lo mismo puede decirse de todos los pares de trapecios análogos formados en los polígonos inscriptos en la elipse y en el círculo; por lo tanto, estos mismos polígonos guardan entre sí la razon de $b:a$. Si multiplicamos indefinidamente el número de lados, estos polígonos tendrán por límites respectivos el uno la semielipse y el otro la semicircunferencia; luego estos límites guardarán tambien la razon constante que acabamos de ver que guardan los polígonos que les están inscriptos; esto es, la razon $b:a$.

Por consiguiente, llamando E al área de la elipse, tendrémos

$$\frac{E}{\pi a^2}=\frac{b}{a}, \quad \text{de donde sale} \quad E=\pi ab,$$

lo que espresa que *el área de la elipse tiene por medida el rectángulo de sus semiejes, multiplicado por la razon π de la circunferencia al diámetro.*

Observaciones. I. Esta área es media proporcional entre las de los círculos que tienen por diámetros respectivos el eje mayor y el menor.

II. Segun el teorema del núm. 205, tendrémos tambien

$$E=\pi a'b'\operatorname{sen}\theta,$$

siendo a' y b' dos semidiámetros conjugados que forman entre sí el ángulo θ.

§ V. — Ejercicios y aplicaciones.

209. Teorema. *El semieje menor es medio proporcional entre las dos perpendiculares bajadas desde cada focus sobre cualquier tangente de la elipse.*

Representémos por

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

una tangente cualquiera, y por p y p' las longitudes respectivas de las perpendiculares bajadas una desde F y otra desde F' sobre aquella perpendicular. Como las coordenadas del punto F son $y = 0$ y $x = c$, las del F', $y = 0$ y $x = -c$, y los ejes de la curva ejes tambien coordenados, tendrémos (**76**)

$$p = \frac{-mc \mp \sqrt{a^2m^2 + b^2}}{\pm\sqrt{1 + m^2}} \quad \text{y} \quad p' = \frac{+mc \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}}{\pm\sqrt{1 + m^2}}.$$

Los dos focus de la elipse están á un mismo lado de la tangente, cualquiera que esta sea, por lo cual ambas espresiones tendrán el mismo signo para el radical que forma su denominador; por consiguiente, multiplicándolas, tendrémos

$$pp' = \frac{-m^2c^2 + a^2m^2 + b^2}{1 + m^2} \quad \text{ó bien} \quad pp' = b^2,$$

que es la demostracion del enunciado.

210. Teorema. *La parte de normal comprendida entre el eje mayor y el punto de contacto es al semidiámetro paralelo á la tangente, como el eje menor es al mayor.*

Si llamamos x' é y' las coordenadas del punto de contacto, x'' la abscisa de la interseccion de la normal con el eje mayor, n la longitud de la parte de la normal comprendida entre este eje y el punto de contacto, y tomamos por coordenadas los de la elipse, tendrémos

$$n^2 = y'^2 + (x' - x'')^2.$$

Como la ecuacion de la normal $y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x')$ ha de quedar satisfecha por las coordenadas de la interseccion de esta recta con el eje mayor, si hacemos en ella $y = 0$ y $x = x''$, tendrémos

$$-y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x'' - x'), \quad \text{de donde resulta} \quad x' - x'' = \frac{b^2x'}{a^2}.$$

Por consiguiente,
$$n^2 = y'^2 + \frac{b^4x'^2}{a^4} = \frac{a^4y'^2 + b^4x'^2}{a^4} \qquad (1).$$

El diámetro paralelo á la tangente tiene por ecuacion

$$y = -\frac{b^2x'}{a^2y'}x,$$

y combinándola con la de la elipse, hallarémos para valores de las coordenadas del estremo de este diámetro

$$x^2 = \frac{a^2y'^2}{b^2} \quad \text{é} \quad y^2 = \frac{b^2x'^2}{a^2}.$$

Por lo tanto, llamando a' la longitud de este semidiámetro, será

$$a'^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^4y'^2 + b^4x'^2}{a^2b^2} \qquad (2).$$

Comparando la relacion (1) con la (2), tendrémos

$$\frac{n^2}{a'^2} = \frac{a^2b^2}{a^4}, \quad \text{de donde resulta} \quad \frac{n}{a'} = \frac{b}{a}$$

que es lo que nos habíamos propuesto demostrar.

Recíprocamente. Si á contar del punto de contacto y hácia el interior de la curva medímos sobre la normal una longitud n, tal que cumpla con la proporcion $\frac{n}{a'} = \frac{b}{a}$, el estremo de esta longitud será un punto del eje mayor; pues cualquier otro diámetro cortaría á la normal en un punto que distaria del de contacto mas ó menos que el de que se trata.

211. Teorema. *Cuando dos tangentes paralelas* KL, K'L' *están cortadas en los puntos* T *y* T' *por una tercera* TT', *las partes* DT *y* D'T' *de las primeras comprendidas entre los puntos de contacto* D, D' *y los de interseccion* T *y* T' *con la tercera, son los estremos de una proporcion, cuyo término medio es la longitud* OE *del semidiámetro paralelo á las primeras.*

Tomemos por ejes coordenados las rectas DD' y EE', que, segun sabemos (**197**, **200**), son dos diámetros conjugados, y llamando a' y b' á las longitudes OD y OE, tendrémos por ecuaciones de las tangentes paralelas

$$x = a' \quad \text{y} \quad x = -a',$$

y para la tercera tangente TT' (**207**, cor.)

$$y = mx + \sqrt{a'^2m^2 + b'^2}.$$

Haciendo sucesivamente en esta última $x = a'$ y $x = -a'$, hallarémos

$$\text{DT} = ma' + \sqrt{a'^2m^2 + b'^2} \quad \text{y} \quad \text{D'T'} = -ma' + \sqrt{a'^2m^2 + b'^2}.$$

De aquí se deduce que

$$\text{DT} \times \text{D'T'} = \left(\sqrt{a'^2m^2 + b'^2} + ma'\right)\left(\sqrt{a'^2m^2 + b'^2} - ma'\right) = b'^2 = \overline{\text{OE}}^2$$

segun queríamos demostrar.

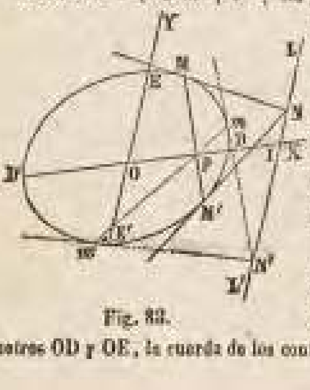


Fig. 83.

212. Teorema. *Si desde cada uno de los puntos de una recta* LL' (fig. 83) *se tiran dos tangentes á la elipse, tales como* NM, NM', *las cuerdas que, como* MM', *unan los puntos de contacto de las tangentes que parten de un mismo punto, pasarán todas por uno mismo.*

Tomarémos por ejes coordenados el diámetro EE' paralelo á la recta LL' y su conjugado DD', y llamando x'' é y'' á las coordenadas del punto N, y a' y b' á los semidiámetros OD y OE, la cuerda de los contactos MM' tendrá por ecuacion (**187**)

$$\frac{xx''}{a'^2}+\frac{yy''}{b'^2}=1;$$

y haciendo en esta ecuacion $y=0$, hallarémos la abscisa OP del punto en que MM' corta á OD, ó sea al eje de las x; esta abscisa será

$$x, \quad \text{ó sea} \quad OP=\frac{a'^2}{x''} \qquad (1).$$

Ahora bien, x'' es constante, pues no depende en manera alguna de la posicion del punto N sobre la recta LL', que es paralela al eje de las y; por consiguiente, tambien es constante OP, y siendolo la posicion del punto P, pasarán por él todas las cuerdas análogas á MM', que es lo que queriamos demostrar.

Observaciones. I. El punto P se llama el *polo* de la recta LL', y esta la *polar* del punto P.

En un círculo la polar es perpendicular al radio que pasa por el polo.

II. Segun manifiesta la relacion (1) OD es media proporcional entre OI y OP.

III. Hemos supuesto que la recta LL' era exterior á la elipse; pero aun cuando cortase á la curva, se verificaria la propiedad que hemos demostrado, solo hay que tener presente que no podrian tirarse tangentes á la elipse desde los puntos de aquella recta comprendidos dentro de la curva. Además, por ser x'' menor que a', seria OP mayor que a', y el punto P quedaria fuera de la elipse.

Cuando la polar fuese tangente en el punto D, se confundiria el polo P con este punto D de contacto, y quedaria, por consiguiente, sobre la misma polar.

Si la polar fuese la directriz seria su polo el foco correspondiente, pues tendriamos $x''=\frac{a^2}{c}$, de donde resultaria $OP=c$.

IV. Tambien se verifica la propiedad recíproca; es decir, que, *si desde un punto fijo P tiramos varias secantes, y en las intersecciones de estas con la curva levantamos tangentes, las intersecciones de las correspondientes á los extremos de una misma secante se hallarán todas en una misma recta LL'.* Con efecto, permaneciendo fijo OP sucederá lo mismo, en virtud de la relacion (1), á x''; y los puntos N de interseccion de cada par de tangentes se hallarán todos en la recta que tenga por ecuacion $x=x''$.

Cuando el punto fijo P esté fuera de la elipse, la recta LL' cortará á la curva; pues si $OP>a'$, tendrá que ser $x''<a'$.

Cuando P se encuentre en D, la recta LL' será tangente.

213. Problema. *Inscribir en una elipse dada un cuadrilátero, cuya superficie sea un máximo.*

Supongamos que está resuelto el problema, y que ABCD sea el cuadrilátero pedido (queda á cargo del lector hacer la figura). Tírese la diagonal BD, y siendo este cuadrilátero el máximo en cuanto á superficie, esta disminuirá cuando cambiemos de lugar al vértice A, conservando fijos los otros; pero como la superficie parcial BCD no cambiará, es preciso que la del triángulo BAD disminuya; en su consecuencia, el vértice A tendrá que aproximarse á la base BD. De aquí resulta que el vértice A está actualmente lo mas distante que es posible de la diagonal BD; por consiguiente, el punto A tiene que ser el de contacto de una tangente paralela á BD.

Del mismo modo demostraríamos que el punto C es el de contacto de otra tangente paralela á BD. Estos puntos A y C de contacto de dos tangentes paralelas son los extremos de un mismo diámetro; luego AC es un diámetro. Lo mismo diríamos de BD. Además, estos diámetros son conjugados, porque el BD es paralelo á la tangente tirada por un estremo del otro (**197**, **200**); por consiguiente, la condicion á que ha de satisfacer un cuadrilátero inscripto en la elipse para que su superficie sea un máximo, es que sus diagonales formen un sistema de diámetros conjugados.

Observaciones. I. Cualquiera que sea este sistema de diámetros conjugados será la misma la superficie ABCD; porque siempre será la mitad de la correspondiente al paralelógramo construido sobre los diámetros conjugados AC y BD, que es constante (**205**).

II. El cuadrilátero máximo que puede inscribirse en un círculo es el cuadrado.

214. Problema. *Dado un arco de elipse terminar la curva.*

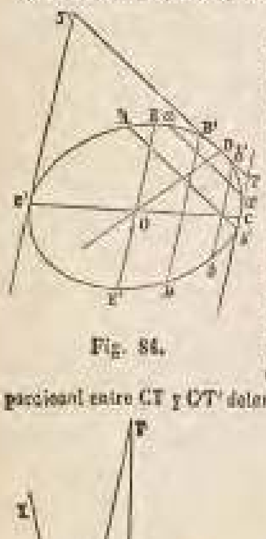


Fig. 84.

Sea este arco el ABCD (fig. 84). Tírense las dos cuerdas paralelas AA′ y aa′, y hágase pasar por sus puntos medios una recta DO, que será uno de los diámetros de la elipse. Tírense otras dos cuerdas paralelas BB′, bb′, y haciendo pasar por sus puntos medios una recta CO, esta será otro diámetro de la curva. Por consiguiente, el punto O donde se corten estos dos diámetros será el centro; y tirando por él la EE′ paralela á BB′, tendrémos la direccion del diámetro conjugado de OC. Para determinar su longitud, prolónguese CO en una cantidad OC′ igual á CO. Háganse pasar por C y C′ las CT y C′T′ paralelas á la cuerda BB′, y serán tangentes á la curva; tírese por D la TT′ paralela á AA′, y se tendrá otra tangente; por lo que, en virtud del teorema número **212**, la media proporcional entre CT y C′T′ determinará la longitud del semidiámetro OE.

Conocidos ya los diámetros conjugados CC′ y EE′, lo dicho en el núm. **207** basta para trazar curva.

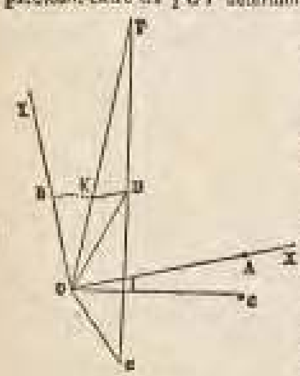


Fig. 85.

215. Problema. *Conociendo la posicion y la longitud de dos diámetros conjugados de una elipse, construir los ejes de esta.*

Sean OC y OD (fig. 85) los semidiámetros conjugados que se dan conocidos. Tírese por D una perpendicular á OC, y tómense sobre ella las longitudes OE y OF iguales á OC; únanse los puntos E y F con el O; divídase en dos partes iguales el ángulo EOF por medio de la recta OX, que cortará á EF en un punto tal como I, y tírese OY perpendicular á OX; por último, hágase pasar DK paralela á OX, y tómese OA = KF y OB = OK: las rectas OA y OB serán los ejes de la curva.

Con efecto, hagamos, para abreviar, $OC = a'$, $OD = b'$ y $COD = V$, y segun la construccion que hemos hecho, tendrémos $ODE = 90^{\circ} - V$ y $ODF = 90^{\circ} + V$; y de los triángulos ODE y ODF, sacarémos

$$\overline{OE}^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos(90^{\circ} - V) = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \operatorname{sen} V,$$

$$\overline{OF}^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos(90^{\circ} + V) = a'^2 + b'^2 + 2a'b' \operatorname{sen} V.$$

Llamando a y b á los semiejes, podemos tambien establecer las relaciones ya demostradas

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 \quad \text{y} \quad a'b' \operatorname{sen} V = ab;$$

por consiguiente, podemos escribir

$$\overline{OE}^2 = a^2 + b^2 - 2ab, \quad \text{de donde resulta} \quad OE = a - b;$$

$$\overline{OF}^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \quad \text{y de aquí} \quad OF = a + b.$$

Además, siendo OX la bisectriz del ángulo EOF, tendrémos

$$\frac{IF}{IE} = \frac{OF}{OE} \quad \text{ó} \quad \frac{a' + DI}{a' - DI} = \frac{a + b}{a - b},$$

de lo que se deduce

$$\frac{DI}{a'} = \frac{b}{a}.$$

Por otra parte, siendo DK paralela á OI, será

$$\frac{DI}{a'} = \frac{OK}{KF},$$

por consiguiente, $\quad OK = b \;$ y $\; KF = a.$

Por último, debemos observar que siendo el punto D uno de los de la elipse, la paralela á OC tirada por él tiene que ser una tangente; luego DE será una normal. Verificándose la proporcion (1), en virtud del teorema del núm. **210**, ó mas bien en virtud de su recíproca, tendrá que hallarse el punto I sobre el eje mayor; luego tomando $OA = KF$ y $OB = OK$, tendrémos los ejes de la curva.

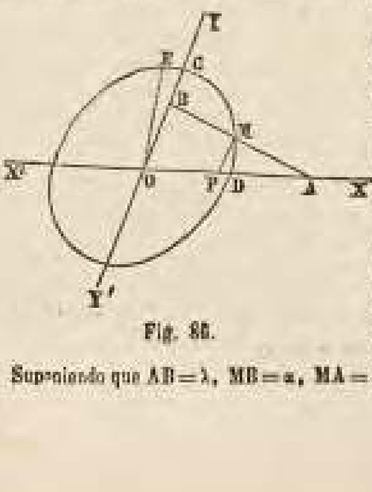


Fig. 86.

216. Problema. *Una recta AB (figura 86), cuya longitud es constante, se mueve, apoyando siempre sus extremos A y B en dos ejes fijos XX′ é YY′; se quiere hallar el lugar geométrico que durante este movimiento irá engendrando un punto determinado M de la recta móvil.*

I. Si examinamos las diferentes posiciones que puede ir tomando la recta AB, reconocerémos fácilmente que la curva engendrada por el punto M tiene que ser cerrada. Vamos á hallar su ecuacion.

Suponiendo que $AB = \lambda$, $MB = \alpha$, $MA = \beta$, $OA = a$ y $OB = b$, y tomando por ejes coordenados las rectas fijas XX′ é YY′, y llamando θ al ángulo YOX y x é y á las coordenadas del punto M, tendrémos

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{AB}} \quad \text{ó} \quad \frac{x}{a}=\frac{\alpha}{\lambda}, \quad \text{de donde} \quad a=\frac{\lambda x}{\alpha}$$

y

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OB}}=\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{AB}} \quad \text{ó} \quad \frac{y}{b}=\frac{\beta}{\lambda}, \quad \text{de donde} \quad b=\frac{\lambda y}{\beta}.$$

Del triángulo AOB, sacarémos

$$\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2-2\mathrm{OA}.\mathrm{OB}.\cos\mathrm{AOB}=\overline{\mathrm{AB}}^2, \quad \text{ó sea} \quad a^2+b^2-2ab\cos\theta=\lambda^2.$$

Sustituyendo los valores que preceden de a y b, y dividiendo por λ^2, tendrémos

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{2xy\cos\theta}{\alpha\beta}=1 \qquad [1],$$

que es la ecuacion del lugar que buscamos, el cual se ve que es una elipse (**236**). Como esta ecuacion no cambia, aunque se pongan $-x$ y $-y$ en vez de x y de y, debemos concluir como en el núm. **179**, que el orígen es el centro de la curva, pero que esta no se halla referida á dos diámetros conjugados, pues entra en la ecuacion el rectángulo xy de las variables.

II. Es fácil hallar un diámetro conjugado, por ejemplo el OD; pues su estremo E tiene que ser el punto de contacto de una tangente paralela á OX, y se determinarán las coordenadas de este punto buscando el valor de y que en la ecuacion [1] reduzca á uno solo los dos de x. Ahora bien, tomando por incógnita $\frac{x}{\alpha}$, la condicion necesaria para que sean iguales las dos raices, es

$$\left(\frac{y\cos\theta}{\beta}\right)^2-\frac{y^2}{\beta^2}+1=0, \quad \text{de donde} \quad y=\pm\frac{\beta}{\operatorname{sen}\theta},$$

y en este caso las raices iguales son

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y\cos\theta}{\beta}, \quad \text{de donde sale} \quad x=\pm\frac{\alpha\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$

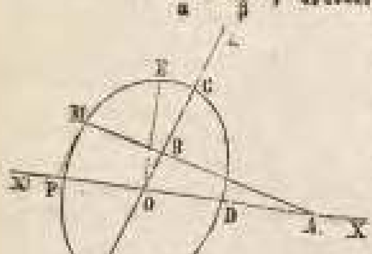


Fig. 87.

cuyos valores es muy fácil construir. Conocido ya el punto E, uniéndole con O, se tendrá el diámetro conjugado de OD, y teniendo un sistema de diámetros conjugados, se podrá inmediatamente determinar los ejes.

OBSERVACIONES. I. Si en vez de estar situado el punto M entre A y B, como hemos supuesto en la figura 86, estuviese á un mismo lado de ambos, como en la figura 87, la distancia OP sería igual á $-x$, y en este caso tendríamos $a=-\frac{\lambda x}{\alpha}$, y la elipse tendria por ecuacion

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{2xy\cos\theta}{\alpha\beta}=1 \qquad (2);$$

y para las coordenadas del estremo E del diámetro OE conjugado del OD, hallaríamos

$$y=\pm\frac{\beta}{\operatorname{sen}\theta} \quad y \quad x=\mp\frac{\alpha\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$

cuyos valores han de tomarse los dos con los signos superiores ó los dos con los inferiores.

II. Cuando las rectas fijas XX′ é YY′ fuesen perpendiculares entre sí, sería el ángulo $\theta=90°$, y la ecuacion de la elipse

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1,$$

cualquiera que fuese la posicion del punto M en la recta móvil. En este caso estaria la curva referida á sus centro y ejes, y las longitudes de éstos serian las respectivas distancias α y β, ó sean MB y MA.

217. Del anterior se deduce la resolucion del siguiente

PROBLEMA. *En un círculo que tiene por radio* TO (fig. 88) *rueda sin resbalar otro cuyo radio* CO *es la mitad del anterior; se quiere hallar el lugar geométrico que irá describiendo un cierto punto* M *tomado en la direccion de un radio determinado* CA *del segundo círculo.*

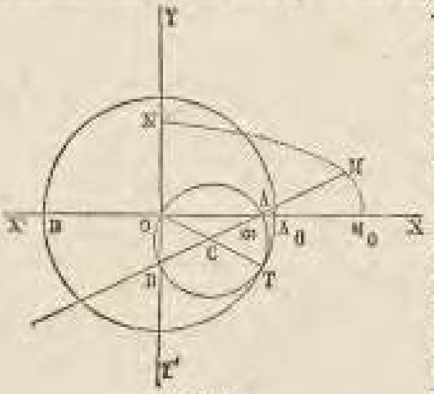


Fig.ª 88.

Sea T el punto de contacto de ambos círculos. Tirando una recta indefinida XX′ por el punto A y el centro O, esta recta cortará al círculo mayor en un punto que llamarémos A_0; tirando por O otra recta indefinida YY′ perpendicular á la primera, cortará al círculo menor en un punto B, que se hallará en la prolongacion de CA, por ser recto el ángulo AOB.

Observemos, en primer lugar, que el punto A_0 es la posicion que ocupaba el A del círculo menor cuando este era tangente al mayor en A_0, ó, en otros términos, que son iguales los arcos AT y A_0T. Con efecto, siendo

$$\frac{ACT}{360°}=\frac{AT}{2\pi.OC}, \quad \text{será} \quad AT=\frac{2\pi.OC.ACT}{360°},$$

y por ser

$$\frac{A_0OT}{360°}=\frac{A_0T}{2\pi.OT}, \quad \text{tendrémos} \quad A_0T=\frac{2\pi.OT.A_0T}{360°}.$$

Pero como el ángulo A_0OT ó AOT inscripto en el círculo menor es la mitad del contral ACT que intercepta el mismo arco AT sobre este círculo menor, y tambien OT es doble de OC, serán iguales las dos expresiones de AT y de A_0T.

Comprendido esto, se ve claramente que la recta AB, de longitud constante por ser un diámetro del círculo menor, apoya siempre sus extremos A y B en dos ejes fijos rectangulares XX' é YY'; en su consecuencia, el punto M tomado en la prolongacion de AB describirá una elipse que tendrá sus ejes en la direccion de aquellas dos rectas fijas, y que las longitudes respectivas de los mismos serán $OM_1 = MC + CO$ y $ON = MC - CO$

Si el punto M estuviese entre A y B, como en m por ejemplo, los ejes serian $OC + Cm$ y $OC - Cm$.

Cuando el punto M coincidiese con el A quedaria reducida la elipse, que habia de engendrar en su movimiento, al diámetro A_0D del círculo fijo. Se hace uso de esta propiedad en las máquinas que sirven para dirigir algunas piezas animadas de movimiento rectilíneo alternativo.

218. Fundándose en lo que se trató en el núm. **215** se resuelve tambien el siguiente

PROBLEMA. *Un triángulo AMB (fig. 89 y 90) se mueve apoyando constantemente sus vértices A y B en dos ejes fijos XX' é YY'; se quiere hallar el lugar geométrico que durante este movimiento describirá el tercer vértice M.*

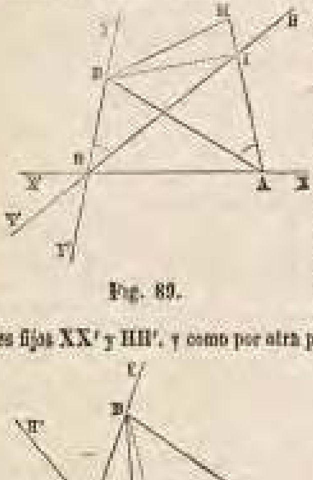


Fig. 89.

I. Si el triángulo tiene la posicion indicada en la figura 89, tirarémos por el punto B una recta BI que forme con AM un ángulo BIA que sea suplemento del YOX, y por los O é I la recta indefinida HH'. Como el cuadrilátero OBIA es inscribible, el ángulo IOB será igual al constante IAB del triángulo móvil. Por consiguiente, los puntos A é I se mueven en este caso sobre dos ejes fijos XX' y HH', y como por otra parte las distancias AI é IM son constantes nos hallarémos en el caso del núm. **215**, y el lugar geométrico que describirá el punto M será una elipse, cuyo centro estará en O.

Fig. 90.

II. Cuando el triángulo tenga la posicion representada en la figura 90, tirarémos BI que forme con AM un ángulo BIA igual al YOX, y por los puntos O é I la recta indefinida HH'. Por esta construccion los cuatro puntos O, B, A, I estarán sobre una misma circunferencia de círculo, el ángulo IOB será suplemento del IAB del triángulo móvil, y los puntos A é I se moverán sobre dos ejes fijos XX' y HH'; y como las distancias AI é IM son constantes, el lugar geométrico que describirá el punto M será una elipse, cuyo centro estará en O.

Observacion. Si el punto M se confundiese con el I, la elipse de que hablamos se reduciría á una línea recta, pues el punto I se mueve siguiendo la HH'.

219. Problema. *Hallar el lugar geométrico de todos los puntos desde los cuales puedan tirarse á la elipse dos tangentes perpendiculares entre sí.*

Suponiendo que la elipse esté referida á su centro y ejes, las ecuaciones de las dos tangentes serán

$$[1] \qquad y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad y \quad y = m'x \pm \sqrt{a^2m'^2 + b^2} \qquad [2];$$

mas teniendo que ser las tangentes perpendiculares entre sí, debe verificarse (**75**)

$$mm' + 1 = 0 \qquad [3].$$

Como se puede considerar que x é y representan en las ecuaciones [1] y [2] las coordenadas del punto comun á las dos tangentes; es decir, las de un punto del lugar que buscábamos, eliminando m y m' entre las [1], [2], y [3], quedará una relacion constante entre x é y, que será la ecuacion que se pide.

La ecuacion [1] puede ponerse bajo la forma

$$(x^2 - a^2)m^2 - 2xym + y^2 - b^2 = 0 \qquad [4].$$

La [2] da una relacion semejante, que solamente se diferencia de esta en que m está reemplazada por m'. De aquí se sigue que podemos considerar á m y m' como las dos raíces de la ecuacion [4]. Por lo tanto; su producto tiene por valor

$$mm' = \frac{y^2 - b^2}{x^2 - a^2},$$

y sustituyéndolo en la [3], tendrémos

$$\frac{y^2 - b^2}{x^2 - a^2} + 1 = 0 \quad \text{ó sea} \quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2,$$

que es la ecuacion de un círculo que tiene por centro el de la elipse, y por radio $\sqrt{a^2 + b^2}$, ó sea la diagonal del rectángulo construido sobre los semiejes a y b.

Observacion. Si fuese $a = b$, se reduciría el radio á $a\sqrt{2}$, ó sea al lado del cuadrado inscripto en el círculo cuyo radio es a.

220. Problema. *Teniendo una série de elipses cuyo centro es comun á todas, cuyos ejes se hallan sobre unas mismas rectas y son proporcionales los de todas las elipses, y habiendo un punto en el mismo plano desde el cual se tiran varias tangentes á dichas curvas; se quiere hallar el lugar geométrico de los puntos de contacto.*

Supongamos que todas las elipses estén referidas á su centro y ejes; y como llamando a y b á los semiejes de la primera elipse, los de las otras pueden representarse por na y nb, siendo n un coeficiente que varía para cada elipse, la ecuacion de la tangente podrá representarse (**187**) por

$$\frac{xx'}{n^2a^2} + \frac{yy'}{n^2b^2} = 1;$$

y llamando x'' é y'' á las coordenadas del punto fijo desde el cual se han tirado las tangentes, tendrémos

$$\frac{x''x'}{n^2a^2} + \frac{y''y'}{n^2b^2} = 1 \qquad [1].$$

juntamente con la relacion

$$\frac{x'^2}{n^2a^2}+\frac{y'^2}{n^2b^2}=1 \qquad (2).$$

Por consiguiente, hallarémos la ecuacion del lugar geométrico de los puntos de contacto, que no es mas que la relacion constante que liga entre sí á las coordenadas x' é y', eliminando n entre las ecuaciones (1) y (2). Para conseguirlo, igualarémos los primeros miembros, y suprimiendo el denominador comun n^2, tendrémos

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=\frac{x''x'}{a^2}+\frac{y''y'}{b^2} \qquad (3).$$

Observando la forma de esta ecuacion verémos que representa una elipse que pasa por el orígen de las coordenadas y por el punto fijo, circunstancias ambas que debíamos ya tener previstas. Con efecto, á proporcion que sus ejes van disminuyendo sucesivamente sin alterar la razon geométrica que existe entre el mayor y el menor, ambos tienden á quedar reducidos á un solo punto, que es el orígen; por lo tanto, esta misma tendencia tienen todos los puntos de contacto: además, como se puede considerar que las elipses dadas crecen indefinidamente, podemos concebir una que pase por el punto fijo, y en tal caso este mismo punto es tambien uno de los de contacto.

Puede simplificarse la ecuacion de este lugar geométrico trasladando el orígen de las coordenadas al punto medio de la recta que une el fijo con el orígen primitivo. Como las coordenadas de dicho punto medio son $\frac{x''}{2}$ é $\frac{y''}{2}$, tendrémos que suponer

$$x'=x+\frac{x''}{2} \quad \text{é} \quad y'=y+\frac{y''}{2};$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion (3), resultará

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x''^2}{4a^2}+\frac{y''^2}{4b^2};$$

y, por último, suponiendo, para abreviar,

$$\frac{x''^2}{4a^2}+\frac{y''^2}{4b^2}=k^2$$

se hallará

$$\frac{x^2}{k^2a^2}+\frac{y^2}{k^2b^2}=1.$$

Esta elipse queda, pues, referida á sus centro y ejes, y vemos que estos son proporcionales á los de las elipses dadas.

OBSERVACION. Si en vez de las elipses que hemos supuesto que se daban en el problema anterior fuesen círculos concéntricos, á los que se quisiera tirar tangentes desde un punto fijo, hallaríamos por lugar geométrico de los puntos de contacto el círculo que tenga por diámetro la distancia que haya desde el punto fijo al centro comun.

221. PROBLEMA. *Dados los dos círculos iguales C y C' (fig. 91) que se cortan en los puntos B y B', se tira una secante cualquiera por el punto O medio de la distancia de los centros; esta secante corta á las dos circunferencias en los puntos E* y K'; se une el C con el K, el C' con el K', y prolongando suficientemente las rectas CK y C'K' se cortan en un punto M; se pide el lugar geométrico de todos los puntos determinados del mismo modo que el M.

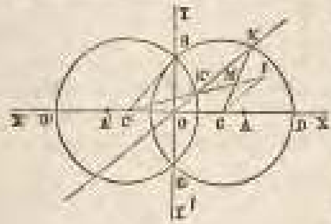


Fig. 91.

Si tomamos por ejes coordenados la recta XX' que pasa por los dos centros, y la YY' en que se hallan los dos puntos de interseccion de las circunferencias, el lugar geométrico que buscamos será evidentemente simétrico respecto de estos ejes, y, por lo mismo, resultará su ecuacion mas sencilla. Haciendo

$$CA = a, \quad OB = b, \quad OC = c;$$

uniendo C' con B, tendrémos $a^2 = b^2 + c^2$; y las dos circunferencias estarán representadas por las ecuaciones

$$[1] \qquad y^2 + (x - c)^2 = a^2 \quad \text{ó} \quad y^2 + (x + c)^2 = a^2 \qquad [2].$$

Si representamos por $y = mx$ la secante, y eliminamos y entre esta ecuacion y cada una de las precedentes, resultarán las que representan las abscisas de los puntos en que la secante corta á las dos circunferencias. Llamando x' á la abscisa de K y x'' á la de K', hallarémos

$$[3] \qquad (m^2 + 1)x'^2 - 2cx' = b^2 \quad \text{y} \quad (m^2 + 1)x''^2 + 2cx'' = b^2 \qquad [4].$$

Además, como las ordenadas de los puntos K y K' son respectivamente mx' y mx'', las ecuaciones de las rectas CK y C'K' serán (**70**)

$$[5] \qquad y = \frac{mx'}{x' - c}(x - c) \quad \text{ó} \quad y = \frac{mx''}{x'' + c}(x + c) \qquad [6].$$

Puede considerarse que en estas ecuaciones x ó y representan las coordenadas del punto M, por lo cual eliminando x', x'' y m entre las relaciones [3], [4], [5] y [6], tendrémos la ecuacion del lugar geométrico que buscamos.

Para conseguirlo, eliminarémos primero x' entre [3] y [5], y hechas las reducciones y ordenando con relacion á c, tendrémos

$$m^2(y^2 - b^2)c^2 - 2(a^2my - b^2m^2x)c - a^2y^2 + 2a^2mxy - b^2m^2x^2 = 0 \qquad [7].$$

Si entre las [4] y [6] eliminamos x'', hallarémos una ecuacion que no se diferenciará de la que acabamos de obtener sino en que c estará cambiada en $-c$. Ahora bien, para que estas dos ecuaciones, la [7] y la que resultaria de eliminar x'' entre [4] y [6] puedan verificarse á un mismo tiempo, es preciso que los términos que en la [7] contienen la primera potencia de c, se reduzcan á cero por sí mismos, y por esto tendrémos

$$a^2my - b^2m^2x = 0, \quad \text{y de aquí} \quad m = \frac{a^2y}{b^2x}$$

(sin que pueda admitirse el valor particular $m = 0$). Sustituyendo este valor en vez de u en la ecuacion (7), hallarémos una relacion constante entre x é y, que será la ecuacion del lugar geométrico. Así es como resulta

$$a^2c^2y^2[a^2(y^2-b^2)+b^2x^2]=0,$$

que suprimiendo el factor $a^2c^2y^2$, como extraño á la cuestion que nos ocupa, trasponiendo al segundo miembro y dividiendo por a^2b^2, dará

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Esta ecuacion representa una elipse referida á sus centro y ejes, los cuales son el diámetro $2a$ de uno de los círculos y la cuerda comun $2b$, y que tiene sus focus en los centros C′ y C de los círculos.

Observacion. I. Tambien podríamos haber obtenido el mismo resultado por medio de consideraciones geométricas. Tírese por C una paralela á OK que termine en su interseccion I con la prolongacion de C′M: como OC = OC′ por ser paralelas, tambien será IK′ = C′K′ = a; pero CK = a; luego IK′ = CK. Pero tenemos la proporcion

$$\frac{\mathrm{IM}}{\mathrm{IK'}}=\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CK}};$$

luego IM = CM, y, por consiguiente,

$$\mathrm{MC'}+\mathrm{MC}=\mathrm{MC'}+\mathrm{MI}=\mathrm{C'I}=\mathrm{C'K'}+\mathrm{K'I}=2a.$$

Esto nos manifiesta que el lugar geométrico del punto M tiene la propiedad de que la suma de las distancias desde cada uno de sus puntos á dos fijos C y C′ es constante é igual á $2a$, lo cual equivale á decir que este lugar es una elipse, cuyos focus están en C y C′ y cuyo eje mayor es $2a$.

II. Los extremos del eje mayor se hallarán tomando DA = OC y D′A′ = OC′.

222. Conviene que los lectores se ejerciten en la resolucion de las siguientes cuestiones:

I. Teorema. *Uniendo uno de los focus de la elipse con el punto de interseccion de la directriz correspondiente con una tangente dada, la recta de union es perpendicular al radio vector que corresponde al punto de contacto.*

II. Teorema. *La media proporcional geométrica entre los radios vectores correspondientes á un mismo punto de la elipse es el semidiámetro conjugado del que pasa por el mismo punto.*

III. Teorema. *La suma de los cuadrados de las proyecciones de dos diámetros conjugados cualesquiera de la elipse sobre una recta fija es una cantidad constante.*

IV. Teorema. *Uniendo dos puntos m y m′ de una elipse con los extremos A y B de un diámetro, y tirando la diagonal mn del cuadrilátero formado por las cuatro rectas de union, esta diagonal resultará paralela á la tangente TT′ tirada á la elipse por uno de los extremos A del mismo diámetro.*

V. Problema. *Dada una elipse inscribir en ella un triángulo, cuya superficie sea un máximo.*

VI. Problema. *Dados dos cuadrados* ABCD, *abcd* (fig. 92), *de los cuales el uno está dentro del otro y sea concéntrico con él, y dispuestos sus lados de manera que los del uno sean paralelos á las diagonales del otro, se quiere inscribir en el mayor una elipse que resulte circunscrita al menor.*

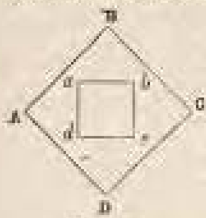


Fig. 92.

VII. Problema. *Hallar el lugar geométrico de los vértices de todos los paralelógramos construidos sobre los diámetros conjugados de una elipse.*

VIII. Problema. *Teniendo una série de elipses cuyo centro sea comun y cuyos ejes sean proporcionales y estén dirigidos sobre unas mismas rectas, y un punto fijo situado en el plano de estas curvas y tirando por este punto normales á todas ellas, se quiere hallar el lugar geométrico de todos los puntos en que estas rectas las cortan* NORMALMENTE.

IX. Problema. *Hallar el lugar geométrico de los centros de gravedad de todos los triángulos formados por dos ejes fijos y una recta de longitud constante que se mueve resbalando sus extremos sobre aquellos ejes.*

X. Problema. *Dadas dos elipses cuyos ejes sean proporcionales y respectivamente paralelos, hallar el lugar geométrico de los puntos en que cada diámetro de una de ellas corte al conjugado de su paralelo en la otra.*

XI. Problema. *Dada una série de elipses que tienen todas unos mismos focos, y habiendo tirado á todas ellas tangentes paralelas á una recta dada, hallar el lugar geométrico de los puntos de contacto.*

XII. Problema. *Dada una série de elipses que tengan todas una misma superficie, y cuyos ejes estén dirigidos segun las mismas rectas, y habiendo inscrito en cada una un rectángulo máximo, se quiere hallar el lugar geométrico de los vértices de estos rectángulos.*

223. Aplicaciones. I. Cuando un arco de bóveda esté formado por una semicircunferencia AHB (fig. 93) tangente en A y B á las aristas verticales AC y BD de los

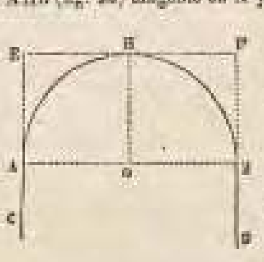


Fig. 93.

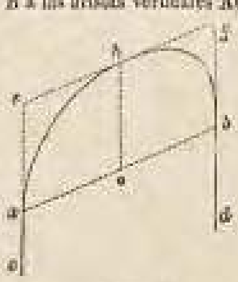


Fig. 94.

piés derechos, la tangente en el punto H, extremo del radio vertical OH, es una horizontal EF, paralela á la línea de arranque AB.

Cuando este arco haya de servir para sostener una rambla, la línea de arranque es (figura 94) tiene la misma inclinacion que esta, é igual la tiene la tangente ef tirada al estremo h de la vertical oh igual á oa ó á $\frac{1}{2}ab$. En este caso se llama *arco rampante* la curva ahb que forma el arco de la bóveda, y debe ser tangente en a, h y b á las rectas ce, ef y fd. Ordinariamente suele sustituirse esta curva por dos arcos de círculo, pero es mas suave el trazado cuando se emplea una elipse.

Como las tangentes ae y bf son paralelas, es preciso que ab sea un diámetro, su punto medio o el centro, y oh el conjugado de ao. Para trazar la curva, teniendo ya un sistema de diámetros conjugados iguales, no hay mas que describir una semicircunferencia sobre ab, y despues dar á las ordenadas una direccion paralela á oh (**207**).

Observacion. En la arquitectura y en el corte de piedras hallarémos otras muchas aplicaciones de la elipse.

224. II. La perspectiva de un círculo es generalmente una elipse cuando es plana la superficie del cuadro. Para poner en perspectiva un círculo O (fig. 93) trazado

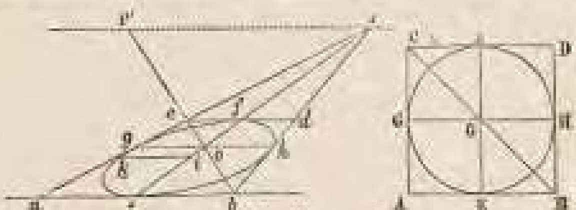


Fig. 93.

sobre un plano horizontal, se empieza por circunscribirle un cuadrado ABCD, que tenga los lados AB y CD paralelos á la base del cuadro, y se tiran la diagonal BC y los diámetros EF y GH que unen los puntos de contacto. Hecho esto, supongamos que ab es la horizontal que ha de representar en el cuadro de perspectiva el lado AB de aquel cuadrado circunscrito: segun sabemos por la perspectiva, las rectas ac, ef, bd, que son respectivamente las perspectivas de las AC, EF, BD, se cortan en un mismo punto P, que se llama el *punto de vista*, y la bc, perspectiva de la diagonal BC, pasa por un punto P', llamado el *punto de distancia*, y situado en la misma horizontal que P: ademas, las rectas cd y gh, que son respectivamente las perspectivas de las CD y GH, son paralelas á ab: finalmente, como las tangentes al círculo lo son tambien en su perspectiva, no hay mas que trazar una elipse que sea tangente en e, g, f y h á los cuatro lados del trapecio $abcd$.

Para conseguirlo, observarémos que por ser paralelas las tangentes ab y cd tiene que ser ef un diámetro, y su punto medio i el centro de la elipse, y que el conjugado de ef será paralelo á ab. Para determinar la longitud de este último nos valdrémos del teorema demostrado en el núm. **211**: tomarémos la media proporcional geométrica entre ae y ef, y la llevarémos desde i á k. Teniendo ya conocido un sistema de diámetros conjugados no hay mas que trazar la curva segun se esplicó en el número **207**.

Observaciones. I. La perspectiva de un círculo trazado en un plano vertical exige construcciones análogas á la anterior.

II. Las sombras y sus perspectivas ofrecen otras muchas aplicaciones de la elipse.

225. III. Para que la cuerda de un reverbero conserve su longitud y su posicion en un plano vertical, es preciso que la polea describa una elipse que tenga por focos los dos puntos de suspension, y por eje mayor la longitud de la cuerda. Se ha demostrado que en la posicion de equilibrio ocupa la polea el punto mas bajo de la elipse, siendo horizontal la tangente en este punto; por consiguiente, para hallar esta posicion de equilibrio no hay mas que tirar á la elipse una tangente que sea horizontal (**195**). Sean para esto A y B (fig. 96) los puntos de suspension: se tirará la vertical AH; desde B como centro con un radio igual á la longitud de la cuerda se trazará un arco de círculo que cortará en un punto D á AH; se unirá B con D, y por el medio I de AD se tirará una horizontal IM que cortará á BD en M: este punto marcará la posicion de equilibrio de la polea, y las rectas AM y BM señalarán las direcciones de las dos partes de la cuerda.

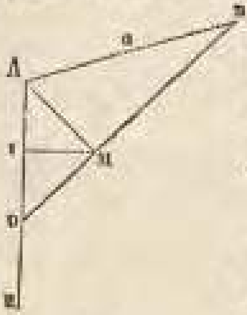


Fig. 96.

226. IV. Cuando se construyen salones con bóvedas elípticas se observa una propiedad acústica notable. Supongamos que la bóveda esté formada por una superficie de revolucion en que la semielipse AMA′ (fig. 78) sea uno de sus meridianos, y cuyo eje sea AA′. Cuando un radio sonoro viene á dar en la superficie, refleja sobre ella, formando el ángulo de reflexion igual al de incidencia, es decir, que el ángulo que forma el radio incidente con la normal levantada á la curva en el punto de incidencia es igual al ángulo que forma con esta normal el radio reflejado. Como la normal á una superficie de revolucion es la misma que corresponde á la curva meridiana que pasa por el punto que se considera en la superficie, resulta que, cuando desde uno de los focos F′ de la curva meridiana parte un radio sonoro F′M, este, despues de reflejado, va á pasar por el otro foco F, por ser iguales los ángulos F′MN y FMN que ambos radios forman con la normal MN; y como lo mismo sucederá con todos los radios que emanen de F′, ya toquen á la superficie en un punto de la curva AMA′ ó en alguno de cualquiera otra elipse meridiana, todo sonido que se produzca en F′ se oirá en F con mayor intensidad que en cualquiera otro punto del espacio, como efectivamente se observa en la práctica.

227. V. Un meridiano terrestre se diferencia muy poco de una elipse, y considerándolo como tal tiene por eje mayor el diámetro del ecuador, y por menor la distancia que separa á los dos polos. Estas longitudes se han calculado midiendo los grados del meridiano.

Se dice que un arco de elipse (ó de cualquiera curva) *vale un grado*, cuando las normales levantadas en los extremos de este arco formen entre sí un ángulo del mismo valor. Ahora bien: conociendo la longitud que tiene un arco de un grado en el polo y en el ecuador, se puede averiguar la longitud de los ejes.

Con efecto, se puede reemplazar cada uno de estos arcos por otro de círculo que se diferencie muy poco de él; pues en el núm. **191** hemos visto que la normal levantada á la elipse en un punto muy próximo á cualquiera de los extremos del eje mayor, corta á este eje en un punto que dista del centro la cantidad $\frac{c^2}{a}$, y, en su consecuencia, á una distancia del vértice igual á $a-\frac{c^2}{a}$ ó á $\frac{b^2}{a}$. Esto prueba que el arco que mida un grado, á contar desde el estremo del eje mayor, se confunde con otro de un círculo que tenga por radio $\frac{b^2}{a}$; y designando por d la longitud del arco de un grado de que estamos tratando, tendrémos

$$\frac{d}{2\pi\frac{b^2}{a}}=\frac{1^\circ}{360^\circ} \qquad [1].$$

Del mismo modo verémos que llamando d' la longitud del arco de un grado contado desde el estremo del eje menor, valdrá

$$\frac{d'}{2\pi\frac{a^2}{b}}=\frac{1^\circ}{360^\circ} \qquad [2].$$

Para sacar de estas dos igualdades los valores de a y b, elevarémos al cuadrado la [1], multiplicarémos el resultado por la proporcion [2] haciendo la multiplicacion término á término, y hallarémos

$$\frac{d^2d'}{(2\pi)^3b^3}=\frac{1}{(360)^3} \quad \text{de donde} \quad b=\frac{360\sqrt[3]{d^2d'}}{2\pi}.$$

Haciendo un cálculo análogo á este, hallarémos tambien

$$a=\frac{360\sqrt[3]{dd'^2}}{2\pi}.$$

De este modo se ha encontrado con una aproximacion de cerca de 500^m, que representando a el radio del ecuador, y b el que va al polo

$$a=6377100^m \quad \text{y} \quad b=6356100^m.$$

La razon

$$\frac{a-b}{a}=\frac{21000}{6377100}=\frac{1}{299},$$

se llama el aplanamiento de la tierra.

228. VI. Las órbitas de los planetas son (despreciando las pequeñas perturbaciones que experimentan) elipses, en las cuales el centro del sol ocupa uno de los focus: así es que la órbita de la tierra es una elipse, cuyo semieje mayor tiene una longitud de 153493000 kilómetros, y el semieje menor la de 153451100 kilómetros, y la escentricidad, ó sea la razon $\frac{c}{a}$, vale 0,01678, cuyos valores manifiestan que esta elipse difiere muy poco de un círculo.

Entre los planetas conocidos por los antiguos, el que tiene la órbita mas escéntrica es Mercurio, en la cual la razon $\frac{c}{a}$ es igual á 0,20562.

El planeta á cuya órbita corresponde mayor escentricidad es Juno, en la que $\frac{c}{a}=0,256$.

En virtud de la primera de las leyes de Képler, tirando por el focus F (fig. 97), que ocupa el centro del sol en la órbita planetaria, un radio vector ficticio Fm que pase por el centro del planeta, este radio vector irá describiendo áreas que serán proporcionales á los tiempos; es decir, que si m′ representa la posicion que ocupa el planeta al cabo de un tiempo dado, de 1″ por ejemplo, el área del sector mFm′ será constante, cualquiera que sea la posicion m que haya servido de punto de partida.

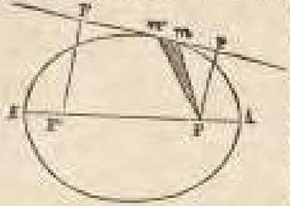


Fig. 97.

El arco mm′ representa la velocidad v del planeta, y la ley de Képler da el medio de espresar con la mayor sencillez la de las variaciones á que está sujeta esta velocidad. Con efecto, llamando T al tiempo que emplea el planeta en hacer una revolucion, y espresando este tiempo en segundos, el área del sector descrito en un segundo valdrá (**208**)

$$s=\frac{\pi ab}{T} \qquad (1);$$

pero como el arco mm′ es bastante pequeño, y se le puede considerar, por consiguiente, rectilíneo, tendrémos tambien

$$s=\tfrac{1}{2}mm'.p,$$

llamando p á la perpendicular FP bajada desde el focus F á la tangente en m, ó sobre la prolongacion del elemento mm′; por otra parte, tambien tendrémos, en virtud del teorema que se demostró en el núm. **209**, que llamando p' á la perpendicular F′P′ bajada desde el otro focus F′ sobre la misma tangente,

$$p=\frac{b^2}{p'}$$

y en su virtud

$$s=\tfrac{1}{2}mm'.\frac{b^2}{p'} \qquad (2).$$

Igualando los segundos miembros de las relaciones (1) y (2), resultará

$$\tfrac{1}{2}mm'.\frac{b^2}{p'}=\frac{\pi ab}{T},\quad \text{de donde sale } mm' \text{ ó sea } v=\frac{2\pi a}{bT}.p',$$

lo que quiere decir que la velocidad v del planeta es proporcional á la perpendicular p' bajada desde el segundo focus de la órbita á la tangente.

Segun esto, la velocidad alcanza el máximo valor cuando el planeta se halla en el punto A, que se llama su *perihelio*; pues en ese caso $p'=a+c$, y, por consiguiente,

$$v=\frac{2\pi a(a+c)}{bT}.$$

Por el contrario, cuando el planeta se encuentra en A′, posicion que se llama el *afelio*, tiene la velocidad el menor valor, pues entonces $p'=a-c$, y, en su consecuencia,

$$v=\frac{2\pi a(a-c)}{bT}.$$

Estas velocidades estremos guardan entre sí la razon $\frac{a+c}{a-c}$, ó, lo que es lo mismo, $1+\frac{c}{a}:1-\frac{c}{a}$. Por ejemplo, en la órbita terrestre, donde $\frac{c}{a}=0{,}01678$, la velocidad que lleva la tierra en su perihelio está con la que lleva en su afelio en la razon de $1+0{,}01678$ es á $1-0{,}01678$, ó como $1{,}01678$ es á $0{,}98322$.

Para Mercurio tenemos $\frac{c}{a}=0{,}20562$, y, por consiguiente, las velocidades estremas guardan entre sí la razon $1+0{,}20562$ á $1-0{,}20562$, ó la de $1{,}20562$ á $0{,}79438$.

CAPÍTULO VIII.

PROPIEDADES PRINCIPALES DE LA HIPÉRBOLA

§ I. — Centro; ejes; ordenadas; focos y directrices.

220. Centro; ejes; ordenadas. — Ya hemos visto en el número 174 que puede referirse la ecuacion de la hipérbola á las dos formas siguientes

$$[1] \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{ó} \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \qquad [2],$$

suponiendo que los ejes sean rectangulares; pero como la segunda forma se convierte en la primera cambiando x en y é y en x, no hace falta mas que estudiar la primera. La única diferencia que hay entre esta ecuacion y la de la elipse es que b^2 tiene en la de la hipérbola el signo negativo.

Debemos decir, como en el núm. 179, que el origen de las coordenadas está en el *centro* de la curva, una vez que la ecuacion de ésta no sufre alteracion cuando se pone $-x$ y $-y$ en vez de x y de y.

Por cada valor que demos á x resultarán para y dos iguales y de signo contrario; del mismo modo que para x dos iguales y de contrario signo por cada uno de los que demos á y; por consiguiente, debemos deducir, á semejanza de lo que dijimos en el número 179, que los ejes rectangulares á que está referida la curva son tambien sus ejes de simetría. Se los llama *ejes* de la hipérbola, y la dividen en cuatro partes superponibles.

Haciendo $y=0$, resulta $x=\pm a$; y la hipotesis $x=0$ da $y=\pm b\sqrt{-1}$; por consiguiente, dirémos que el eje de las x corta á la curva, pero que no lo hace el de las y. Por esta causa se llama al primero *eje transverso*, y su longitud es $2a$; pero aunque el segundo no corte á la hipérbola, se ha convenido en decir que su longitud es $2b$.

Se dice que la hipérbola es *equilátera* cuando $a=b$.

De la ecuacion [1] se saca

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \qquad [3],$$

y observando atentamente esta fórmula comprenderémos que no hay punto alguno de la curva que tenga una abscisa menor que a

en valor absoluto; y que haciendo crecer á x desde a hasta ∞, crecen tambien los valores de y desde 0 hasta ∞; por consiguiente, la forma de la curva tiene que ser la que indica la figura 98. Los puntos A y A′ en que la corta su eje transverso se llaman los dos *vértices* de la hipérbola.

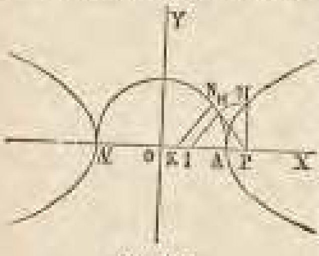


Fig. 98.

En vista de la ecuacion de esta curva se la puede construir por puntos del modo siguiente. Sea OP (figura 98) la abscisa de un punto cuya ordenada queremos determinar; tomando AA′ por diámetro describirémos sobre él una circunferencia, á la que desde el punto P tirarémos una tangente PN; tomarémos PI $=b$ y PK $=a$; unirémos N con K, y tirarémos la paralela IH á KN, despues tomarémos PM igual á PH, y el punto M será uno de los de la curva, pues se verificará

$$\frac{\text{MP}}{\text{PN}} \quad \text{ó} \quad \frac{\text{PH}}{\text{PN}}=\frac{\text{PI}}{\text{PK}}=\frac{b}{a}.$$

Pero como

$$\text{NP}=\sqrt{\text{PA}.\text{PA}'}=\sqrt{(x-a)(x+a)}=\sqrt{x^2-a^2},$$

será

$$\frac{\text{MP}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{b}{a},$$

que equivale á la relacion (3).

230. Del mismo modo que en el núm. 180 podrémos calcular las coordenadas de tantos puntos de la curva como sean necesarios, sin necesidad de estraer raiz alguna, pues haciendo

$$x=\pm a.\frac{1+t^2}{1-t^2} \quad \text{é} \quad y=\pm b.\frac{2t}{1-t^2},$$

estas fórmulas verificarán la ecuacion (1) independientemente de t; y dando á t valores crecientes desde 0 hasta 1, x irá variando desde a hasta ∞, é y desde 0 hasta ∞.

231. Teorema. *Los cuadrados de las ordenadas perpendiculares al eje transverso son proporcionales á los productos de las distancias que hay desde los piés de estas ordenadas á los dos vértices.*

En efecto, si $M(x, y)$ y $M'(x', y')$ son dos puntos de la hipérbola, tendrémos

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \quad \text{ó} \quad y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(x'^2 - a^2),$$

que dividiendo ordenadamente darán

$$\frac{y^2}{y'^2} = \frac{x^2 - a^2}{x'^2 - a^2} = \frac{(x-a)(x+a)}{(x'-a)(x'+a)};$$

y como $y = MP$, $y' = M'P'$, $x - a = AP$, $x + a = A'P$, $x' - a = AP'$ y $x' + a = A'P'$,

podrémos escribir $$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{M'P'}^2} = \frac{AP \cdot A'P}{AP' \cdot A'P'},$$

que es la proporcion que nos habiamos propuesto demostrar.

232. Focos. — En el núm. 12 dijimos que, siempre que en una curva sea constante la diferencia de las distancias que haya entre cualquiera de sus puntos y dos fijos, esta curva es una hipérbola; y ahora vamos á demostrar que en toda hipérbola se verifica esta propiedad.

Tomemos sobre el eje transverso dos puntos F y F' (fig. 99) colocados á distinto lado del centro, y que disten de éste la cantidad $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; y suponiendo que M es uno de los puntos de la hipérbola correspondiente á una abscisa positiva, uniéndole con F y F' se verificará que

$$MF^2 = y^2 + (x - c)^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) + (x - c)^2 = \left(\frac{cx}{a} - a\right)^2,$$

de donde saldrá $$MF = \frac{cx}{a} - a \qquad [4],$$

teniendo en cuenta que, siendo x igual por lo menos á a, y c mayor que a, tiene que ser el término $\frac{cx}{a}$ mayor que a. Del mismo modo se verificará

$$\overline{MF'}^2 = y^2 + (x + c)^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) + (x + c)^2 = \left(\frac{cx}{a} + a\right)^2,$$

por lo que $$MF' = \frac{cx}{a} + a \qquad [5].$$

y restando las [4] y [5], hallarémos

$$MF'-MF=2a,$$

que es una cantidad constante, y que demuestra respecto á la rama de hipérbola colocada á la derecha del eje de las y la propiedad que hemos enunciado. Por la simetría de la curva no puede cabernos duda de que se verifica lo mismo en la otra rama, sin mas diferencia que la de tener sus puntos mas distantes de F que de F'.

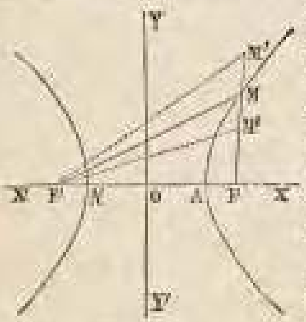


Fig. 93.

Estos puntos F y F' son los *focus* de la hipérbola, y sus distancias MF y MF' á cualquiera punto de la curva se llaman los *radios vectores* de aquel punto M; y atendidas estas denominaciones podemos enunciar la propiedad anterior diciendo que *la diferencia de los radios vectores de cualquiera hipérbola es igual al eje transverso.*

Observaciones. I. Esta propiedad es peculiar y esclusiva de los puntos de la hipérbola, pues si M' es otro situado fuera de ella (es decir, colocado en la parte del plano hácia donde la curva vuelve su convexidad), si le unimos con F y F', la recta M'F producirá al cortar á la hipérbola un punto M, que unido con F', dará

$M'F'<MF'+MM'$, por lo que $M'F'-M'F<MF'+MM'-M'F$,

ó sea $\quad M'F'-M'F<MF'-MF$, ó bien $<2a$.

Si el punto que se considera fuese interior á la curva (es decir, que estuviese en la parte del plano hácia la cual presenta la curva su concavidad), representándole por M'' y uniéndole con F' y F, la prolongacion de M''F dará en su interseccion con la hipérbola un punto M, que unido con F', nos permitirá decir que

$$M''F'>MF'-MM'',$$

de donde se deduce que

$$M''F'-M''F>MF'-MM''-M''F,$$

ó que $\quad M''F'-M''F>MF'-MF$, ó sea $>2a$.

Por consiguiente, podemos ya decir que *un punto situado en el plano de una hipérbola estará fuera de la curva cuando la diferencia de sus distancias á los focus sea menor que el eje transverso; que estará sobre la curva cuando esta diferencia sea igual á dicho eje, y dentro de la hipérbola cuando sea mayor.*

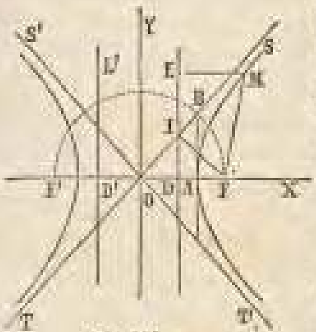


Fig. 100.

II. Para construir los focus no hay mas que levantar en uno de los vértices A (fig. 100) una perpendicular al eje transverso, tomar sobre esta una distancia AB igual á b, y haciendo centro en O, describir una semicircunferencia con el radio OB: los puntos F y F′ en que esta circunferencia corta á las prolongaciones del eje transverso, serán los focus; pues tendrémos

$$OF = OB = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

La distancia FF′, ó sea $2c$, es lo que se llama *la excentricidad* de la hipérbola.

III. En el num. 12 hemos visto cómo se puede construir la curva por un movimiento continuo, fundándose en la propiedad de que nos ocupamos; pero tambien se la puede construir por puntos, pues haciendo centro en el focus F trazando un arco de círculo con un radio cualquiera, pero mayor que $c - a$, y haciendo despues centro en el otro focus F′, y describiendo con un radio igual á la suma del que nos ha servido antes y $2a$ otro arco, este cortará al anterior en un punto que pertenecerá á la hipérbola.

IV. Lo mismo en la hipérbola que en la elipse, cuando están referidas á su centro y ejes, el radio vector es una funcion entera racional y de primer grado de la abscisa correspondiente al punto que se considera; en general, todo radio vector es una funcion entera, racional y de primer grado de las coordenadas del punto correspondiente de la hipérbola, cualquiera que sea el sistema de ejes coordenados rectilíneos á que esté referida (183, IV).

233 Directrices. — En la hipérbola sucede lo mismo que dijimos respecto de la elipse, y es que á cada focus corresponde una recta colocada de tal manera que la razon de las distancias que hay desde cada punto de la curva á dicha recta y al focus es constante.

Sean DL (fig. 100) una perpendicular al eje transverso, y M un punto de la hipérbola; únase M con F, y tírese desde M la ML perpendicular á DL, y representando OD por d, tendrémos

$$MF=\frac{cx}{a}-a, \quad ML=x-d;$$

de modo que llamando k la razon constante entre estas dos distancias, deberá verificarse

$$\frac{\frac{cx}{a}-a}{x-d}=k, \quad \text{de donde ha de resultar} \quad \left(\frac{c}{a}-k\right)x+dk-a=0.$$

Para que esta igualdad pueda verificarse, cualquiera que sea el valor de x, es preciso que separadamente sean

$$\frac{c}{a}=k \quad \text{y} \quad dk=a, \quad \text{de donde se deduce que} \quad d=\frac{a^2}{c};$$

es decir, que la distancia d ha de ser una tercera proporcional á la semiescentricidad y al semieje transverso, y, por consiguiente, la razon entre las distancias MF y ML desde el punto que se considera al focus y á la recta DL ha de ser la misma que la que hay entre la escentricidad y el eje transverso.

Del mismo modo hallaríamos otra recta D'L' colocada análogamente respecto al focus F', y su distancia al centro seria tambien $\frac{a^2}{c}$.

Estas rectas son las *directrices* de la hipérbola; y como c es mayor que a, la distancia $\frac{a^2}{c}$ será menor que a, lo cual manifiesta que las directrices tienen que hallarse colocadas entre los dos vértices A y A' de la curva.

La propiedad que acabamos de demostrar se puede enunciar diciendo que *las distancias desde cada punto de la hipérbola á cada focus y á la directriz correspondiente guardan entre sí la misma razon que la escentricidad con el eje transverso.*

OBSERVACIONES. I. Para construir la directriz DL no hay mas que levantar en el punto A la AB perpendicular á OA, tomar en ella una distancia AB igual á b, unir O con B, bajar desde F una perpendicular FI á OB, y desde el pié I de esta perpendicular bajar otra DL al eje transverso; pues se tendrá de este modo

$$\frac{OD}{OI}=\frac{OI}{OF},$$

y como los triángulos rectángulos OAB y OIF son iguales por serlo sus hipotenusas y comun á los dos el ángulo en O, será $OI=OA$, y podrá escribirse

$$\frac{OD}{OA}=\frac{OA}{OF}, \quad \text{ó sea} \quad \frac{OD}{a}=\frac{a}{c},$$

de donde resulta que $$OD=\frac{a^2}{c}.$$

II. Cuando la hipérbola es equilátera, el punto D es el medio de OF; pues el triángulo OAB, y, por consiguiente, su igual OIF, es isósceles, á causa de que $a=b$.

III. Como en la hipérbola es c mayor que a, cualquier punto de esta curva está mas cerca de la directriz que del focus correspondiente, que es lo contrario de lo que vimos en la elipse.

§ II. — TANGENTE Y NORMAL.

234. Tangente. — El valor del coeficiente angular de la tangente tirada á la hipérbola en el punto (x', y') es (101)

$$m=\frac{b^2x'}{a^2y'} \qquad [1],$$

que únicamente se diferencia del coeficiente angular correspondiente á la tangente á la elipse en que b^2 está cambiado en $-b^2$.

Para averiguar el modo con que varía este coeficiente, sustituirémos, en vez de y', su valor sacado de la ecuacion de la curva, y hechas las reducciones, hallarémos

$$m=\frac{b}{a}\cdot\frac{x'}{\sqrt{x'^2-a^2}}, \quad \text{ó sea} \quad m=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x'^2}}}.$$

Considerando el arco de curva comprendido en el ángulo YOX, verémos que á proporcion que x' va creciendo desde $+a$ hasta $+\infty$, irá decreciendo m desde $+\infty$ hasta $+\frac{b}{a}$, lo que manifiesta que en el intérvalo que consideramos presenta la curva su concavidad hácia las y negativas (109), y puede decirse, atendida su simetría, que durante todo su curso presenta la concavidad hácia la prolongacion del eje transverso.

Como en el vértice se verifica que $x'=a$ é $y'=0$, el valor de m se convierte en el infinito, por lo cual podemos decir que la tangente en este punto es perpendicular al eje transverso.

235. Segun lo que dejamos dicho (101), la ecuacion de la tangente á la hipérbola en el punto (x', y') será

$$y-y'=+\frac{b^2x'}{a^2y'}(x-x') \qquad [2],$$

á la que es preciso unir la relacion

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1 \qquad [3],$$

que espresa hallarse el punto (x', y') sobre la curva.

La ecuacion [2] se puede poner bajo la forma

$$\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}=\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2};$$

y, por consiguiente, en virtud de la [3] se puede escribir

$$\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}=1 \qquad [4],$$

que es la ecuacion de la tangente.

236. PROBLEMAS. I. *Tirar una tangente á la hipérbola por un punto* (x", y") *esterior á la curva; es decir, por un punto colocado entre sus dos ramas.*

Para determinar las coordenadas x' é y' del punto de contacto sirven las dos ecuaciones

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1 \quad \text{y} \quad \frac{x''x'}{a^2}-\frac{y''y'}{b^2}=1,$$

la segunda de las cuales espresa que el punto dado está sobre la tangente.

Como la eliminacion produce una ecuacion de segundo grado, resultan por lo general dos tangentes, que se reducen á una sola cuando el punto dado está sobre la misma hipérbola.

En vez de determinar por medio del cálculo las coordenadas x' é y' del punto de contacto, es preferible hallar éste por la interseccion de dos lugares geométricos, como en el núm. 187; esto es, por la interseccion de la misma hipérbola con la *cuarda de los contactos*, que tiene por coordenadas en el origen

$$x=\frac{a^2}{x''} \quad \text{é} \quad y=-\frac{b^2}{y''}.$$

II. *Tirar una tangente paralela á una recta dada que tenga por coeficiente angular á* m.

Procediendo del mismo modo que en el núm. 187, II, hallarémos

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}.$$

Esta ecuacion solamente se diferencia de la que hallamos para la tangente á la elipse en que b^2 está aquí cambiado en $-b^2$.

Segun vemos por esta hay dos tangentes paralelas á la recta dada; pero se confunden en una sola que pasa por el centro, cuando

$$m^2=\frac{b^2}{a^2} \quad \text{ó} \quad m=\pm\frac{b}{a},$$

y es imposible el problema cuando

$$m^2<\frac{b^2}{a^2} \quad \text{ó} \quad m<\frac{b}{a}$$

en valor absoluto; de modo que llamando α al ángulo agudo que tenga por tangente $\frac{b}{a}$, es preciso, para que el problema sea posible, que la recta dada forme con el eje de las x un ángulo que esté comprendido entre α y $180^0-\alpha$.

Observacion. Cuando se buscan las coordenadas de los puntos de contacto, resultan para x' y para y' dos pares de valores iguales y de signo contrario, lo que manifiesta que los dos puntos de contacto se encuentran en los estremos de una misma recta que pasa por el centro.

237. Haciendo $y=0$ en la ecuacion de la tangente, resulta $x=\frac{a^2}{x'}$, que siendo una cantidad independiente de b y de y', manifiesta, lo mismo que en la elipse, que si se describen varias hipérbolas que tengan todas un mismo eje transverso, y en los puntos de todas ellas cuya abscisa comun sea x', se levantan tangentes, todas estas pasarán por un mismo punto del eje transverso.

Observacion. Como el valor de x tiene el mismo signo que el de x', la tangente corta al eje transverso entre el centro y la rama de hipérbola á que toca, y en su consecuencia, pasa siempre entre las dos ramas de la curva.

238. **Normal.** — Buscando la ecuacion de la normal á la hipérbola en el punto cuyas coordenadas son x' é y', encontrarémos

$$y-y'=-\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x'),$$

que no se diferencia mas de la normal á la elipse que en estar cambiado b^2 en $-b^2$.

Para hallar el punto de interseccion de esta normal con el eje transverso, hay que hacer $y=0$ en esta ecuacion, y asi resulta

$$x=x'+\frac{b^2x'}{a^2},\quad \text{ó sea}\quad x=\frac{c^2}{a^2}x'.$$

Esto manifiesta que la abscisa x del punto de interseccion es proporcional á la abscisa x'.

Su mínimo valor corresponde al mínimo de x', que es a: en este caso, hallamos $x=\frac{c^2}{a}$, cantidad mayor que c, de modo que una normal infinitamente próxima al vértice corta á la prolongacion del eje transverso mas allá del focus, contando desde el centro.

239. Teorema. *Toda tangente á la hipérbola divide en dos partes iguales al ángulo que forman los dos radios vectores tirados al punto de contacto.*

Sean MT la tangente á la hipérbola en el punto M (fig. 104), y MF, MF' los radios vectores correspondientes al mismo: vamos á demostrar que es cierta la igualdad

$$\frac{\text{TF}}{\text{TF}'}=\frac{\text{MF}}{\text{MF}'}.$$

Con efecto, como en el núm. 236 vimos que el valor de la distancia OT es $\frac{a^2}{x}$, llamando x á la abscisa del punto M, resulta

$$\text{TF}=\text{OF}-\text{OT}=c-\frac{a^2}{x}=\frac{cx-a^2}{x},$$

y $$\text{TF}'=\text{OF}'+\text{OT}=c+\frac{a^2}{x}=\frac{cx+a^2}{x};$$

por lo tanto, $$\frac{\text{TF}}{\text{TF}'}=\frac{cx-a^2}{cx+a^2}.$$

Tambien tenemos, en virtud de lo establecido en el número 232, que

$$\text{MF}=\frac{cx}{a}-a=\frac{cx-a^2}{a},$$

y $$\text{MF}'=\frac{cx}{a}+a=\frac{cx+a^2}{a},$$

de donde se deduce que $\frac{\text{MF}}{\text{MF}'}=\frac{cx-a^2}{cx+a^2}$.

Vemos, por lo tanto, que las razones $\frac{\text{TF}}{\text{TF}'}$ y $\frac{\text{MF}}{\text{MF}'}$ son iguales, y que la recta MT es la bisectriz del ángulo FMF'.

Observaciones. I. Resulta de aquí que la normal MN es bisectriz del ángulo suplementario IMF.

II. Tambien se deduce que si una elipse y una hipérbola tienen los mismos focus, las tangentes tiradas á cada curva en un mismo punto de interseccion son perpendiculares entre sí (192).

240. Fundados en el teorema precedente espondrémos un método para tirar una tangente á la hipérbola por cualquier punto dado.

Suponiendo, primeramente, que el punto dado M esté sobre la misma curva, tirarémos los radios vectores MF y MF', sobre MF' tomarémos MH = MF, unirémos H con F, y desde M bajarémos una perpendicular MT á HF, y esta línea TT' será la tangente que se pedia; pues en virtud de la construccion hecha será el ángulo HMT igual al TMF.

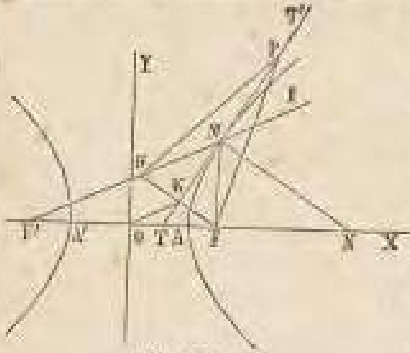


Fig. 101.

241. Si el punto dado está en P fuera de la curva, haciendo centro en él, y con un radio igual á PF, trazarémos un arco de círculo; tomando despues por centro á F', y con un radio igual al eje transverso $2a$, describirémos otro arco, que cortará al primero en un punto H; unirémos H con F, y tirando desde P una perpendicular PT á la recta FH tendrémos la tangente pedida. Para tener el punto de contacto M, unirémos H con F' y prolongarémos F'H.

Esta construccion podrá verificarse siempre que el punto P sea *esterior* á la hipérbola en el sentido en que mas arriba usamos de esta denominacion; pues siempre que el punto P sea esterior á la curva, tendrémos (**232**, OBS. 1)

$$PF' - PF < 2a \qquad [1].$$

Como hemos supuesto que P está mas cerca de F que de F', será $PF < PF'$, y con mayor razon

$$PF < PF' + 2a \qquad [2];$$

además, el triángulo FPF' da $FF' < PF' + PF$, y una vez que $2a$ es menor que FF', con mas razon será

$$2a < PF' + PF \qquad [3].$$

De la desigualdad [1] resulta que

$$PF' < 2a + PF;$$

es decir, que la distancia de los centros es menor que la suma de los dos radios. Por otra parte, si PF es mayor que $2a$, la desigualdad [2] manifiesta que

$$PF' > PF - 2a;$$

y si PF es menor que $2a$, de la [3] sacarémos

$$PF' > 2a - PF;$$

luego en uno y en otro caso la distancia de los centros es mayor que la diferencia de los radios, y, por consiguiente, los dos arcos de círculo tienen que cortarse.

La demostracion para el caso en que P estuviese mas cerca de F' que de F seria análoga á la que acabamos de dar.

Observaciones. I. Como estos arcos se cortarán en dos puntos, habrá dos posiciones para H, y resultarán dos tangentes.

II. Uniendo el punto O, medio de FF', con el K, medio de HF, resultará una paralela á MF', y que tendrá por longitud la mitad de F'H, siendo, por consiguiente, igual á a. De aquí se deduce este teorema: *el lugar geométrico de los piés de todas las perpendiculares bajadas desde uno de los focus de la hipérbola sobre sus tangentes es la circunferencia de círculo que tiene por diámetro el eje transverso.*

242. Tambien, fundándonos en el teorema del núm. 239, podemos resolver el siguiente

Problema. *Tirar una tangente á la hipérbola paralela á una recta dada.*

Bájese desde el focus F una perpendicular FH á la recta dada, y haciendo centro en el otro focus F', trácese con un radio igual al eje transverso una circunferencia que cortará á dicha perpendicular en un punto H; tírese una paralela á la recta dada por el punto K, medio de FH: esta paralela será la tangente que se buscaba, y su interseccion con F'H prolongada será el punto de contacto M.

Para que sea posible la resolucion de este problema es indispensable que la circunferencia corte á la recta FH, y esto exige que la distancia que haya desde el focus F' á la recta dada sea menor que $2a$; así es que, si representamos la recta dada por

$y=mx+n$, tendrémos que representar la de FH por $y=-\frac{1}{m}(x-c)$, y deberá verificarse (75) que

$$\frac{0-\frac{1}{m}(-c-c)}{\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}}<2a, \quad \text{ó que} \quad \frac{c}{\sqrt{m^2+1}}<a,$$

y de aquí se saca $m^2>\frac{c^2-a^2}{a^2}$, ó sea $m^2>\frac{b^2}{a^2}$. Por consiguiente, es preciso que el valor absoluto del coeficiente angular m sea mayor que $\frac{b}{a}$, lo que equivale á decir que, si α representa el ángulo agudo que tenga $\frac{b}{a}$ por tangente, es preciso que la recta dada forme con el eje de las x un ángulo que esté comprendido entre α y $180^0-\alpha$, que es la condicion que hallamos en el número **236**, II.

§ III. — Diámetros y cuerdas suplementarias.

243. Diámetros. — Del mismo modo que en el núm. **196** se demuestra que *los diámetros de la hipérbola son líneas rectas que pasan por el centro, y recíprocamente.* Además, llamando m al coeficiente angular de un sistema de cuerdas paralelas, y m' al correspondiente á un diámetro que las divida en dos partes iguales, hallarémos que entre m y m' debe existir la relacion constante

$$mm'=\frac{b^2}{a^2} \qquad [1],$$

que únicamente se diferencia de la que hallamos en el núm. **196** en que b^2 está cambiado en $-b^2$.

No todos los diámetros de la hipérbola cortan á la curva; pues siendo $y=m'x$ la ecuacion de un diámetro, si la combinamos con la de la hipérbola para hallar las coordenadas de los puntos de interseccion de aquel con esta, hallarémos

$$x=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-m'^2a^2}} \quad \text{ó} \quad y=\pm\frac{m'ab}{\sqrt{b^2-m'^2a^2}};$$

y como es preciso para que sean reales estos valores que $b^2-m'^2a^2>0$, ó que $m'<\frac{b}{a}$ en valor absoluto, resulta que para que un diámetro encuentre á la hipérbola es necesario que, llamando α al ángulo agudo que tenga $\frac{b}{a}$ por tangente, dicho diámetro forme con el eje de las x un ángulo que esté comprendido entre 0 y α, ó entre 180° y $180^\circ-\alpha$.

Llamarémos *diámetros transversos* á todos los que encuentren á la curva.

OBSERVACION. De la relacion [1] resulta que, si m' es menor que $\frac{b}{a}$ en valor absoluto, es preciso que m sea mayor que $\frac{b}{a}$; por consiguiente, las cuerdas que estén divididas en dos partes iguales por un diámetro transverso tienen que formar con el eje de las x un ángulo que esté comprendido entre α y $180^\circ-\alpha$. Por el contrario, las que estén divididas en dos partes iguales por un diámetro no transverso, tienen que formar con el eje de las x ángulos comprendidos entre 0 y α, ó entre 180° y $180^\circ-\alpha$.

244. TEOREMA. *La tangente á la hipérbola en un estremo de cualquier diámetro transverso es paralela al sistema de cuerdas que el mismo diámetro divide en dos partes iguales.*

La demostracion es la misma que en el núm. 197.

OBSERVACION. De este teorema se deduce que todas las cuerdas que estén divididas en dos partes iguales por un diámetro transverso han de tener sus estremos en una misma rama de la hipérbola, pues todas son paralelas á una misma tangente, y esta pasa entre las dos ramas (237, OBS.), y sería imposible que ninguna paralela á esta tangente cortase á la vez á las dos ramas.

Al contrario, es claro que las cuerdas divididas en dos partes iguales por un diámetro no transverso tienen cada uno de sus estremos en diferente rama de la hipérbola; pues ninguna que tuviese sus estremos en una misma rama podria tener su punto medio entre las dos de la curva.

245. **Cuerdas suplementarias.** — Del mismo modo que en el número 198 demostrarémos que si μ y μ' representan los coeficientes angulares de dos cuerdas suplementarias, es decir, de dos

cuerdas que unan un mismo punto de la curva con los dos estremos de un diámetro transverso, entre estos coeficientes tiene que existir la relacion constante

$$\mu\mu' = \frac{b^2}{a^2},$$

que únicamente se diferencia de la que hallamos para las cuerdas suplementarias de la elipse en que b^2 se ha sustituido por $-b^2$.

De esta condicion deduciremos, como en el núm. 199: 1.° que *el diámetro que divide á una cuerda en dos partes iguales es paralelo á la suplementaria de esta; y 2.° que tirando una cuerda paralela á un diámetro transverso dado, la tangente tirada á la hipérbola por un estremo de este es paralela á la cuerda suplementaria de aquella.*

De aquí se deduce, como al tratar de la elipse, un método para tirar una tangente, ya sea por un punto dado sobre la curva, ó ya se quiera que resulte paralela á una recta dada, con tal que esta recta tenga un coeficiente angular, cuyo valor absoluto sea mayor que $\frac{b}{a}$.

Observacion. De la misma definicion de las cuerdas suplementarias se deduce que una de ellas tiene sus estremos sobre una misma rama de la hipérbola, y la otra cada estremo en distinta rama.

246. Diámetros conjugados.—Llámanse así en la hipérbola, como dijimos ya en la elipse, dos diámetros respectivamente paralelos á dos cuerdas suplementarias.

Llamando m y m' á los coeficientes angulares de estos diámetros, y teniendo presente lo demostrado en el núm. **245**, podemos escribir

$$mm' = \frac{b^2}{a^2} \qquad [1].$$

Recíprocamente, cuando existe esta relacion entre los coeficientes angulares de dos diámetros, estos son paralelos á dos cuerdas suplementarias y por consiguiente, son conjugados: cuya demostracion es la misma que en el núm. **200**.

Lo mismo que en el número citado verémos tambien que *cada* *diámetro conjugado divide en dos partes iguales á todas las cuerdas paralelas al otro.*

OBSERVACION. Se deduce de esta propiedad *que en cada sistema de diámetros conjugados solo uno de ellos es transverso*; pues si ambos lo fuesen, los estremos de las cuerdas que dividen en dos partes iguales estarian sobre una misma rama de la hipérbola (244, OBS.), y no serian las cuerdas suplementarias.

Esto mismo se deduce tambien de la relacion (1); pues para que el primer diámetro sea transverso es preciso que $m<\frac{b}{a}$ (243), y en este caso tiene que ser $m'>\frac{b}{a}$, lo que quiere decir que el segundo diámetro no encuentra á la curva.

247. PROBLEMA. *Conociendo la direccion de un diametro de la hipérbola construir su conjugado.*

Suponiendo que OM (fig. 102) es la direccion que se conoce de un diámetro, tírese una cuerda AD paralela á este, el diámetro DD′ y la cuerda AD′ suplementaria de la AD; y la direccion ON paralela á AD′ será la del diámetro conjugado de OM.


Fig. 102.

Hubiera bastado unir el centro con el punto medio de la cuerda AD paralela al diámetro conocido.

Si el diámetro OM que se da conocido lo fuese por su ecuacion $y=mx$, la de su conjugado ON seria

$$y=\frac{b^2}{a^2m}x.$$

OBSERVACION. Cuando sea $a=b$, los coeficientes angulares de los diámetros conjugados son respectivamente m y $\frac{1}{m}$, lo cual quiere decir que *en toda hipérbola equilátera dos diámetros que sean conjugados forman con el eje de las x ángulos complementarios.*

248. **Angulo de dos diámetros conjugados.** — Si llamamos V al ángulo que forman entre sí dos diámetros conjugados de la hipérbola, tendrémos (74)

$$\operatorname{tang} V = \frac{m - \frac{b^2}{a^2 m}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{c^2}\left(m - \frac{b^2}{a^2 m}\right).$$

Para que este ángulo sea recto es indispensable, ó que $m=0$ ó que $m=\infty$; y como en el primer caso $\frac{b^2}{a^2 m}=\infty$, y en el segundo $\frac{b^2}{a^2 m}=0$, *el único sistema de diámetros conjugados que puede formar ángulo recto en la hipérbola es el determinado por los dos ejes de la curva.*

La tangente V puede tomar todos los valores posibles menos cero. Para que se redujese á cero seria preciso que $m=\pm\frac{b}{a}$, y en este caso tambien $\frac{b^2}{a^2 m}$ seria $\pm\frac{b}{a}$, y en su consecuencia, los dos diámetros conjugados se confundirian en una sola recta; luego equivale á decir que no hay diámetros conjugados que cumplan con aquella condicion; pues estas rectas, que tendrian por ecuacion

$$y=\pm\frac{b}{a}x,$$

no podrian hallar á la hipérbola sino á una distancia infinita, como es fácil conocer combinando esta ecuacion con la de la curva.

Volverémos mas adelante á ocuparnos de las rectas representadas por la ecuacion anterior, que hacen un papel muy importante en la hipérbola, y que se llaman las asímtotas de esta curva.

Observacion. El ángulo V que forman entre sí dos diámetros conjugados es el mismo que forma el de estos dos que sea transverso con la tangente tirada á la hipérbola por uno de sus estremos, y el mismo tambien que forman dos cuerdas suplementarias respectivamente paralelas á ellos. Esto mismo hace ver que dicho ángulo puede recibir todos los valores posibles, menos el de cero, pues este corresponderia á un punto colocado sobre la curva á una distancia infinita.

249. Llamando d á la longitud del semidiámetro transverso que tenga por ecuacion

$$y=mx,$$

y combinando esta con la de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

hallarémos

$$x^2=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2m^2} \quad \text{é} \quad y^2=\frac{a^2b^2m^2}{b^2-a^2m^2},$$

y por consiguiente,

$$d^2=x^2+y^2=\frac{a^2b^2(1+m^2)}{b^2-a^2m^2} \qquad [1].$$

Como hemos supuesto que el diámetro es transverso, tendrémos $m^2<\frac{b^2}{a^2}$, y en su consecuencia, será positivo el valor de d^2.

Sustituyendo en esta espresion, en vez del coeficiente angular m el correspondiente al diámetro conjugado del que se considera, es decir, por $\frac{b^2}{a^2m^2}$, resultará despues de hechas todas las reducciones,

$$\frac{a^4m^2+b^4}{a^2m^2-b^2},$$

que siendo una cantidad evidentemente negativa, se puede establecer

$$-d'^2=\frac{a^4m^2+b^4}{a^2m^2-b^2}, \quad \text{ó sea} \quad d'^2=\frac{a^4m^2+b^4}{b^2-a^2m^2} \qquad [2].$$

Esta cantidad d' que acabamos de hallar se llama por analogía la longitud del semidiámetro conjugado del que tenia por longitud la cantidad d.

Para determinar el valor de m, de modo que sean iguales los de d y d', no hay mas que igualar los numeradores de las espresiones [1] y [2], y haciéndolo resultará

$$(a^2-b^2)(m^2a^2-b^2)=0,$$

de donde sale

$$m=\pm\frac{b}{a}.$$

Pero como en el núm. 248 hemos visto que cuando m toma este valor, los dos diámetros conjugados se confunden con una sola recta, que no toca á la curva sino á una distancia infinita, no hay, propiamente hablando, ningun sistema de dos diámetros conjugados iguales en la hipérbola, si a es desigual con b.

Observacion. Si $a=b$ es nulo el factor a^2-b^2, y cualquiera que sea m queda satisfecha la ecuacion anterior: esto quiere decir que *en la hipérbola equilátera siempre son iguales los diámetros conjugados.*

250. Teorema. *La diferencia de los cuadrados de dos diámetros conjugados es una cantidad constante é igual á la diferencia de los cuadrados de los ejes.*

Restando ordenadamente las relaciones (1) y (2) del número anterior, resulta

$$d^2-d'^2=\frac{a^2b^2+a^2b^2m^2-a^4m^2-b^4}{b^2-a^2m^2}=\frac{(b^2-a^2m^2)(a^2-b^2)}{b^2-a^2m^2},$$

de donde se deduce que

$$d^2-d'^2=a^2-b^2,$$

lo que demuestra el teorema.

251. Teorema. *El área del paralelógramo construido sobre dos diámetros conjugados es constante é igual á la del rectángulo construido sobre los ejes.*

Si calculamos el área del paralelógramo construido sobre dos semidiámetros conjugados d y d' que forman entre sí el ángulo V, como será la cuarta parte de la del construido sobre los diámetros enteros, si demostramos que la primera es constante, quedará demostrado que tambien lo es la segunda. Ahora bien; representándola por S, tendrémos

$$S=dd'\operatorname{sen}V, \quad \text{de donde} \quad S^2=d^2d'^2\operatorname{sen}^2V;$$

pero habiendo hallado en el núm. 248 que

$$\operatorname{tang}V=\frac{m-\dfrac{b^2}{a^2m}}{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\frac{a^2m^2-b^2}{(a^2+b^2)m}, \quad \text{será} \quad \operatorname{tang}^2V=\frac{(a^2m^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2m^2},$$

y por consiguiente,

$$\operatorname{sen}^2 V=\frac{(a^2m^2-b^2)^2}{(a^2m^2-b^2)^2+(a^2+b^2)^2m^2}=\frac{(a^2m^2-b^2)^2}{a^4m^4+a^4m^2+b^4m^2+b^4}$$

$$=\frac{(a^2m^2-b^2)^2}{(a^4m^2+b^4)(m^2+1)};$$

y sustituyendo en la espresion de S^2 los valores de d^2, de d'^2 y de $\operatorname{sen}^2 V$, resultará

$$S^2=\frac{a^2b^2(1+m^2)}{b^2-a^2m^2}\cdot\frac{a^4m^2+b^4}{b^2-a^2m^2}\cdot\frac{(a^2m^2-b^2)^2}{(a^4m^2+b^4)(m^2+1)},$$

ó sea

$$S^2=a^2b^2,\quad \text{y por último}\quad S=ab,$$

con lo que el teorema queda demostrado.

252. Teorema. *La ecuacion de la hipérbola tiene la misma forma cuando está referida á un sistema de diámetros conjugados que cuando lo está á sus ejes.*

En efecto, como cada diámetro divide en dos partes iguales á todas las cuerdas paralelas á su conjugado (245), si contamos las coordenadas paralelamente á estos ejes, á cada valor de x ó de y corresponderán dos iguales y de signo contrario de y ó de x, por lo cual la ecuacion no contendrá mas que potencias pares de estas coordenadas; y como ha de ser de segundo grado (58), tendrá la forma

$$Mx^2+Ny^2=P.$$

Suponiendo que a' es el semidiámetro transverso, en cuya direccion se cuenten las x, y b' el semidiámetro no transverso sobre el cual se cuenten las y, tendrémos que

por $\quad y=0\quad$ será $\quad x=\pm a'$,

y por $\quad x=0,\quad y=\pm b'\sqrt{-1}$,

lo que da $\quad \dfrac{P}{M}=a'^2\quad$ y $\quad\dfrac{P}{N}=-b'^2$;

por consiguiente,

$$M=\frac{P}{a'^2}\quad \text{y}\quad N=-\frac{P}{b'^2},$$

cuyos valores sustituidos en la ecuacion de arriba y suprimiendo el factor comun P, darán

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1,$$

que es lo que se queria demostrar.

OBSERVACIONES. I. Cuando la hipérbola es equilátera resulta $a'=b'$; pues los valores [1] y [2] del núm. **249** se reducen ambos á

$$a'^2=a'^2=\frac{a^2(1+m^2)}{1-m^2};$$

por consiguiente, la ecuacion de la curva referida á dos diámetros conjugados iguales $a'=b'$ es en este caso

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{a'^2}=1, \quad \text{ó lo que es lo mismo}, \quad x^2-y^2=a'^2.$$

II. Como las propiedades que hemos demostrado en los números **234**, **235**, **236** y **243** á **246** no exigen que sean rectangulares los ejes á que esté referida la curva, se verifican tambien cuando lo está á un sistema cualquiera de diámetros conjugados.

Por lo tanto, la ecuacion de la tangente á la hipérbola en el punto (x', y') es

$$\frac{xx'}{a'^2}-\frac{yy'}{b'^2}=1;$$

la de una tangente paralela á la recta que representa $y=mx$ es

$$y=mx\pm\sqrt{a'^2m^2-b'^2};$$

por último, los coeficientes angulares m y m' de dos cuerdas suplementarias, ó el de una cuerda y el del diámetro que la divide en dos partes iguales, ó los de dos diámetros conjugados han de satisfacer á la relacion

$$mm'=\frac{b'^2}{a'^2}.$$

§ IV. — ASÍNTOTAS.

253. Ecuaciones de las asíntotas. — Siguiendo la marcha que hemos indicado en el núm. **123** hallarémos que las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola referidas al centro y ejes de esta curva son

$$y=\pm\frac{b}{a}x \qquad [1];$$

pero se puede llegar directamente al mismo resultado sin conocer la teoría general de las asimtotas de las curvas algebráicas.

La ecuacion de la hipérbola puede escribirse bajo la forma

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \qquad [2],$$

para lo cual no hay mas que resolverla con relacion á y, multiplicar el segundo miembro por x y dividir al mismo tiempo por x^2 la cantidad comprendida en el radical.

Bajo esta forma se observa que, á proporcion que x aumenta en valor absoluto, es decir, que á medida que se considere un punto cada vez mas distante del orígen, disminuye el término $\frac{a^2}{x^2}$, y puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea, de tal modo que los valores de y tienden á convertirse en los que da la ecuacion [1]. Espresando esto en otros términos, quiere decir que la hipérbola se aproxima cada vez más á una de las rectas que representa la ecuacion [1] á proporcion que se va alejando del orígen.

Para comparar mejor la curva con estas rectas, considerarémos primeramente la media rama de hipérbola, que tiene sus dos coordenadas x é y positivas, escribirémos simplemente

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \qquad [3],$$

y supondrémos

$$Y=\frac{b}{a}x \qquad [4];$$

y de estas ecuaciones sacarémos

$$Y-y=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2}),$$

ó bien multiplicando y dividiendo al mismo tiempo por $x+\sqrt{x^2-a^2}$,

$$Y-y=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Aquí vemos que á medida que x va aumentando disminuye la diferencia $Y-y$, y que puede llegar á ser tan pequeña como se quiera, una vez que x puede crecer indefinidamente. De modo que la rama de curva que está representada por la ecuacion [3] va sin cesar acercándose á la recta que representa la [4].

Teniendo en consideracion lo simétrico de la curva respecto á los ejes, podrémos concluir diciendo que sus cuatro semi-ramas se aproximan indefinidamente á las rectas que tienen por ecuaciones

$$Y = \pm \frac{b}{a} x;$$

es decir, que la semi-rama superior de la derecha y la semi-rama inferior de la izquierda se acercan continua é indefinidamente á la recta que representa la anterior ecuacion tomando el signo superior; y á la que representa cuando se toma el signo inferior se acercan las otras dos semi-ramas.

Estas rectas se llaman las *asímtotas* de la hipérbola, y segun manifiestan sus ecuaciones, coinciden con las diagonales del rectángulo construido sobre los ejes.

OBSERVACIONES. I. En el caso de que la hipérbola sea equilátera, las asímtotas son bisectrices de los ángulos formados por los ejes, y por consiguiente, perpendiculares entre sí.

II. Las asímtotas encuentran la hipérbola en el infinito, y son las únicas rectas tiradas por el centro que gozan de esta propiedad; pues combinando la ecuacion $y = mx$ con la de la hipérbola, resulta

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 - a^2b^2 = 0;$$

y para que esta ecuacion tenga raices infinitas es preciso que

$$b^2 - a^2m^2 = 0, \quad \text{de donde resulta} \quad m = \pm \frac{b}{a},$$

lo cual manifiesta que la recta $y = mx$ debe coincidir con una de las asímtotas.

254. Conviene recordar el papel que han representado en los párrafos anteriores de este capítulo las rectas comprendidas en las ecuaciones $y = \pm \frac{b}{a} x$.

En el núm. 236 hemos visto que es condicion indispensable, para que se pueda tirar una tangente paralela á una recta dada, que esta forme con el eje transverso un ángulo que sea mayor que α y menor que su suplemento $180° - \alpha$, siendo α un ángulo que tiene por tangente $\frac{b}{a}$. Esto equivale á decir que para que se pueda resolver el problema es preciso que la paralela que por el centro se tire á la recta dada caiga dentro del ángulo SOS' (figura 100) formado por las mitades superiores de las asimtotas

Tambien se ha visto en el núm. 243 que es necesario, para que un diámetro sea transverso, que forme con el eje de las x un ángulo que esté comprendido entre 0 y α ó entre 180° y $180^0-\alpha$. Es lo mismo que si dijéramos que todo diámetro transverso ha de estar comprendido en el ángulo SOT' que las asimtotas forman á la derecha del centro, ó en su opuesto por el vértice S'OT.

Asimismo hemos dicho en el núm. 248 que dos diámetros conjugados pueden formar entre sí cualquier ángulo menos el ángulo cero; pues en este caso se confunden los dos con una sola recta que tiene por coeficiente angular $\pm\frac{b}{a}$. Esta direccion límite es la que toman las asimtotas. Tambien corresponde esta direccion, segun lo dicho en el núm. 249, á los diámetros conjugados iguales.

255. Se puede considerar que una asimtota es el límite de las posiciones que sucesivamente va tomando una tangente á la hipérbola cuando el punto de contacto se va alejando del vértice. Con efecto, la ecuacion de la tangente (235) se puede escribir

$$y=\frac{b^2x'}{a^2y'}x-\frac{b^2}{y'},$$

y suponiendo que el punto de contacto está infinitamente distante del orígen, tendrémos $\frac{x'}{y'}=\pm\frac{a}{b}$, y $\frac{b^2}{y'}=0$, y esto hace que la ecuacion de la tangente se convierta en

$$y=\pm\frac{b}{a}x,$$

que manifiesta que la tangente se ha confundido con una de las asimtotas.

256. Teorema. *Las dos asimtotas de la hipérbola coinciden con las diagonales del paralelógramo que se forme sobre dos diámetros conjugados cualesquiera.*

Tomando por ejes coordenados los dos diámetros conjugados de que se trate, la forma de la ecuacion de la hipérbola será (252)

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1.$$

Sea $y=mx$ la ecuacion de la recta que pase por el centro, y eliminando y entre esta y la anterior, resulta

$$(b'^2-a'^2m^2)x^2-a'^2b'^2=0,$$

cuya ecuacion tiene sus raices infinitas cuando sea

$$m=\pm\frac{b'}{a'}.$$

Como estas ecuaciones $y=\pm\frac{b'}{a'}x$ representan las asimtotas (253, OBS. II), y son tambien las de las diagonales del paralelógramo construido sobre los dos diámetros conjugados, podemos decir que las asimtotas y las diagonales coinciden en unas mismas rectas.

257. TEOREMA. *Las dos partes de una misma secante comprendidas entre cada rama de la hipérbola y la asimtota correspondiente son iguales.*

Suponiendo que la secante de que se trata es la MM' (fig. 103), que corta en N y N' á las asimtotas; tomando por ejes coordenados la recta OX que pasa por el centro de la curva y por el punto medio de la secante, y la recta OY paralela á esta secante, quedará referida la curva á un sistema de diámetros conjugados (246), y las asimtotas tendrán por ecuaciones

$$y=\pm mx.$$

Si hacemos en estas $x=\mathrm{OP}$, resultarán para y dos valores iguales, si no se atiende á su signo; luego

$$\mathrm{NP}=\mathrm{N'P};$$

mas como por construccion

$$\mathrm{MP}=\mathrm{M'P},$$

será

$$\mathrm{MN}=\mathrm{M'N'},$$

que es lo se quería demostrar.

258. De este teorema se deduce un método muy espedito para construir la hipérbola cuando se conocen uno de sus puntos y las asimtotas.

Sean ST y S'T' (fig. 103) las asimtotas, y M el punto dado; tí-

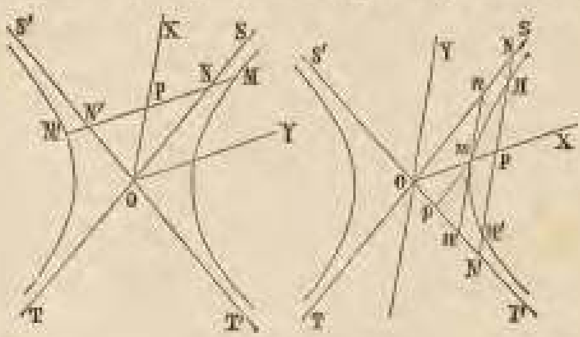


Fig. 103.

rese por este punto una secante cualquiera, que cortará á las asimtotas en dos puntos N y N'; tómese N'M' = NM, y el punto M' que resulte será uno de los de la hipérbola: haciendo lo mismo sobre todas las secantes que se tiren, sea por el punto M ó por cualquiera de los que vayamos determinando, se pueden hallar tantos puntos como se quiera de la hipérbola, y haciendo pasar por todos estos puntos una línea continua, se tendrá la hipérbola con todo el grado de aproximacion que permite el dibujo.

Observacion. Tambien se puede trazar la hipérbola fundándose en el anterior teorema, cuando se conocen tres puntos y una asimtota, pues inmediatamente se hallarian dos puntos de la otra asimtota.

259. Corolario. *La parte de una tangente que queda comprendida entre las dos asimtotas está dividida por mitad en el punto de contacto.*

Supongamos que nn' (fig. 103) es una tangente á la hipérbola en el punto m. Tírese una secante NN' paralela á esta tangente, y cortará á la curva en los puntos M y M'; tírese tambien el diámetro Om, y este dividirá á la cuerda MM' en dos partes iguales (244), de modo que tendrémos PM = PM'; y como en virtud del teorema del núm. 257 tiene que ser MN = M'N', será PN = PN', y en su consecuencia y en virtud del paralelismo, será forzosamente $mn=mn'$.

Tambien hubiera bastado recordar que la tangente nn' á la hipérbola en el punto m es el límite de las posiciones que va tomando una secante NN' que se mueve paralelamente á sí misma, acercándose uno á otro los dos puntos M y M' de su interseccion con la curva hasta confundirse estos en uno solo m; porque verificándose constantemente que $MN=M'N'$ en todas las posiciones de la secante, tambien debe suceder en el límite de sus posiciones que $mn=mn'$.

De aquí se deduce un método muy sencillo para tirar una tangente á la hipérbola en un punto m. Consiste en tirar una recta mp paralela á una de las asimtotas; tomar $pn'=Op$, y hacer pasar por los puntos n' y m otra recta nn' que será la tangente; porque $\frac{mn}{mn'}=\frac{Op}{pn'}$, y por consiguiente, $mn=mn'$.

260. Cuando se conocen las asimtotas y un punto de la hipérbola, se puede hallar inmediatamente un sistema de diámetros conjugados; pues suponiendo que el punto dado sea m, tirando la tangente nn' correspondiente á este punto, uniendo O con m y trazando la OY paralela á nn', Om y OY serán las direcciones de dos diámetros conjugados (244), y Om y mn sus longitudes (256).

261. TEOREMA. *El rectángulo formado por las dos partes de una secante comprendidas entre un punto de la curva y las asimtotas es igual al cuadrado formado por el semidiámetro paralelo á la secante.*

Supongamos que la secante de que se trata es la MM' (fig. 103) y que corta á las asimtotas en los puntos N y N'. Tomarémos por eje de las x el diámetro que divide á MM' en dos partes iguales, y por el de las y una paralela OY á la secante; de este modo la curva referida á un sistema de diámetros conjugados tendrá por ecuacion en el caso de la primera figura

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1,$$

de donde podemos deducir

$$\overline{MP}^2, \quad \text{ó sea} \quad y^2=\frac{b'^2}{a'^2}x^2-b'^2;$$

y como tambien sabemos (256) que

$$\overline{NP}^2=\frac{b'^2}{a'^2}x^2,$$

será

$$\overline{NP}^2-\overline{MP}^2=b'^2, \quad \text{ó sea} \quad (NP-MP)(NP+MP)=b'^2;$$

mas como

$$NP-MP=MN \quad y \quad NP+MP=N'P+MP=MN',$$

resulta que

$$MN.MN'=b'^2,$$

que es lo que nos habiamos propuesto demostrar.

En el caso de la segunda figura, será

$$\frac{y^2}{a'^2}-\frac{x^2}{b'^2}=1,$$

y de aquí deducirémos que

$$\overline{MP}^2 \quad \text{ó sea} \quad y^2=\frac{a'^2}{b'^2}x^2+a'^2;$$

además

$$\overline{NP}^2=\frac{a'^2}{b'^2}x^2,$$

luego

$$\overline{MP}^2-\overline{NP}^2=a'^2, \quad \text{ó bien} \quad (MP-NP)(MP+NP)=a'^2,$$

y como

$$MP-NP=MN \quad y \quad MP+NP=MP+N'P=MN',$$

resulta finalmente

$$MN.MN'=a'^2,$$

que es lo que se trataba de demostrar.

262. Problema. *Construir los ejes de la hipérbola cuando se conozca un sistema de diámetros conjugados.*

Sean estos diámetros los OC y OD (fig. 101), y supongamos que OD sea el transverso, es decir, que el punto D pertenezca á la curva. Tírese por el punto D una paralela á OC, tómese DE=DF=OC, y uniendo O con E y con F, las rectas OE y OF serán las asímtotas (256), y las bisectrices OX y OY de los ángulos que forman las asímtotas serán las direcciones de los ejes de la hipérbola, y de estos el OX será el transverso; pues siendo D uno de los puntos de la curva, ha de quedar una de las ramas en el ángulo EOF, y la otra en su opuesto.

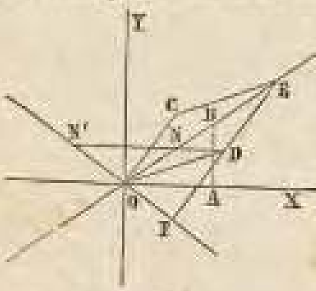


Fig. 104.

Para hallar las longitudes de los semiejes, tirarémos por el punto D una paralela á OX, que cortará á las asímtotas en dos puntos N y N', buscarémos la media proporcional geométrica entre DN y DN', y llevándola desde O hasta A, el punto A será uno de los vértices de la hipérbola. Por último, levantando la perpendicular AB á OX y prolongándola hasta que corte á la asímtota OE, AB será la longitud del semieje no transverso (261).

263. **Ecuacion de las asímtotas.** — Cuando se refiere la hipérbola á sus asímtotas toma su ecuacion una forma particular y muy sencilla.

Tomarémos como punto de partida la ecuacion de esta curva referida á su centro y ejes

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad [1],$$

y harémos uso de las fórmulas que sirven para pasar de un sistema de coordenadas rectangulares á otro de oblícuas sin cambiar el orígen, y que son

$$x=x'\cos\alpha+y'\cos\alpha' \quad \text{é} \quad y=x'\operatorname{sen}\alpha+y'\operatorname{sen}\alpha'.$$

Tomando por eje de las x' la asímtota que pasa por debajo del vértice A (fig. 105), y por el de las y' la que pasa por encima, tendrémos

$$\operatorname{tang}\alpha=-\frac{b}{a},$$

de donde sale

$$\operatorname{sen}\alpha=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{b}{c}, \quad \text{y} \quad \cos\alpha=+\frac{a}{c};$$

$$\operatorname{tang}\alpha'=+\frac{b}{a},$$

de donde resulta

$$\operatorname{sen}\alpha' = +\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = +\frac{b}{c}, \quad \text{y} \quad \cos\alpha' = +\frac{a}{c}.$$

En virtud de estas hipótesis, las fórmulas de transformacion escritas arriba se convierten en

$$x = \frac{a}{c}x' + \frac{a}{c}y' \quad \text{ó} \quad y = -\frac{b}{c}x' + \frac{b}{c}y',$$

ó sea

$$\frac{x}{a} = \frac{y'+x'}{c} \quad \text{ó} \quad \frac{y}{b} = \frac{y'-x'}{c},$$

por lo que sustituidos estos valores en la ecuacion [1], darán

$$\frac{(y'+x')^2}{c^2} - \frac{(y'-x')^2}{c^2} = 1, \quad \text{ó bien} \quad \frac{4x'y'}{c^2} = 1,$$

de donde resulta

$$x'y' = \tfrac{1}{4}c^2 \qquad [2],$$

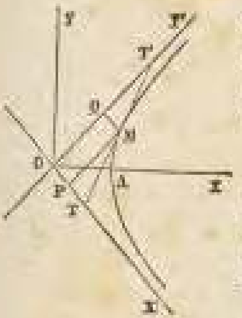


Fig. 105.

que quiere decir que el rectángulo de las coordenadas MP y MQ (figura 105) correspondientes á un mismo punto M de la hipérbola es constante.

OBSERVACIONES. I. De aquí resulta que tambien es constante el paralelógramo OPMQ comprendido entre estas coordenadas y las asímtotas, pues está espresado por

MP.MQ.sen QOP, ó lo que es lo mismo por $x'y'\operatorname{sen}\theta$,

llamando θ al ángulo que forman entre sí las asímtotas, ó finalmente, por $\frac{1}{4}c^2\operatorname{sen}\theta$.

II. Observando detenidamente la ecuacion [2] se echa de ver que la curva se va aproximando indefinidamente á los ejes OX′ y OY′, pues á proporcion que aumenta x' disminuye y', y cuando x' llegue á ser mayor que cualquiera cantidad dada, será y' menor que todo valor por pequeño que sea.

III. Tambien se echa de ver en esta ecuacion que todos los puntos de la curva están comprendidos en el ángulo Y'OX' ó en su opuesto por el vértice; pues siendo el producto $x'y'$ positivo, es preciso que ambas coordenadas x' ó y' tengan el mismo signo.

IV. Cuando la hipérbola es equilátera, su ecuacion es la misma [2], pero está referida á ejes rectangulares.

264. Aplicando á la ecuacion $xy=\frac{1}{4}c^2$ la regla del núm. 100, resulta para el coeficiente angular m de la tangente á la curva en el punto que tiene por coordenadas x' é y' el valor

$$m=-\frac{y'}{x'};$$

de modo que la tangente tendrá por ecuacion

$$y-y'=-\frac{y'}{x'}(x-x'), \quad \text{ó lo que es lo mismo} \quad \frac{x}{2x'}+\frac{y}{2y'}=1$$

La forma de esta ecuacion manifiesta que, para construir la tangente á la curva en un punto dado, no hay mas que tomar sobre uno de los ejes, por ejemplo sobre el de las x, un punto T que tenga una abscisa doble que la correspondiente al punto dado, y unir los puntos T y M que es la misma construccion que se hizo en el núm. 259.

§ V. — Area de un segmento de hipérbola.

265. Vamos á ocuparnos en este párrafo de valuar el área comprendida entre el arco BM (fig. 106) de la hipérbola, la asíntota OX, y las ordenadas BA y MP paralelas á la otra asíntota OY.

Fig. 106.

Principiarémos por recordar que la diferencia entre las derivadas de dos funciones de una misma variable es igual á la derivada de la diferencia de estas funciones, y que, en virtud de esto, cuando las derivadas de dos funciones son constantemente iguales, la única diferencia que puede haber entre las funciones es una cantidad cuya derivada sea cero; es decir, que las funciones no pueden diferenciarse mas que en una cantidad constante, ó en otros términos, que si para todos los valores de x se verifica que

$$F'(x)=f'(x),$$

es preciso que sea

$$F(x)=f(x)+\text{constante}.$$

Entendido esto, observarémos que, suponiendo constante la abscisa OA y variable la OP, el área ABMP variará al mismo tiempo que x, y podrá considerarse como una funcion de la misma x y representarse por $\varphi(x)$.

Suponiendo ahora que M' sea un punto de la hipérbola infinitamente próximo al M, tírense la ordenada M'P' y las rectas MK y M'I paralelas á OX; llámese α á la distancia PP' y β á la MI ó M'K, y por último, designando por θ el ángulo de las asíntotas, tendrémos

$$\varphi(x)=\mathrm{ABMP},\quad \varphi(x+\alpha)=\mathrm{ABM'P'},$$

de donde resulta que

$$\varphi(x+\alpha)-\varphi(x)=\mathrm{ABM'P'}-\mathrm{ABMP}=\mathrm{PMM'P'},$$

y

$$\frac{\varphi(x+\alpha)-\varphi(x)}{\alpha}=\frac{\mathrm{PMM'P'}}{\alpha} \qquad [1].$$

Pero es evidente que

$$\mathrm{PIM'P'}<\mathrm{PMM'P'}<\mathrm{PMKP'},$$

ó poniendo, en vez de los paralelógramos PIM'P' y PMKP', sus expresiones

$$(y-\beta)\alpha \operatorname{sen}\theta<\mathrm{PMM'P'}<y\alpha \operatorname{sen}\theta,$$

de donde sale

$$(y-\beta)\operatorname{sen}\theta<\frac{\mathrm{PMM'P'}}{\alpha}<y\operatorname{sen}\theta \qquad [2].$$

Ahora bien, suponiendo que el punto M' se acerque infinitamente al M, α y β tenderán hácia cero al mismo tiempo, el primer miembro de las desigualdades [2] tendrá por límite $y\operatorname{sen}\theta$, esto es, el valor del tercer miembro: por consiguiente, esta cantidad es tambien el límite del segundo miembro, y tendrémos

$$\text{límite}\,\frac{\mathrm{PMM'P'}}{\alpha}=y\operatorname{sen}\theta.$$

En virtud de esto la ecuacion [1] dará

$$\text{límite}\,\frac{\varphi(x+\alpha)-\varphi(x)}{\alpha}=\text{límite}\,\frac{\mathrm{PMM'P'}}{\alpha}=y\operatorname{sen}\theta,$$

ó bien teniendo presente que, en virtud de la definicion, el primer miembro es la derivada de $\varphi(x)$ con relacion á x, podemos escribir

$$\varphi'(x)=y\operatorname{sen}\theta \qquad [3].$$

Sacando ahora de la ecuacion de la hipérbola, que es

$$xy=m^2,$$

el valor de y en funcion de x, y sustituyéndolo en la [3], resultará

$$\varphi'(x)=m^2\operatorname{sen}\theta\,.\,\frac{1}{x}.$$

Pero como $\frac{1}{x}$ es la derivada del logaritmo neperiano de x, el segundo miembro de la ecuacion anterior es la derivada de $m^2 \operatorname{sen}\theta . \log' x$, llamando $\log' x$ al logaritmo neperiano de x. Por consiguiente, en virtud de la propiedad analítica que hemos recordado al principiar este párrafo; tendrémos

$$\varphi(x) \quad ó \quad ABMP = m^2 \operatorname{sen}\theta . \log' x + C.$$

Para determinar esta constante arbitraria C, observarémos que $\varphi(x)$ debe reducirse á cero cuando sea $x = OA$; por consiguiente, representando por u la abscisa OA, dirémos que

$$0 = m^2 \operatorname{sen}\theta . \log' u + C, \quad \text{de donde saldrá} \quad C = -m^2 \operatorname{sen}\theta . \log' u,$$

y por lo tanto,

$$ABMP = m^2 \operatorname{sen}\theta . (\log' x - \log' u) = m^2 \operatorname{sen}\theta . \log' \frac{x}{u} \qquad [4].$$

Si OA fuese la unidad, quedaría simplemente

$$ABMP = m^2 \operatorname{sen}\theta . \log' x \qquad [5].$$

266. Suponiendo para abreviar que $ABMP = \varphi$, y $m^2 \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{n}$, se podrá escribir la ecuacion [5] de este modo

$$n\varphi = \log' x, \quad \text{de donde resultará} \quad e^{n\varphi} = x,$$

representando por e la base del sistema de logaritmos neperianos. Pero haciendo $e^n = B$, se tendrá

$$B^\varphi = x;$$

por consiguiente, el área que estamos considerando es igual al logaritmo de la abscisa x en el sistema cuya base es B, ó sea en el sistema que tiene por base e^n, ó, lo que es lo mismo, en el de la base $e^{\frac{1}{m^2 \operatorname{sen}\theta}}$.

Si la hipérbola fuese equilátera, y se tomase m por unidad de longitud, la cantidad $m^2 \operatorname{sen}\theta$ se reduciria á la unidad, y el área representada por φ sería el logaritmo neperiano de la abscisa x.

Por esta razon suele llamarse tambien logaritmos *hiperbólicos* á los neperianos.

§ VI. — Ejercicios y aplicaciones (*).

267. Teorema. *El semieje no transverso es medio proporcional entre las perpendiculares bajadas desde cada uno de los dos focos sobre cualquier tangente.*

La demostracion es la misma que en el núm. **209**, con la única diferencia de que, estando colocado cada foco á distinto lado de la tangente, hay que tomar el radical $\sqrt{1 + m^2}$ con distinto signo en la espresion de cada perpendicular p y p'.

268. Teorema. *Tirando por cualquier punto* M *de la hipérbola una paralela á la asíntota* OS *y prolongándola hasta que encuentre á la directriz* DL, *la longitud* MK *de dicha paralela es igual al radio vector* MF *que va al punto* M *de que se trata.*

Sean x é y las coordenadas del punto K, y x' é y' las del M, y como la recta MK

(*) Queda á cargo del lector hacer las figuras que faltan.

es paralela á la asímtota OS, se tendrá

$$y-y'=\frac{b}{a}(x-x'),$$

y en su consecuencia,

$$\overline{MK}^2=(x-x')^2+\frac{b^2}{a^2}(x-x')^2=\frac{(x-x')^2c^2}{a^2}.$$

Pero como el punto K está sobre la directriz, será $x=\frac{a^2}{c}$, por lo que, sustituyendo,

resultará $$\overline{MK}^2=\frac{(a^2-cx')^2}{a^2}=\left(a-\frac{cx'}{a}\right)^2,$$

y por lo tanto, $$MK=\frac{cx'}{a}-a,$$

si se tiene en cuenta que $\frac{cx'}{a}$ es mayor que a; de modo que se tendrá, por último, MK = MF.

La misma sería la demostracion considerando el otro foco y la otra directriz.

269. TEOREMA. *Tirando por cada uno de los puntos de una recta* LL′ *dos tangentes á la hipérbola, como las* NM *y* NM′, *las cuerdas que unen los puntos de contacto de cada dos tangentes pertenecientes á un mismo par, tales como* NM′, *pasan todas por un mismo punto.*

Se demuestra del mismo modo que en el núm. **212**, y da lugar á las mismas observaciones.

270. TEOREMA. *Tirando por dos puntos cualesquiera de la hipérbola* M′ *y* M″ *paralelas á las asímtotas, todas pasan por un mismo punto del diámetro que divide en dos partes iguales la cuerda* M′M″.

Si tomamos las asímtotas por ejes, y llamamos x' é y' á las coordenadas del punto M′, y x'' é y'' á las del M″, las del punto P en que se cortan las rectas M′P y M″P paralelas á las asímtotas serán x' é y''; y como las coordenadas del punto medio I de la cuerda M′M″ son $\frac{1}{2}(x'+x'')$ y $\frac{1}{2}(y'+y'')$, el diámetro OI estará representado por

$$y=\frac{y'+y''}{x'+x''}x.$$

Esta ecuacion queda satisfecha cuando se hacen en ella $x=x'$ é $y=y''$, pues quitando el denominador se convierte en

$$y''(x'+x'')=(y'+y'')x', \quad \text{ó sea} \quad x''y''=x'y',$$

cantidades que en efecto son iguales, pues la ecuacion de la hipérbola referida á sus asímtotas tiene la forma $xy=$ constante.

271. TEOREMA. *Cuando dos tangentes paralelas* KL *y* K′L′ *están cortadas en los puntos* T *y* T′ *por otra tangente* TT′, *las partes* DT *y* D′T′ *de las primeras comprendidas entre los puntos de contacto* D *y* D′ *y la tercer tangente tienen por media proporcional el semidiámetro* OE *paralelo á ellas.*

La única diferencia que existe entre la demostracion de esta propiedad y la del número **211** es que las ordenadas DT y D′T′ tienen signos contrarios.

272. TEOREMA. *Cuando en una hipérbola equilátera se tiran desde una rama á otra cuerdas, como la* AA', *paralelas á una recta dada, y sobre cada una como diámetro se describe una circunferencia, todas estas circunferencias pasan por los extremos* B *y* B' *de un diámetro perpendicular al que divide las cuerdas paralelas en dos partes iguales.*

Tómense por ejes el diámetro OY, que divide en dos partes iguales á dichas cuerdas, y su conjugado OX, que es paralelo á las mismas, y llamando a' la longitud del diámetro OD, la ecuacion de la curva será (**252**, obs. I)

$$x^2-y^2=a'^2 \qquad [1].$$

Tambien tendrémos, si x' é y' son las coordenadas del punto A,

$$x'^2-y'^2=a'^2 \qquad [2].$$

La ecuacion del círculo que tiene su centro en C y por radio CA será

$$x^2+(y-y')^2+2x(y-y')\cos\theta=x'^2,$$

en que θ representa el ángulo formado por los ejes. Desarrollando esta ecuacion y poniendo en vez de x'^2 su valor sacado de la [2], tomará la forma

$$x^2+y^2-2y'y+2xy\cos\theta-2xy'\cos\theta=a'^2 \qquad [3].$$

Esta relacion queda independiente de y', y, por consiguiente de la posicion que tenga la cuerda AA', suponiendo

$$y+x\cos\theta=0 \qquad [4],$$

que es la ecuacion de una recta tirada por el orígen perpendicularmente al eje de las y (**76**). Esto prueba que todas las circunferencias representadas por la ecuacion [3] pasan por los puntos cuyas coordenadas x é y satisfagan á un mismo tiempo á las ecuaciones [3] y [4].

De la [4] se saca $x\cos\theta=-y$, cuyo valor puesto en la [3], convierte esta ecuacion en

$$x^2-y^2=a'^2;$$

luego los puntos fijos de que se trata están sobre la hipérbola, y como ya se sabia que están sobre el diámetro perpendicular á OY no pueden ser otros que los B y B'.

273. PROBLEMA. *Dado un arco de hipérbola, concluirla.*

Del mismo modo que en el núm. **214** se determinará el centro, que estará en el lado hácia el que presenta la curva su convexidad; y aplicando el teorema del número **271** se hallará un sistema de diámetros conjugados: las diagonales del paralelógramo construido sobre estos diámetros serán las asíntotas, y se tendrá ya todos los elementos necesarios para determinar cuantos puntos se quiera de la curva (**258**).

274. PROBLEMA. *Suponiendo que á dos rectas fijas* OH *y* OK *corten varias paralelas, tales como* AB, *y que en cada una de estas se tome un punto* M *colocado de tal manera que* AM.MB $=m^2$ *(siendo* M *una recta dada), hallar el lugar geométrico del punto* M.

Tomando por ejes coordenados la recta OX que divide en dos partes iguales á todas las secantes paralelas, y la OY paralela á estas mismas, las ecuaciones de las OH y OK referidas á estos ejes tendrán la forma

$$y=ax \quad \text{ó} \quad y=-ax,$$

pues deben dar dos valores iguales y de signo contrario para y por cada uno de los de x. Si x é y son las coordenadas del punto M, se tendrá

$$\mathrm{AM}=\mathrm{AI}+\mathrm{IM}=ax'+y',$$

y

$$\mathrm{BM}=\mathrm{IB}-\mathrm{IM}=ax'-y';$$

luego

$$\mathrm{AM}.\mathrm{MB}=a^2x'^2-y'^2=m^2,$$

que es la ecuacion del lugar y que representa una hipérbola, cuyas asíntotas tienen por ecuacion $y=\pm ax$; es decir, que tiene por asíntotas las rectas dadas OH y OK.

275. Problema. *Hallar el lugar geométrico de los puntos de contacto de todas las tangentes tiradas desde un punto dado á todas las hipérbolas que tengan por asíntotas dos rectas determinadas.*

Tomando por ejes las asíntotas dadas, la ecuacion de una de estas hipérbolas será $xy=c$, representando c una cantidad constante cualquiera positiva ó negativa; y la tangente á esta en el punto (x', y') tendrá por ecuacion (**264**)

$$\frac{x}{2x'}+\frac{y}{2y'}=1.$$

Como la ecuacion de esta tangente ha de quedar satisfecha por las coordenadas α y β del punto dado, se tendrá

$$\frac{\alpha}{2x'}+\frac{\beta}{2y'}=1,$$

que será la ecuacion del lugar si se considera como variables á las cantidades x' é y'. Quitando denominadores, trasponiendo y borrando los acentos, resulta

$$2xy-\alpha y-\beta x=0,$$

que representa una hipérbola que pasa por el orígen y por el punto dado, como hubiera sido fácil prever. Esta hipérbola tiene por asíntotas (**151**) las rectas representadas por las ecuaciones

$$2x-\alpha=0 \quad \text{y} \quad 2y-\beta=0,$$

que son dos paralelas á los ejes tiradas por el medio de la recta que une el orígen con el punto dado.

276. Problema. *Hallar el lugar geométrico de todos los puntos desde los cuales se puedan tirar á la hipérbola dos tangentes perpendiculares entre sí.*

Se resuelve del mismo modo que el del núm. **248**: solo es posible cuando $a>b$; y el lugar geométrico que se pide se reduce á un punto si la hipérbola es equilátera.

277. Problema. *Hallar el centro de gravedad de todos los triángulos que puedan determinarse tirando una secante que intercepte, con dos rectas dadas que se cortan, un triángulo que tenga un área igual á la de un cuadrado conocido m^2.*

Tomando por ejes las dos rectas dadas se podrá escribir la ecuacion de la secante bajo la forma

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1;$$

y llamando θ al ángulo que formen entre sí los ejes, deberá existir entre los valores de a y b la relacion

$$\pm\tfrac{1}{2}ab\,\text{sen}\,\theta=m^2 \qquad [1],$$

eligiendo el signo de modo que resulte positivo el primer miembro.

Fácil es ver que, representando por x é y las coordenadas del centro de gravedad del triángulo formado por las tres rectas, y cualesquiera que sean los signos de a y de b se ha de verificar

$$x=\tfrac{1}{3}a \quad \text{é} \quad y=\tfrac{1}{3}b.$$

de donde resulta $$a=3x \quad \text{y} \quad b=3y.$$

Poniendo estos valores de a y b en la ecuacion [1], resultará la del lugar geométrico

$$\pm\tfrac{9}{2}xy\,\text{sen}\,\theta=m^2, \quad \text{ó bien} \quad xy=\pm\frac{2m^2}{9\,\text{sen}\,\theta}.$$

Este lugar es una hipérbola que tiene por asímtotas las rectas dadas.

Tomando en esta ecuacion el signo $+$ resulta una hipérbola colocada en el primero y tercer ángulo que forman los ejes: el signo $-$ da otra colocada en los ángulos segundo y cuarto, y ambas curvas satisfacen al problema.

278. PROBLEMA. *Hallar el lugar geométrico de todos los puntos* M *que sean tales que, tirando por cada uno de ellos paralelas* MP *y* MQ *á las asímtotas de una hipérbola dada, el polígono mixtilíneo* OPDEQO *comprendido entre las asímtotas, sus paralelas y la curva sea equivalente á un cuadrado conocido* a^2.

Supongamos que la ecuacion de la hipérbola dada referida á sus asímtotas sea $xy=m^2$, y C el vértice de la curva que tendrá por coordenadas $x=m$ é $y=m$ por estar colocado en la bisectriz del ángulo YOX; finalmente, llámese θ al ángulo que formen los ejes, y x é y á las coordenadas del punto M. Tírese por C las paralelas CA y CB á las asímtotas, y en virtud de la fórmula establecida en el núm. **265**, se tendrá

$$\text{ACDP}=m^2\,\text{sen}\,\theta.\log'.\frac{x}{m},$$

$$\text{BCEQ}=m^2\,\text{sen}\,\theta.\log'.\frac{y}{m};$$

además, $$\text{ACBO}=m^2\,\text{sen}\,\theta;$$

luego $$\text{OPDEQO}=m^2\,\text{sen}\,\theta\left(\log'.\frac{x}{m}+\log'.\frac{y}{m}+1\right),$$

ó sea $$\text{OPDEQO}=m^2\,\text{sen}\,\theta.\log'\frac{xy}{m^2}+m^2\,\text{sen}\,\theta.$$

Por lo tanto, la ecuacion que espresa las condiciones del problema será

$$m^2\,\text{sen}\,\theta.\log'.\frac{xy}{m^2}+m^2\,\text{sen}\,\theta=a^2,$$

de la que resulta $$xy=m^2e^{\frac{a^2}{m^2\,\text{sen}\,\theta}-1},$$

que es la del lugar, y que representa una hipérbola que tiene las mismas asíntotas que la propuesta.

Cuando se verifique $a^2 = m^2 \operatorname{sen} \theta$, la ecuacion del lugar quedará reducida á

$$xy = m^2,$$

y esta será la misma hipérbola propuesta, como debia presumirse.

279. Conviene que los lectores se ejerciten en las siguientes cuestiones:

I. *Uniendo uno de los focos de la hipérbola con el punto en que la directriz correspondiente corta á una tangente dada, resulta una recta perpendicular al radio vector que va al punto de contacto.*

II. *La media proporcional geométrica entre los dos radios vectores correspondientes á un punto de la hipérbola es el semidiámetro conjugado del que va á pasar por el mismo punto.*

III. *Uniendo dos puntos* m *y* m' *de la hipérbola con los extremos* A *y* B *de un mismo diámetro, y tirando la diagonal* mm' *del cuadrilátero formado por las cuatro líneas de union, esta diagonal será paralela á la tangente* TT' *levantada en uno de los extremos* A *del diámetro.*

IV. *Cuando un triángulo tiene sus tres vértices sobre una hipérbola, y uno de ellos se mueve, los lados que pasan por él interceptan en cada asíntota un segmento de longitud constante.*

V. *Hallar el lugar geométrico de los centros de todos los círculos tangentes á dos dados.*

VI *Hallar el lugar geométrico de los puntos en que todas las normales paralelas á una recta dada, tiradas á una série de hipérbolas que tienen unas mismas asíntotas, encuentran normalmente á estas hipérbolas.*

VII. *Teniendo dos rectas* OH, OK *que se cortan, y un punto fijo* P, *y tirando por este punto una secante cualquiera y por los puntos* A *y* B *de interseccion de esta con cada una de las rectas dadas una paralela á la otra, se quiere hallar el lugar geométrico de los puntos que resultan de la interseccion de estas últimas rectas.*

VIII. *Hallar el lugar geométrico de los puntos de interseccion de las perpendiculares bajadas desde los focos de una hipérbola sobre cada sistema de diámetros conjugados.*

IX. *Dadas dos hipérbolas que tengan sus asíntotas respectivamente paralelas, hallar el lugar geométrico de los puntos en que cada diámetro de una corta al conjugado de su paralelo en la otra.*

X. *Cuando se tiene dos círculos iguales* C *y* C' *que no se cortan, y por el medio* O *de la distancia que separa á los dos centros se tira una secante cualquiera, esta corta á las circunferencias en dos puntos* K *y* K' *tales que unidos respectivamente con* C *y* C', *las rectas* CK *y* C'K' *convenientemente prolongadas se cortan en un punto* M; *se quiere hallar el lugar geométrico de las posiciones que irá ocupando* M *cuando la secante gire alrededor de* O.

XI. *Resolver el mismo problema en el caso de que sean desiguales los radios de los círculos, y cualquiera que sea la distancia entre los centros.*

XII. *Hallar el lugar geométrico de los extremos de todos los diámetros paralelos á una recta dada tirados en círculos que pasen todos por dos puntos fijos.*

280 Aplicaciones. I. Cuando la cuerda de un reverbero varia de longitud, es decir, cuando el reverbero sube ó baja, las posiciones de equilibrio de la polea á que está sujeta se hallan sobre una rama de hipérbola equilátera que tiene vertical una de sus asimptotas.

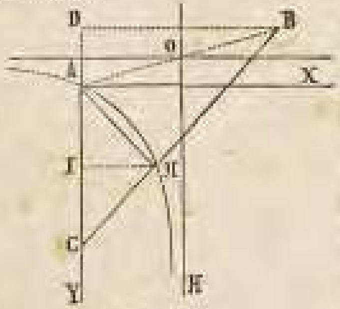


Fig. 107.

Sean A y B (fig. 107) los puntos de suspension, y M una posicion particular de la polea. Tómese un eje horizontal AX, y otro vertical AY, tírense MI y BD que corten en I y D al eje de las y, únase M con A y B, y prolónguese MB hasta que corte á la AY en C; hágase BD $= 2a$ y AD $= 2b$, y desígnense por x é y las coordenadas IM é IA del punto M.

Por la semejanza de los triángulos CIM y CDB se tendrá

$$\frac{CI}{IM}=\frac{CD}{DB},$$

ó bien por ser CI = AI (**195**)

$$\frac{AI}{IM}=\frac{CD}{DB},$$

es decir, que

$$\frac{y}{x}=\frac{2y+2b}{2a},$$

de donde sale

$$xy+bx-ay=0,$$

que es la ecuacion de la hipérbola, cuyas asimtotas tienen por ecuaciones

$$x=a \quad \text{ó} \quad y=-b,$$

que manifiestan que la una es vertical y la otra horizontal, y que pasan por el punto medio O de la distancia AB que separa á los puntos de suspension. La hipérbola es equilátera, por cuanto las asimtotas son perpendiculares entre sí.

281. II. La perspectiva de un círculo puede ser una hipérbola: caso que se presenta principalmente cuando el círculo es horizontal y su centro está delante del plano de perspectiva á igual distancia que el espectador.

Está demostrado que si AA′ (fig. 108) es en este caso la proyeccion sobre el plano de perspectiva del diámetro del círculo que sea paralelo á este plano, y B y B′ los puntos en que la circunferencia del círculo corta á la horizontal AA′, las rectas PA y PA′ tiradas desde A y A′ al punto de vista son las asimtotas del arco BCB′ que se quiere trazar. Ya hemos visto (**258**) que teniendo las asimtotas y un punto A de la curva, se la puede construir fácilmente.

Fig. 108.

Observacion. De las sombras y de su perspectiva se puede sacar un gran número de aplicaciones de la hipérbola.

282. III. Muchas son las funciones que pueden representarse por una hipérbola; pero solo presentarémos un corto número de ejemplos.

En los puentes colgantes la tension T de la cadena ó del cable varía segun el punto que se considere; y si Q es la correspondiente al punto mas bajo, x la distancia de este punto á aquel cuya tension sea T, y por último k representa una constante, está demostrado que se verifica la relacion

$$T=\sqrt{Q^2+k^2x^2}.$$

Por consiguiente, la tension T varía como la ordenada de una hipérbola correspondiente á la abscisa x, teniendo la hipérbola su centro en el origen, su eje transverso dirigido paralelamente á las ordenadas y de una longitud igual á 2Q, y siendo k la razon entre los dos ejes. Nada seria mas fácil que construir la curva cuando se conociesen los valores particulares de Q y de k.

IV. En ninguna corriente de agua tienen todos sus hilos la misma velocidad, sino que esta es mayor en la parte media de la superficie; y la esperiencia ha demostrado que llamando V á la velocidad máxima y U á la media, se verifica la relacion

$$\frac{U}{V}=\frac{V+2^m,37}{V+3^m,15}.$$

Considerando que U y V sean la ordenada y la abscisa de una curva, se puede construir esta fácilmente; pues sustituyendo x en vez de V, é y por U, quitando los denominadores y trasponiendo, se tendrá

$$xy-x^2+3,15\,y-2,37\,x=0,$$

que es la ecuacion de la hipérbola que pasa por el origen, y cuyas asíntotas están representadas por las ecuaciones

$$y=x \quad \text{y} \quad x=-3,15.$$

Ya sabemos cómo se puede trazar la curva conociendo uno de sus puntos y las asíntotas, y su forma será la indicada en la figura 109. Al hacer la aplicacion no se tomará en cuenta mas que la parte de curva comprendida en el ángulo YOX, que es la que tiene positivas x é y, ó sean V y U.

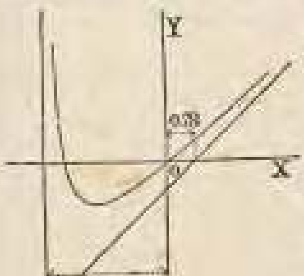


Fig. 109.

V. El trabajo de la detencion de una máquina de vapor se valúa como el área de una hipérbola.

Sea P_0 la presion del vapor en el momento en que principia la detencion; esto es, en el instante en que, continuando el trabajo de piston, deja de pasar el vapor desde la caldera. Sea h_0 la altura del cilindro ocupado por el vapor en este momento, y P la presion del vapor en el instante en que el cilindro ocupado por este llega á la altura h. En virtud de la ley de Mariotte, que segun acredita la esperiencia, es aplicable á este caso, las cantidades P_0 y P estarán en razon inversa de los volúmenes correspondientes ocupados por el vapor, ó bien por tener estos cilindros la misma base, P_0 y P estarán en razon inversa de las alturas h_0 y h: por consiguiente se tendrá

$$\frac{P}{P_0}=\frac{h_0}{h}, \quad \text{por lo cual} \quad Ph = P_0 h_0 \qquad [1].$$

Aquí se ve que las cantidades P y h varían del mismo modo que las coordenadas de una hipérbola referida á sus asíntotas (no habiendo inconveniente en considerar que estas asíntotas sean rectangulares). Supóngase que CD (fig. 110) es un arco de esta curva.

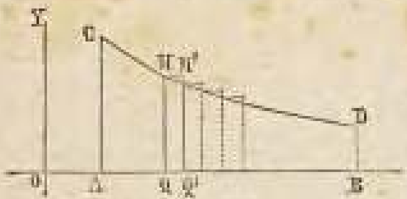


Fig. 110.

El trabajo elemental de la fuerza P es el producto de la misma fuerza por el elemento del camino que describe el piston, es decir, por el elemento de la altura h: este producto se representa por un rectángulo, cuya base es la ordenada MQ, ó sea P, y la altura el elemento QQ′ de h. Por consiguiente, el trabajo total de la fuerza P estará representado por la suma de todos los pequeños rectángulos análogos á este; pero esta suma tiene por límite el área ABDC comprendida entre las ordenadas AC y BD que representan los valores extremos de P; luego el trabajo de P se valuará del mismo modo que esta área.

Sean h_0 y H las alturas inicial y final del cilindro de vapor durante la detencion; es decir, las abscisas OA y OB: la expresion del área de que se trata será (**265**), en virtud de la relacion [1],

$$P_0 h_0 \log'.\frac{H}{h_0}.$$

De modo que si fuese $P_0=1000^k$, $h_0=0^m,2$ y $H=5h_0$, se tendria

$$1000^k.0^m,2.\log' 5 = 200^{km}.1,6094379,$$

ó por último $321^{km},887\ldots\ldots$, ó próximamente 322 kilográmetros.

CAPÍTULO IX.

PROPIEDADES PRINCIPALES DE LA PARÁBOLA.

§ I. — Eje; vértice; ordenadas; focus; directriz.

283. Eje; vértice; ordenadas. — Ya hemos visto en el número 175 que la ecuacion de una parábola referida á ejes rectangulares se puede reducir á la forma $y^2=2px$. La cantidad $2p$ se llama el *parámetro* de la parábola.

Como por cada valor de x corresponden á y dos iguales y de signo contrario, el eje de las x es un verdadero eje de simetría de la curva, y por esta razon se le llama el *eje* de la parábola.

Haciendo $x=0$ resulta $y=0$; de modo que la curva pasa por el orígen. Este punto en que la curva corta á su eje se llama el *vértice*.

Se puede considerar siempre como positiva á la cantidad p, pues si fuese negativa no habria mas que tomar las x en sentido contrario, y este segundo caso quedaria reducido al primero.

Considerando la ecuacion de la curva se ve que, no siendo posible dar á x valores negativos, solo se estiende la parábola por el lado de las x positivas; y como dando á x valores crecientes desde 0 hasta ∞ crece tambien y desde 0 hasta ∞, tiene que ser su forma la indicada en la figura 12, pág. 16.

Para calcular las coordenadas correspondientes á los diversos puntos de la curva no hay mas que dar valores particulares á y, y sin estraer raiz alguna se hallarán los correspondientes á x. Tambien se puede aplicar, ya sea para calcular las coordenadas ó ya para trazar la curva, el método espuesto en el núm. 20, que está fundado en el uso de las segundas diferencias.

Igualmente se pueden calcular las coordenadas de los diferentes puntos de la curva, sin que tampoco haya que estraer raiz alguna, usando de una variable auxiliar. Con este objeto se pueden emplear las formulas

$$y=\frac{2p}{t} \quad \text{y} \quad x=\frac{2p}{t^2},$$

que dan $y^2=2px$, cualquiera que sea t; y en las que haciendo variar t desde el infinito hasta cero, x é y tambien irán variando desde cero hasta el infinito.

Finalmente, la misma ecuacion $y^2=2px$ puede servir para construir la curva por puntos. Sea para esto AP (fig. 111) la abscisa correspondiente á un punto que se quiere construir; desde A hasta B se tomará una longitud igual á $2p$; sobre BP como diámetro se describirá una semicircunferencia que cortará al eje de las y en un punto Q; la longitud AQ será la de la ordenada correspondiente. Con efecto, por la construccion hecha se tendrá $\overline{AQ}^2 = AB . AP = 2px$; luego $AQ = y$. Por consiguiente tirando paralelamente á los ejes las rectas PM y QM, su interseccion M será el punto que se buscaba.

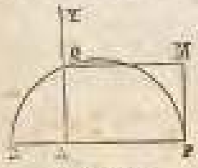


Fig. 111.

La misma construccion da otro segundo punto simétrico de M.

284. Teorema. *Los cuadrados de las ordenadas perpendiculares al eje son proporcionales á las abscisas correspondientes.*

Esto es una consecuencia de la misma ecuacion de la curva; porque si (x, y) y (x', y') son dos puntos pertenecientes á la parábola, se tendrá, segun aquella ecuacion,

$$y^2 = 2px \quad \text{é} \quad y'^2 = 2px';$$

y dividiendo la primera por la segunda resulta

$$\frac{y^2}{y'^2} = \frac{x}{x'},$$

conforme se espresa en el enunciado.

285. Teorema. *Se puede considerar que la parábola es el límite hácia el cual tiende una elipse cuando el eje mayor crece indefinidamente conservándose constante la distancia entre un focus y el vértice mas inmediato.*

Si la ecuacion de una elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

cambiando el origen al vértice que tenga por abscisa $-a$, conservando la misma la direccion de los ejes, haciendo para ello la sustitucion de $x - a$ en vez de x, resultará

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

de la cual se deduce

$$y^2=2\frac{b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2 \qquad [1].$$

Como la distancia del focus al vértice mas inmediato es $a-c$, si la representamos por $\frac{1}{2}p$ por suponerla constante, tendrémos

$$\tfrac{1}{2}p=a-c, \quad \text{por lo que} \quad c=a-\tfrac{1}{2}p \quad \text{y} \quad c^2=a^2-ap+\tfrac{1}{4}p^2.$$

De esta ecuacion sale

$$a^2-c^2=ap-\tfrac{1}{4}p^2, \quad \text{ó sea} \quad b^2=ap-\tfrac{1}{4}p^2.$$

y en su consecuencia

$$\frac{b^2}{a}=p-\frac{1}{4}\frac{p^2}{a} \quad \text{y} \quad \frac{b^2}{a^2}=\frac{p}{a}-\frac{1}{4}\frac{p^2}{a^2}.$$

Cuando a tienda hácia el infinito, $\frac{b^2}{a}$ tenderá á hacerse igual á p, y $\frac{b^2}{a^2}$ á convertirse en cero, por lo cual el límite de la ecuacion [1] de la elipse será

$$y^2=2px,$$

que es la ecuacion de una parábola.

Observaciones. I. Tambien puede considerarse á la parábola como el límite de una hipérbola.

II. Suponiendo

$$\frac{b^2}{a}=p, \quad \text{será} \quad \frac{b^2}{a^2}=\frac{p}{a}=q,$$

y la ecuacion [1] se transformará en

$$y^2=2px-qx^2.$$

Conservando las mismas notaciones se verá que la ecuacion de la hipérbola referida á su eje transverso y á la tangente tirada por el vértice de la *derecha* es

$$y^2=2px+qx^2.$$

De este modo la misma ecuacion

$$y^2=2px+qx^2$$

representa las tres curvas de segundo grado; á saber, la elipse, cuando $q<0$; la hipérbola, cuando $q>0$, y la parabola, si $q=0$.

286. Focus; directriz. — Ya en el núm. 13 vimos que toda curva en que se verificase que cada uno de sus puntos estuviera á una misma distancia de un punto fijo que de una recta dada sería una parábola: ahora vamos á demostrar que en toda parábola se verifica esta propiedad.

Sea M (fig. 112) un punto cualquiera tomado sobre la parábola; tómense en el eje OX y á los dos lados del vértice O las longitudes OF y OA iguales á $\frac{p}{2}$, ó sea á la cuarta parte del parámetro; tírese por el punto A la recta DD' perpendicular al eje; bájese desde M la MQ perpendicular á DD', y únase M con F: vamos á probar que MF = MQ.

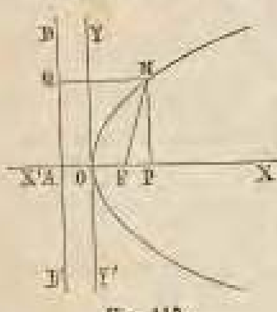


Fig. 112.

En efecto, tenemos en primer lugar

$$MQ=AP=AO+OP=\tfrac{1}{2}p+x:$$

además tenemos

$$\overline{MF}^2=\overline{MP}^2+\overline{PF}^2=y^2+(x-\tfrac{1}{2}p)^2=2px+(x-\tfrac{1}{2}p)^2=(x+\tfrac{1}{2}p)^2;$$

de donde resulta $\qquad MF=x+\tfrac{1}{2}p;$

y en su consecuencia $\qquad MF=MQ.$

Queda pues demostrado que todo punto de la parábola dista tanto de la recta DD' como del punto F.

El punto F se llama el *focus*, y la recta DD' la *directriz* de la parábola; y haciendo uso de estas denominaciones puede decirse que *cada punto de la parábola dista tanto del focus como de la directriz.*

OBSERVACIONES. I. Haciendo $x=\frac{1}{2}p$ resulta $y=\pm p$; de modo que la cuerda tirada por el focus perpendicularmente al eje es igual al parámetro $2p$.

II. Haciendo $x=2p$, resulta $y=\pm 2p$; de modo que tirando por el vértice una recta que forme con el eje un ángulo de 45°, recta que tendrá por ecuacion $y=x$, cortará á la parábola en un punto que tendrá una abscisa igual al parámetro.

Esta observacion da un medio para construir el focus y la directriz cuando se tenga la curva y su eje, pero no su ecuacion.

III. Tanto en la elipse como en la hipérbola y en la parábola se verifica la propiedad de que las distancias desde cada uno de sus puntos al focus y á la directriz guardan una razon constante (184, 233), pero en la elipse cada punto está mas cerca del focus que de la directriz correspondiente; en la hipérbola todos lo están mas de la directriz que del focus, y en la parábola distan tanto del focus como de la directriz.

IV. La distancia entre cualquier punto de la parábola y su focus es una funcion racional entera y de primer grado de la *abscisa* correspondiente al punto; y eligiendo otros ejes resultaria tambien una funcion racional entera y de primer grado de las nuevas *coordenadas* del mismo punto.

287. Puede construirse por puntos la parábola haciendo uso de la propiedad del focus y la directriz.

Con efecto, sea OP (fig. 113) la abscisa del punto que se quiera construir; levántese en P una perpendicular indefinida al eje, y haciendo centro en el focus F, y con un radio igual á la distancia AP que haya desde el punto P á la directriz, trácese un arco de círculo que cortará á la perpendicular indefinida en un punto M que pertenecerá á la parábola, pues tirando MQ paralela á OX y uniendo M con F, será $MQ=AP=MF$.

OBSERVACIONES. I. Todo punto M' (fig. 113) colocado fuera de la parábola está mas cerca de la directriz que del focus; pues bajando M'P perpendicular al eje cortará á la curva en M, y tirando M'Q' y MQ perpendiculares á la directriz y uniendo F con M y M', tendrémos $M'Q' = MQ$; pero $M'F > MF$, como oblicua que se aparta mas del pié de la perpendicular FP; y como $MQ=MF$, será $M'F > MQ$, ó sea $> M'Q'$. Del mismo modo se demostraria que todo punto M'' interior á la parábola está mas cerca del focus que de la directriz. Por consiguiente, cuando un punto está á igual distancia del fo-

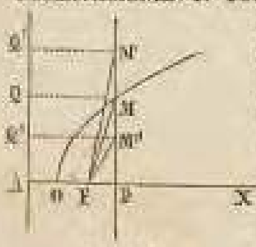


Fig. 113.

cus que de la directriz tiene que hallarse precisamente colocado sobre la curva, lo cual acaba de justificar la construccion anterior.

II. Esta construccion da á un mismo tiempo dos puntos de la parábola colocados simétricamente respecto al eje; pues el círculo descrito desde F como centro y con el radio AP corta en dos puntos á la perpendicular indefinida levantada en P.

§ II. — Tangente y normal.

288. Tangente. — Segun lo establecido en el núm. 101, el coeficiente angular de la tangente á la curva en el punto que tenga por coordenadas x' é y' será

$$m=\frac{p}{y'}.$$

Considerando la rama que se estiende por encima del eje, á proporcion que y' vaya variando desde 0 hasta el infinito positivo, m varía inversamente desde el infinito positivo hasta cero, conservándose positivo siempre; por consiguiente, esta rama de la curva presenta siempre su concavidad hácia el eje (100), y lo mismo sucederá en la rama inferior, en atencion á la simetría de la curva.

Como en el vértice es $y'=0$, y por consiguiente $m=\infty$, la tangente en este punto será perpendicular al eje.

289. En virtud de lo que llevamos dicho, la tangente á la parábola en el punto cuyas coordenadas sean x' é y' tendrá por ecuacion

$$y-y'=\frac{p}{y'}(x-x') \qquad [1],$$

á la que hay que añadir la relacion $y'^2=2px'$ para espresar que el punto (x', y') está sobre la parábola.

Con el auxilio de esta relacion puede ponerse la ecuacion [1] bajo la forma

$$yy'=p(x+x') \qquad [2],$$

ó bajo la

$$yy'-px=px'=\frac{y'^2}{2},$$

ó bien dividiendo el primer término por $\frac{y'^2}{2}$, y los otros dos por px'

$$\frac{y}{\frac{1}{2}y'}-\frac{x}{x'}=1 \qquad [3].$$

Con solo fijar la vista en la ecuacion de la tangente puesta bajo la última forma se conoce que, haciendo $x=0$ resulta $y=\frac{1}{2}y'$, y esto manifiesta que *la ordenada en el origen de la tangente* MT (figura 114) *es la mitad de la ordenada* MP *correspondiente al punto de contacto* M.

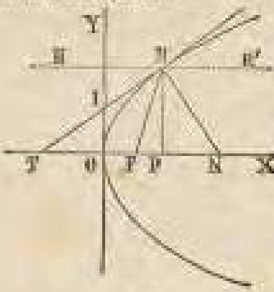


Fig. 114.

Asimismo se ve que para $y=0$ corresponde $x=-x'$, lo que indica que la tangente corta al eje en un punto T colocado en la parte de las x negativas y á una distancia OT igual á la abscisa OP del punto de contacto.

La distancia TP se llama la *subtangente*, *y en la parábola es el doble de la abscisa del punto de contacto*; pues TP $=$ 2OP.

Esta propiedad sugiere un método muy sencillo para tirar una tangente á la parábola en un punto dado M; pues no hay mas que bajar la ordenada MP, tomar OT $=$ OP y unir T con M.

Observacion. Haciendo $x'=\frac{1}{2}p$ resulta $y'=p$, y por consiguiente $m=1$; de modo que la tangente á la parábola en el punto cuya ordenada pasa por el focus forma con el eje un ángulo de 45°. Esta misma tangente corta al eje en el propio punto que la directriz, pues la abscisa de este punto de interseccion es $-\frac{1}{2}p$.

290. Problema. I. *Tirar á la parábola una tangente por un punto* (x'', y'') *esterior á la curva.*

Para determinar las coordenadas x' é y' del punto de contacto servirán la ecuacion que espresa que el punto dado está sobre la tangente, que adoptando la forma [1] arriba espresada será

$$y''y'=p(x''+x') \qquad [4],$$

y la que sirve para espresar que el punto de contacto pertenece á la parábola, que es

$$y'^2 = 2px' \qquad [5];$$

y como la eliminacion conduce á una ecuacion de segundo grado resultan por lo general dos soluciones, que se reducen á una sola cuando el punto dado está sobre la curva.

En vez de resolver directamente la cuestion por medio del cálculo, puede suponerse que x' é y' representen en las ecuaciones [4] y [5] cantidades variables, y en este caso dichas ecuaciones serán las de dos lugares geométricos, que en sus puntos de interseccion darán los de contacto de las tangentes con la parábola. La ecuacion [4] representa una recta muy fácil de construir, que se llama la *cuerda de los contactos*, y la [5] es la de la misma parábola.

II. *Tirar á la parábola una tangente paralela á una recta que tenga por ecuacion* $y = mx$.

En este problema servirán para determinar las coordenadas x' é y' del punto de contacto la ecuacion que espresa el paralelismo entre la tangente y la recta dada, ecuacion que es

$$\frac{p}{y'} = m \qquad [6],$$

y la [5] anterior que sirve para indicar que el punto de contacto pertenece á la curva.

Como la ecuacion [6] no da mas que un valor para y', y la sustitucion de este en [5] tampoco da mas que otro para x', solo admite este problema una solucion. Los valores resultantes $y' = \frac{p}{m}$ y $x' = \frac{p}{2m^2}$, puestos en la ecuacion [4] de la tangente dan para esta

$$y - \frac{p}{m} = m\left(x - \frac{p}{2m^2}\right), \quad \text{ó sea} \quad y = mx + \frac{p}{2m} \qquad [7].$$

Observacion. Dividiendo los dos términos de la ecuacion [7] por m y haciendo en seguida la hipótesis de que $m = \infty$, resulta $x = 0$, lo que nos dice que la tangente se reduce al eje de las y, como debia suponerse. Haciendo $m = 0$ en la ecuacion [7], resulta $y = \infty$; de modo que solamente cuando el punto de contacto está colocado en el infinito es cuando la tangente queda paralela al eje.

291. **Normal.** — La ecuacion de la normal á la parábola en el punto que tiene por coordenadas x' é y' es

$$y-y'=-\frac{y'}{p}(x-x').$$

Para hallar el punto N (fig. 114) en que corta al eje se hará $y=0$, y resultará $x=p+x'$.

La distancia PN, que se llama *subnormal*, es igual á ON—OP, ó sea á $x-x'$, ó lo que es lo mismo á p: de modo que *en la parábola la subnormal es constante é igual á la mitad del parámetro.*

Fundados en esta propiedad podemos dar otra regla para tirar una tangente á la parábola en un punto M dado sobre la curva; pues no hay mas que bajar la ordenada MP, tomar PN igual á la mitad p del parámetro, unir M con N y tirar á la normal MN una perpendicular MT que será la tangente.

Observacion. Cuando $x'=0$, la distancia x, ó sea ON, se reduce á p; de modo que conforme el punto M se va acercando al vértice, el N se acerca al punto colocado á la distancia p del vértice.

292. Teorema. *Toda tangente á la parábola forma con el eje un ángulo igual al que forma con el radio vector que va al punto de contacto.*

No hay mas que demostrar que el triángulo MTF (fig. 114) es isósceles y que TF=MF. Para esto sabemos por el núm. 288 que si x es la abscisa OP del punto M, será en valor absoluto TO$=x$; por consiguiente, TF=TO+OF$=x+\frac{1}{2}p$; y como además hemos hallado (285) que MF$=x+\frac{1}{2}p$, será TF=MF, y finalmente, el ángulo MTF=TMF, que es lo que se necesitaba demostrar.

Observaciones. I. Tirando por el punto M una paralela HH' al eje, resultará el ángulo HMT=MTF; luego tambien será el HMT=TMF: esto manifiesta que la tangente es bisectriz del ángulo HMF que forma el radio vector MF que va al punto de contacto con la paralela MH al eje tirada por el mismo punto.

II. De aquí resulta que la normal MN es la bisectriz del ángulo H'MF suplementario de aquel.

III. Como el triángulo MFN es isósceles por tener el ángulo FMN = H'MN = MNF, será NF = MF, y como además TF = MF, será tambien TF = FN; por lo tanto, la tangente forma con la normal y el eje un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa tiene su punto medio en el focus F.

293. Del teorema que hemos demostrado en el número precedente se deduce tambien un método para tirar una tangente á la parábola.

I. Suponiendo, en primer lugar, que se quiere tirar la tangente por un punto M tomado sobre la curva (fig. 115), tírese la directriz AL, desde el punto dado M una perpendicular MD á esta recta; únase F con D; desde M bájese la MT perpendicular á FD, y se tendrá la tangente pedida, pues será la bisectriz del ángulo DMF.

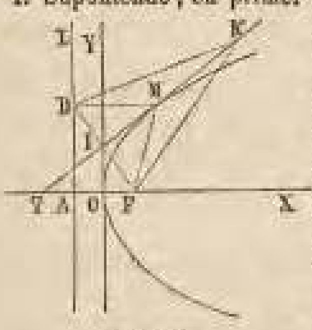


Fig. 115.

Observacion. El punto I en que la tangente MT corta á FD es el medio de esta última; y como este punto está sobre el eje OY, por ser OA = OF y OY paralelo á AL, se deduce que *la tangente levantada á la parábola en su vértice es el lugar geométrico de los piés de cuantas perpendiculares se bajen desde el focus sobre las tangentes.*

II. Supongamos, en segundo lugar, que se quiere tirar la tangente por un punto K esterior á la parábola. Haciendo centro en K y con un radio igual á la distancia KF, se describirá un arco de círculo que cortará á la directriz en un punto D; pues estando K fuera de la curva, se halla mas cerca de la directriz que del focus (285); se unirá D con F, se bajará desde K una perpendicular KT á DF; KT será la tangente pedida, y el punto de contacto el M en que dicha tangente corte á la paralela al eje tirada por D.

Efectivamente, KT es por construccion perpendicular á DF en su punto medio, por ser KD = KF; por consiguiente, el punto M estará tan distante de D como de F, y MT será la bisectriz del ángulo DMF, y por lo mismo la tangente.

Como el arco descrito haciendo centro en K ha de cortar en dos puntos á la directriz, resultan dos soluciones para el problema.

III. Propongámonos, por último, que la tangente á la parábola resulte paralela á una recta dada. Bájese desde el focus F una perpendicular á esta recta y que cortará á la directriz en un punto D; levántese en el medio de FD una perpendicular TK, y se tendrá la tangente que se busca. El punto M en que corte á la paralela al eje tirada por D será el de contacto.

En efecto, por ser TK perpendicular á FD en su punto medio será MF = MD, el punto M estará sobre la parábola, y como TK es la bisectriz del ángulo DMF, tiene que ser la tangente.

Este problema no admite solucion cuando la recta dada es paralela al eje, pues en este caso la perpendicular bajada desde el focus sobre aquella recta seria paralela á la directriz.

§ III. — Diámetros

294. Teorema. *Los diámetros de una parábola son paralelos al eje* (163).

Representando por $y=mx+n$ una de las cuerdas que el diámetro de que se trate divida en dos partes iguales, y por ξ y η las coordenadas del punto medio de esta cuerda, se tendrá, por hallarse este punto sobre la cuerda,

$$\eta=m\xi+n \qquad [1]$$

Para hallar las coordenadas de los puntos estremos de esta cuerda hay que combinar su ecuacion con la $y^2=2px$ de la parábola, y eliminando y resultará

$$m^2x^2+2(mn-p)x+n^2=0,$$

cuya ecuacion tiene por raices las abscisas de dichos estremos. Su semi-suma, que es igual, segun sabemos, á la abscisa ξ del medio de la misma cuerda, tiene por valor

$$\xi=\frac{p-mn}{m^2} \qquad [2].$$

La ecuacion del lugar geométrico resultará eliminando n entre las [1] y [2], será

$$\eta=\frac{m}{p};$$

y como representa una paralela al eje de la parábola, queda demostrado el teorema.

OBSERVACION. Recíprocamente, *toda paralela al eje de la parábola es un diámetro;* porque si $y=y'$ es la ecuacion de una paralela, y consideramos el sistema de cuerdas paralelas, cuyo coeficiente angular satisfaga á la condicion

$$y'=\frac{p}{m}, \quad \text{de la que se deduce} \quad m=\frac{p}{y'},$$

la ecuacion del lugar geométrico de los puntos medios de estas cuerdas será

$$\eta=\frac{p}{m},$$

ó bien sustituyendo, en vez de m, su valor

$$\eta=y'.$$

295. TEOREMA. *Todas las cuerdas que están divididas por un diámetro en dos partes iguales son paralelas á la tangente levantada en el estremo de este diámetro.*

Se acaba de ver que si $y=y'$ es la ecuacion de una paralela al eje, ó lo que es lo mismo, la ecuacion de un diámetro, el coeficiente angular de las cuerdas que este divide en dos partes iguales es

$$m=\frac{p}{y'};$$

y como el mismo coeficiente angular corresponde á la tangente tirada por el punto cuya ordenada es y' (287), punto que es el estremo del diámetro, todas las cuerdas divididas por mitad por este diámetro son paralelas á la tangente tirada por su estremo, que es lo que se queria demostrar.

296. TEOREMA. *La ecuacion de la parábola conserva la misma forma, ya esté referida á su eje y á la tangente levantada en el vértice, ó ya lo esté á cualquier diámetro y á la tangente levantada en el estremo de este.*

Ya hemos visto cuál es la ecuacion de la parábola cuando esta referida á su eje y á la tangente levantada en el vértice, y para convencernos de que tiene la misma forma cuando lo esté á un diámetro cualquiera y á la tangente levantada en su estremo, observarémos que, estando en este caso todas las cuerdas paralelas al eje de las y divididas en dos partes iguales por el diámetro que hace de eje de las x, corresponderán á cada valor de x dos iguales y de signo contrario de y; por lo tanto, no entrarán en la ecuacion mas que potencias pares de y, faltando los términos en xy y en y: además, como pasa la curva por el origen, no pueden entrar en la ecuacion términos que sean independientes de x y de y; por último, verificándose la condicion $B^2-4AC=0$ porque se trata de una parabola, y siendo nulo B, es preciso que lo sean A ó C; pero A no puede serlo, porque careciendo entonces la ecuacion de término en y, no representaria mas que dos paralelas al eje de las y; por consiguiente es preciso que C sea cero, y la forma de la ecuacion será, por lo mismo,

$$Ay^2+Ex=0, \quad \text{ó sea} \quad y^2=-\frac{E}{A}x,$$

ó haciendo

$$-\frac{E}{A}=2p', \; y^2=2p'x,$$

completamente semejante á la de la parábola referida á su eje y á la tangente en el vértice.

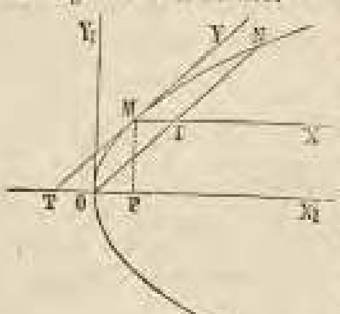


Fig. 116.

Observacion. Es fácil hallar el valor de p' en funcion de p cuando se conoce la abscisa a que corresponde en los ejes primitivos al origen de las nuevas coordenadas.

Sea MX (fig. 116) el diámetro que se haya tomado por nuevo eje de las x, TY la tangente que va á servir de eje de las y, y $OP=a$ y $MP=b$ las coordenadas que al nuevo origen M correspondian en los antiguos ejes OX_1 y OY_1. Tírese por el vértice O la OIN paralela á TM, y siendo la figura OIMT un paralelógramo, se tendrá

$$x \text{ ó } MI=OT=OP=a \quad (288);$$

y además

$$y^2 \text{ ó } \overline{NI}^2=\overline{IO}^2=\overline{MT}^2=\overline{MP}^2+\overline{TP}^2=b^2+4a^2,$$

ó sea
$$y^2=2pa+4a^2.$$

De la sustitucion de estos valores en la ecuacion $y^2=2p'x$ resulta

$$2pa+4a^2=2p'a, \quad \text{y de aquí} \quad \frac{p'}{2}=\frac{p}{2}+a.$$

Este valor es notable porque espresa la distancia que hay desde el punto M al focus (285); de modo que *si la ecuacion de la parábola está reducida á la forma* $y^2=2p'x$, *la cuarta parte del parámetro* $2p'$ *espresa la distancia que hay desde el orígen al focus;* y esto se verifica tambien cuando está la parábola referida á su eje y á la tangente en el vértice.

297. De cuanto llevamos dicho resulta que todas aquellas propiedades de la parábola que dependen esclusivamente de la forma de su ecuacion subsisten cuando se refiere la curva á uno de sus diámetros y á la tangente tirada por el estremo de este.

De modo que: 1.° los cuadrados de las ordenadas oblicuas son entre sí como las abscisas correspondientes; 2.° cuando y' sea la ordenada oblicua de un punto cualquiera de la curva, el coeficiente angular de la tangente á la curva en este punto será $\frac{p}{y'}$, y la ecuacion de la misma tangente

$$\frac{y}{\frac{1}{2}y'}-\frac{x}{x'}=1;$$

3.° la subtangente es siempre el doble de la abscisa, etc.

§ IV. — Área de un segmento parabólico.

298. Vamos á calcular el área comprendida entre un arco OB de la parábola (fig. 117), el diámetro OX que pasa por uno de sus estremos y la ordenada AB tirada por el otro estremo en direccion paralela á la tangente OY levantada en O.

Si la parábola está referida á los ejes OX y OY tendrá por ecuacion

$$y^2=2p'x \qquad [1];$$

y suponiendo que se haya inscrito á este arco OB un contorno poligonal, y tirado por cada uno de los vértices M, M', etc., las MP, MQ, M'P', M'Q', etc., paralelas á los ejes, tendrémos que, llamando x, y, y x', y' á las coordenadas de dos vértices consecutivos M y M' de este polígono, y θ al ángulo que formen entre sí los ejes, las áreas T y t de los trapecios MPP'M' y MQQ'M' tendrán respectivamente por espresion

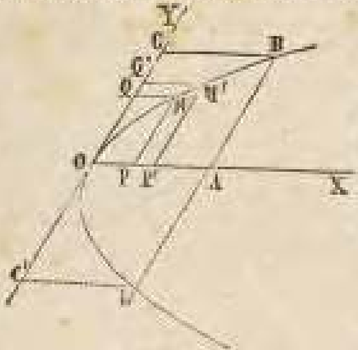


Fig. 117.

$$T=\tfrac{1}{2}(y+y')(x-x')\operatorname{sen}\theta,$$

$$\text{y}\quad t=\tfrac{1}{2}(x+x')(y-y')\operatorname{sen}\theta,$$

de donde se deduce

$$\frac{T}{t}=\frac{y+y'}{x+x'}\cdot\frac{x-x'}{y-y'}.$$

Suponiendo que aumente hasta el infinito el número de lados del contorno poligonal, disminuyendo indefinidamente la distancia entre cada dos vértices, se tendrá que

$$\lim\frac{T}{t}=\lim\frac{y+y'}{x+x'}\times\lim\frac{x-x'}{y-y'}.$$

Pero, en primer lugar,

$$\lim\frac{y+y'}{x+x'}=\frac{y}{x};$$

en segundo lugar, considerando en la ecuacion (1) que x sea la funcion é y su variable, la cantidad

$$\lim\frac{x-x'}{y-y'}$$

no será otra cosa que el límite de la razon entre el incremento de la funcion y el de la variable; es decir, que será la derivada de x con relacion á y. Por lo tanto, tendrémos

$$\lim\frac{x-x'}{y-y'}=\text{derivada de }\frac{y^2}{2p}=\frac{y}{p};$$

en su consecuencia,

$$\lim \frac{\mathrm{T}}{t} = \frac{y}{x} \cdot \frac{y}{p} = \frac{y^2}{px} = \frac{2px}{px} = 2.$$

Lo que acabamos de decir respecto de los trapecios MPP'M' y MQQ'M' puede aplicarse á todos los demás pares de trapecios, y, por lo tanto, en su límite la suma de los trapecios interiores es el doble de la suma de los esteriores. Pero tambien en su límite la suma de los trapecios interiores se reduce al triángulo mistilíneo OAB, y la de los esteriores al triángulo mistilíneo OCB; luego

$$\mathrm{OAB} = 2\mathrm{OCB},$$

de donde se deduce que

$$\mathrm{OAB} = \tfrac{2}{3}(\mathrm{OAB} + \mathrm{OCB}) = \tfrac{2}{3}\mathrm{OABC};$$

lo que quiere decir que *el área parabólica* OAB *que se quiere valuar es los dos tercios de la del paralelógramo* OACB.

OBSERVACIONES. I. Si X é Y son las coordenadas del punto B, el área del paralelógramo OABC estará representada por XY senθ, y la parabólica OAB equivaldrá, por consiguiente, á los $\tfrac{2}{3}$XY senθ.

II. Si el diámetro OX fuese el eje de la parábola, la tangente OY seria perpendicular á él, y por lo mismo sen$\theta = 1$, y la espresion del área parabólica simplemente los $\tfrac{2}{3}$XY.

III. Como del mismo modo se demostraria que el área parabólica OAB' equivale á los dos tercios del paralelógramo OAB'C', el área del segmento parabólico BOB' compone los dos tercios del paralelógramo BCC'B' formado por la cuerda BB', la tangente CC' paralela á dicha cuerda, y las rectas BC y B'C' que lo son al diámetro OX ó al eje.

§ V. — EJERCICIOS Y APLICACIONES.

299. TEOREMA. *Bajando desde los estremos de cualquier cuerda de una parábola perpendiculares á la tangente levantada en el vértice, la media proporcional entre estas perpendiculares es la distancia que hay desde el vértice al punto en que aquella cuerda corta al eje.*

Supongamos que la parábola esté referida á su eje y á la tangente en el vértice, y que sean (x', y') y (x'', y'') los estremos de la cuerda: la ecuacion de esta será

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$$

Para hallar la distancia entre el vértice y el punto en que esta cuerda corta al eje hay que hacer $y=0$ en la ecuacion anterior, de lo que resulta

$$x=x'-\frac{y'(x'-x'')}{y'-y''} \qquad [1].$$

Pero tenemos que $\qquad y'^2=2px' \quad \text{é} \quad y''^2=2px''$

luego $\qquad y'^2-y''^2=2p(x'-x'')$,

y por consiguiente, $\qquad \dfrac{x'-x''}{y'-y''}=\dfrac{y'+y''}{2p}$

Sustituyendo en [1] este valor se tiene

$$x=x'-\frac{y'(y'+y'')}{2p}=\frac{2px'-y'^2-y'y''}{2p}=-\frac{y'y''}{2p} \qquad [2],$$

por consiguiente, $\qquad x^2=\dfrac{y'^2y''^2}{4p^2}=\dfrac{y'^2}{2p}\times\dfrac{y''^2}{2p}=x'x'' \qquad [3];$

y como x' y x'' son las perpendiculares bajadas desde los estremos de la cuerda sobre la tangente en el vértice, queda demostrado el teorema por la ecuacion [3].

OBSERVACION. Esta ecuacion [2] manifiesta que, cuando los dos estremos de la cuerda están á un mismo lado del eje, aquella corta á este fuera de la curva, y lo corta dentro cuando cada estremidad de la cuerda cae á distinto lado del eje: esto puede verse tambien directamente.

300. TEOREMA. *Cuando se tiran á la parábola dos tangentes, tales como las NM, NM′, desde cada uno de los puntos de una recta LL′ (fig. 118), todas las cuerdas de contacto, como la MM′, pasan por un mismo punto.*

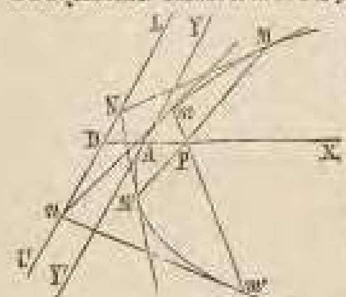


Fig. 118.

Si tomamos por ejes coordenados la tangente YY′ paralela á LL′ y el diámetro AX tirado por el punto de contacto, y llamamos x'' é y'' á las coordenadas del punto N, la cuerda de los contactos MM′ tendrá por ecuacion (**289**)

$$yy''=p'(x+x'') \qquad [1],$$

llamando $2p'$ al parámetro de la parábola referido á los ejes que hemos tomado, y para los cuales conserva su ecuacion la misma forma que si estuviera referida á su eje y á la tangente en el vértice (**295**).

Para hallar la abscisa AP correspondiente al punto en que MM′ corta á AX habrá que hacer $y=0$ en la ecuacion [1], y verificándolo tendrémos

$$x=-x'' \qquad [2].$$

La abscisa x'' del punto N no depende en modo alguno de la posicion de este punto sobre la recta LL', porque esta recta es paralela al eje de las y; luego x'' es una cantidad constante; por consiguiente, tambien AP es constante, y el punto P uno fijo, por el cual pasan todas las cuerdas de contacto semejantes á la MM'; que es lo que se queria demostrar.

Tambien se ve que este punto fijo se encuentra en el diámetro que pasa por el punto de contacto de la tangente paralela á la recta dada.

Observaciones. I. El punto P se llama el polo de la recta LL', y esta la *polar* de P.

II. La relacion [2] hace ver que AP = AD.

III. Si LL' cortase á la parábola, x'' seria positivo, y el punto P se hallaria fuera de la parábola. Cuando LL' fuese una tangente, los puntos P y D se confundirían con el de contacto, y en este caso el polo se hallaria sobre la misma polar.

Cuando LL' fuese la directriz, el punto P seria el foco.

IV. Tambien se verifica la propiedad recíproca; *es decir, que tirando por un mismo punto P cualquier número de secantes, y levantando tangentes á la parábola en los puntos en que aquellas la corten, los de interseccion de cada dos tangentes que procedan de los extremos de una misma secante se hallarán todas en una recta* LL'. Pues en virtud de la relacion [1], si AP se conserva invariable, tambien lo estará x'', y los puntos de interseccion N de cada dos tangentes levantadas en los extremos de la misma secante se hallarán en la recta que tiene por ecuacion

$$x=x''.$$

Si el punto fijo P estuviese fuera de la parábola, esta quedaria cortada por la recta fija LL'; pues si en la ecuacion [1] fuese x negativo, seria x'' positiva. Si estuviera en D el punto fijo, la recta LL' seria una tangente.

301. Teorema. *Cuando en una parábola se tiran dos cuerdas cualesquiera perpendiculares entre sí* CD *y* C'D' *(queda á cargo del lector el hacer la figura), las distancias* IP *é* I'P' *desde sus puntos medios al eje tienen por media proporcional la mitad del parámetro.*

Llamando x', y' á las coordenadas de C, x'', y'' á las de D, y η á la ordenada del punto I, tendrémos

$$\eta=\tfrac{1}{2}(y'+y'') \qquad [1].$$

Suponiendo que m sea el coeficiente angular de la cuerda CD, será

$$m=\frac{y'-y''}{x'-x''};$$

y multiplicando ordenadamente estas dos relaciones, resultará

$$m\eta=\frac{y'^2-y''^2}{2(x'-x'')}=\frac{2px'-2px''}{2(x'-x'')}=p \qquad [2].$$

Llamando η' á la ordenada del punto I', y m' al coeficiente angular de C'D', tendrémos del mismo modo

$$m'\eta'=p \qquad [3];$$

por consiguiente, multiplicando miembro á miembro las [2] y [3], resultará

$$mm'\eta\eta'=p^2 \qquad [4].$$

Ahora bien; como las cuerdas son perpendiculares entre sí, sus coeficientes angulares m y m' están ligados por la relacion $mm'+1=0$, ó lo que es lo mismo, $mm'=-1$; luego poniendo en (4) este valor en vez de mm', resultará

$$-\eta\eta'=p^2.$$

Esta relacion demuestra que las ordenadas η y η' tienen siempre contrarios los signos; de modo que si $\eta=+\text{IP}$ tendrá que ser $\eta'=-\text{IP}'$; por lo tanto, será

$$\text{IP}.\text{IP}'=p^2,$$

que es lo que se trataba de demostrar.

302. PROBLEMA. *Dado un arco de parábola, construirla.*

Si CD (fig. 119) es el arco dado, y se tiran dos cuerdas paralelas, la recta HH' que una sus puntos medios será un diámetro de la curva (**293**); de modo que si M es la interseccion de este diámetro con el arco dado, y se tira por este punto la recta MT paralela á las cuerdas, esta recta será una tangente (**294**), por lo que, formando un ángulo TMF = TMH', resultará la MF que irá á pasar por el focus (**291**). Trazando otras dos cuerdas paralelas entre sí, pero que no lo sean á las dos primeras, y repitiendo sobre ellas la misma construccion, hallarémos otra recta que tendrá que pasar por el focus, y que por su interseccion con la primera determinará este punto. La FX paralela á los dos diámetros será el eje de la parábola (**293**) que cortará á la tangente MT en un punto T, y bajando desde M la MP perpendicular al eje, resultará el vértice de la parábola en el punto A, medio de la distancia TP (**287**): de este modo tenemos ya todos los elementos necesarios para trazar la curva (**286**).

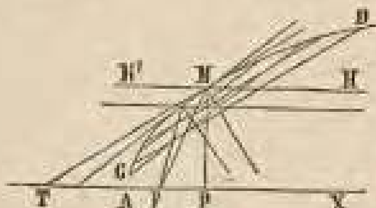


Fig. 119.

303. PROBLEMA. *Por un punto* P *tomado sobre el eje de una parábola se tiran paralelas á todas las tangentes, y por el focus los radios vectores correspondientes á los puntos de contacto; se quiere hallar el lugar geométrico de la interseccion* M *de cada radio vector con la paralela á la tangente que pasa por el extremo de este.*

Tomarémos por orígen el focus, para lo cual bastará poner en la ecuacion de la parábola y en la de la tangente, en vez de x, $x+\frac{1}{2}p$, con lo que no cambiará el coeficiente angular de la tangente, pues no entra en él la abscisa del punto de contacto. Sean x' é y' las coordenadas del punto de contacto, y haciendo $\text{FP}=a$, podrémos representar la paralela á una tangente que pase por el punto P por la ecuacion

$$y=\frac{p}{y'}(x-a) \qquad (1).$$

La de un radio vector será

$$y=\frac{y'}{x'}x \qquad (2);$$

y para espresar que el punto de contacto se halla sobre la parábola servirá la

$$y'^2=2p(x'+\tfrac{1}{2}p) \qquad (3).$$

Eliminando x' é y' entre estas tres relaciones, resultará otra que solo contendrá x, y y cantidades constantes, y será la ecuacion del lugar que se busca.

De la (1) sale

$$y'=\frac{p(x-a)}{y},$$

la (2) da, en virtud de esto,

$$x'=\frac{px(x-a)}{y^2};$$

y poniendo estos valores en la ecuacion (3) y haciendo todas las reducciones se llega á la

$$x^2+y^2=a^2,$$

que representa un círculo que tiene su centro en el foco F y por radio FP.

Observaciones. I. Se debia prever este resultado, que es una consecuencia de la propiedad espuesta en el núm. 291; pues los triángulos TFT' y PFM (fig. 114) son semejantes, y siendo el primero isósceles, tiene que serlo el segundo, y constante por consiguiente la cantidad FM = FP.

II. Si en vez de tirar por el punto P paralelas á las tangentes se tirasen paralelas á las normales, y se buscara el lugar geométrico de la interseccion de cada una de aquellas con el radio vector correspondiente, hallaríamos el mismo círculo que antes: lo cual tambien es consecuencia de la propiedad demostrada en el núm. 291.

III. Hay de notable que este círculo es independiente del parámetro de la parábola, y que por lo mismo, no varía cualquiera que sea este parámetro, con tal que permanezcan constantes el eje y el foco.

294. Problema. *Por el foco de una parábola se tiran rectas que formen un ángulo constante con las tangentes á esta curva: se quiere hallar el lugar geométrico de los puntos de interseccion de cada recta con la tangente respectiva.*

Tomarémos por origen el foco, por eje de las x el de la parábola, y por el de las y una perpendicular á este; en tal concepto, para hallar la ecuacion de una tangente cualquiera, no habrá mas que sustituir en la ecuacion ordinaria (288) $x+\frac{p}{2}$ en vez de x, y resultará

$$y=m\left(x+\frac{p}{2}\right)+\frac{p}{2m} \qquad (1).$$

La ecuacion de una recta que pase por el foco será

$$y=m'x \qquad (2);$$

y como estas dos rectas han de formar un ángulo constante, si designamos por K su tangente, será

$$\frac{m-m'}{1+mm'}=K \qquad (3).$$

Eliminando m y m' entre estas tres ecuaciones llegarémos á una relacion que no contendrá mas que x, y y cantidades constantes, y que será la ecuacion del lugar que vamos buscando, pues x é y pueden considerarse como las coordenadas de un punto comun á las dos rectas. Para conseguirlo, eliminarémos m' entre (2) y (3), sustituirémos en (1) el valor que resulte para m, y quitando denominadores, reduciendo y trasponiendo podrémos poner la ecuacion final bajo la forma

$$(x^2+y^2)[2K(y-Kx)-p(1+K^2)]=0.$$

Como esta ecuacion queda satisfecha cuando se iguala á cero cualquiera de los dos factores del primer miembro, se puede descomponer en otras dos, que son

$$x^2+y^2=0 \quad \text{y} \quad 2K(y-Kx)-p(1+K^2)=0,$$

de las cuales la primera da $x=0$ é $y=0$ que representan el orígen de las coordenadas ó sea el foco, que es evidentemente una solucion estraña al problema; y la segunda puede escribirse bajo la forma

$$y=K(x+\tfrac{1}{2}p)+\frac{p}{2K} \qquad (4).$$

que comparándola con la ecuacion (1) echámos de ver que representa una tangente á la parábola, que forma con el eje un ángulo igual al constante que tiene por tangente K.

OBSERVACION. Cuando el ángulo constante fuese recto, sería $K=\infty$, y dividiendo la ecuacion (4) por K ántes de hacer esta hipótesis, resultaria

$$x+\tfrac{1}{2}p=0, \quad \text{ó sea} \quad x=-\tfrac{1}{2}p,$$

que es la ecuacion de la tangente en el vértice. Vemos pues que se vuelve á encontrar la propiedad demostrada anteriormente (**291**, etc.).

323 PROBLEMA. *Hallar el lugar geométrico que describe el vértice de un ángulo constante que se mueve conservando sus lados tangentes á la parábola.*

Como los lados del ángulo han de ser tangentes á la parábola tendrá que verificarse que

$$y=mx+\frac{p}{2m} \quad \text{é} \quad y=m'x+\frac{p}{2m'} \qquad (1).$$

y representando por K la tangente del ángulo constante habrá de ser.

$$\frac{m-m'}{1+mm'}=K \qquad (2).$$

La ecuacion del lugar resultará de la eliminacion de m y m' entre estas tres ecuaciones; porque puede considerarse que x é y son las coordenadas del vértice del ángulo movible.

La primera ecuacion se puede poner bajo la forma

$$2xm^2-2ym+p=0 \qquad (3).$$

y haciendo las mismas operaciones con la segunda se llegaria á otra que únicamente se diferenciase de la última en que, en vez de m, apareceria m'; por consiguiente, se puede considerar que m y m' son las dos raices de la ecuacion [3]. En su consecuencia, hallarémos

$$m - m' = \frac{\sqrt{y^2 - 2px}}{x} \quad \text{y} \quad mm' = \frac{p}{2x},$$

cuyos valores sustituidos en [2] dan la ecuacion que se busca

$$\frac{\sqrt{y^2 - 2px}}{x + \frac{p}{2}} = K, \quad \text{ó sea} \quad y^2 - K^2x^2 - p(2 + K^2)x - K^2\frac{p^2}{4} = 0 \quad [4],$$

y que es la de una hipérbola que tiene su eje transverso dirigido segun el de la parábola, pues y no entra en esta ecuacion mas que elevado á la segunda potencia, y haciendo $y = 0$ resultan para x dos valores reales: la abscisa del centro es

$$x = -p\frac{2 + K^2}{2K^2}.$$

Si trasladásemos á este punto el origen, quedaria reducida la ecuacion de la hipérbola á

$$y^2 - K^2x^2 + p^2\left(\frac{1 + K^2}{K^2}\right) = 0 \qquad [5],$$

forma que nos hace conocer que las asíntotas de esta hipérbola son las rectas que, referidas al nuevo orígen, tienen por ecuaciones

$$y = \pm Kx.$$

Representando por a y por b los semiejes, serán

$$a = \frac{p\sqrt{1 + K^2}}{K^2}, \quad b = \frac{p\sqrt{1 + K^2}}{K},$$

de donde resulta

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = p \cdot \frac{1 + K^2}{K^2}.$$

Restando de este valor el absoluto de la distancia entre el centro de la hipérbola y el antiguo orígen, resulta

$$p\frac{(1 + K^2)}{K^2} - p\frac{2 + K^2}{2K^2} = \frac{p}{2};$$

de modo que la distancia que hay desde el vértice de la parábola hasta el focus derecho de la hipérbola es $\frac{p}{2}$, lo que equivale á decir que el focus de la parábola es tambien uno de los de la hipérbola.

Por último, tenemos $\frac{a^2}{c} = \frac{p}{K^2}$, y restando este valor de la cantidad $p\frac{2 + K^2}{2K^2}$, que espresa el valor absoluto de la distancia entre el centro de la hipérbola y el vértice de, la parábola, resulta $\frac{p}{2}$. Esto quiere decir que la directriz de la parábola es tambien una de las directrices de la hipérbola.

OBSERVACIONES. I. Cuando sea recto el ángulo constante será $K=\infty$; pero dividiendo la ecuacion (4) por K^2 antes de hacer esta hipótesis, dará al hacerla

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=0, \quad \text{ó} \quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0, \quad \text{de donde sale} \quad x=-\frac{p}{2},$$

que es la ecuacion de la directriz. Por lo tanto, podemos decir que *la directriz de la parábola es el lugar geométrico de las diferentes posiciones que puede tomar el vértice de un ángulo recto, cuyos lados se conservan siempre tangentes á la curva.*

II. Cuando el ángulo constante valga 45°, será $K=1$, y haciendo esta hipótesis en la ecuacion (5) se echa de ver inmediatamente que la hipérbola es equilátera.

306. PROBLEMA. *Teniendo un punto fijo y una série de parábolas que tengan todas un mismo eje y un mismo vértice, y bajando desde aquel punto normales á estas curvas, se quiere hallar el lugar geométrico de los puntos en que cada normal corta normalmente á su respectiva parábola.*

Las parábolas de que se trata referidas á su eje y á la tangente en el vértice tendrán por ecuacion

$$y^2=2px,$$

en la que p es un coeficiente que varía en cada parábola, y que puede ser positivo ó negativo.

Llamando x' é y' á las coordenadas del punto en que cada normal corta normalmente á la respectiva parábola, y x'' é y'' á las del punto fijo desde el que se tiran las normales, tendrémos (**290**)

$$y''-y'=-\frac{y'}{p}(x''-x') \qquad [1],$$

con la

$$y'^2=2px' \qquad [2].$$

Eliminando p entre estas dos ecuaciones llegarémos á otra que solo contendrá x', y' y cantidades constantes, y que será la ecuacion del lugar geométrico: así hallarémos

$$y''-y=-\frac{2x'}{y'}(x''-x'), \quad \text{ó sea} \quad y'^2+2x'^2-y''y'-2x''x'=0.$$

Observando esta ecuacion vemos que representa una elipse que tiene sus ejes paralelos á los coordenados, pasa por el punto fijo y por el vértice comun de las parábolas, y tiene su centro en el medio de la distancia que separa á estos dos puntos.

307. PROBLEMA. *Hallar el lugar geométrico de todos los puntos desde los cuales pueden tirarse á la parábola dos normales perpendiculares entre sí.*

Si representamos por x', y' y x'', y'' las coordenadas de los puntos en que las dos normales cortan normalmente á la curva, las ecuaciones de estas normales serán (**290**)

$$[1] \qquad y-y'=-\frac{y'}{p}(x-x') \quad \text{é} \quad y-y''=-\frac{y''}{p}(x-x'') \qquad [2],$$

á las que habrá que añadir las relaciones

$$[3] \qquad y'^2 = 2px' \quad \text{ó} \quad y''^2 = 2px'' \qquad [4];$$

además, como las dos normales han de ser perpendiculares entre sí, se deberá verificar que

$$\frac{y'y''}{p^2} = -1, \quad \text{ó} \quad y'y'' = -p^2 \qquad [5].$$

Como podemos considerar que x é y sean las coordenadas del punto comun á las dos normales, eliminando x', y', x'' é y'' entre las cinco anteriores ecuaciones, la relacion constante á que lleguemos, compuesta solo de x, y y cantidades conocidas, será la ecuacion del lugar que buscamos; pero se halla esta misma ecuacion con mas brevedad operando como sigue:

Póngase en [1] el valor de y' sacado de [3], y quitando denominadores y trasponiendo, resultará

$$y'^3 + 2p(p-x)y' - 2p^2y = 0.$$

Eliminando del mismo modo x'' entre las relaciones [2] y [4] llegarémos á otra ecuacion semejante á la anterior, que únicamente se diferenciará de esta en que entrará en ella y'' en vez de y'; por consiguiente, podemos considerar que y' é y'' son dos raíces de la ecuacion

$$Y^3 + 2p(p-x)Y - 2p^2y = 0 \qquad [6];$$

y suponiendo que y''' sea la tercera raíz, tendrémos, en virtud de una propiedad de esta ecuacion muy conocida,

$$y'y''y''' = 2p^2y.$$

Sustituyendo en vez de $y'y''$ su valor $-p^2$, quedará

$$-y''' = 2y, \quad \text{que da} \quad y''' = -2y;$$

y como este valor de la tercera raíz ha de satisfacer á la ecuacion [6], sustituyendo $-2y$ en vez de Y, hallarémos

$$-8y^3 - 4p(p-x)y - 2p^2y = 0,$$

ó bien dividiendo por $2y$, como puede hacerse, atendiendo á que es $y=0$ ó que el eje de las x es una solucion extraña al problema, y cambiando los signos

$$4y^2 + 2p(p-x) + p^2 = 0, \quad \text{ó sea} \quad 4y^2 + 3p^2 - 2px = 0,$$

ó finalmente $$y^2 = \tfrac{1}{2}p(x - \tfrac{3}{2}p).$$

Esta es la ecuacion del lugar, y representa una parábola que tiene por parámetro la cuarta parte del de la parábola dada, y cuyo vértice está colocado en el lado de las x positivas y á una distancia $\frac{3}{2}p$ del vértice de aquella.

Observaciones. I. La ecuacion [5] hace ver que los signos de las ordenadas y' é y'' tienen que ser contrarios, y tambien se deduce que $y'^2y''^2 = p^4$, ó $4p^2.x'x'' = p^4$, ó bien $x'x'' = \frac{p^2}{4}$.

II. Como en la ecuacion [6] falta el segundo término, tendremos

$$y'+y''+y'''=0,$$

y por ser

$$y'''=-2y,$$

resulta que

$$y=\tfrac{1}{2}(y'+y''),$$

que quiere decir que la ordenada del punto desde el cual parten las normales es una media diferencial entre las ordenadas de los puntos en que las normales cortan normalmente à la curva.

308. Problema. *Dado un cuadrilátero* ABCD (fig. 120), *y tomando en sus lados cuatro puntos* P, Q, R, S *que los dividan en partes proporcionales, de modo que resulte*

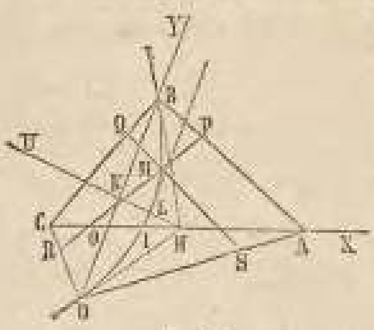


Fig. 120.

$$\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}=\frac{AS}{AD}=\frac{CR}{CD},$$

y uniendo P *con* R *y* Q *con* S, *se trata de hallar el lugar geométrico del punto* M *en que se cortan las líneas que unen aquellos.*

Haciendo

$$\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}=\frac{AS}{AD}=\frac{CR}{CD}=n$$

y

$$\frac{AP}{AB}=\frac{QC}{BC}=\frac{SD}{AD}=\frac{RD}{CD}=n',$$

será

$$n+n'=1 \qquad [1].$$

Tomando por ejes coordenadas las diagonales AC y BD del cuadrilátero, y haciendo $OA=a$, $OC=a'$, $OB=b$, $OD=b'$, resultarán para valores de las coordenadas los siguientes:

para P, $x=na$, $y=n'b$;

Q, $x=-na'$, $y=n'b$;

R, $x=-n'a'$, $y=-nb'$;

S, $x=n'a$, $y=-nb'$.

Por consiguiente, la ecuacion de PR será

$$\frac{y-n'b}{n'b+nb'}=\frac{x-na}{na+n'a'} \qquad [2],$$

y la de QS

$$\frac{y-n'b}{n'b+nb'}=-\frac{x+na'}{na'+n'a}$$

y como se puede considerar que x é y sean las coordenadas del punto M, hallarémos la ecuacion del lugar que buscamos eliminando n y n' entre las [1], [2] y [3]. Para conseguirlo, empezarémos por igualar los segundos miembros de [2] y [3], y haciendo las reducciones, dividiendo por $a+a'$ y teniendo en cuenta la [1], resultará

$$nn'=\frac{x}{a-a'} \qquad [4].$$

Hecho esto, como las ecuaciones [2] y [3] se pueden poner bajo las formas

$$n^2ab'-n'^2a'b+n(ay-b'x)+n'(a'y-bx)=0$$

y

$$n^2a'b'-n'^2ab+n(a'y+b'x)+n'(ay+bx)=0;$$

sumándolas miembro á miembro, reduciendo, dividiendo por $a+a'$ y no olvidando la [1], quedará

$$n^2b'-n'^2b+y=0 \qquad [5].$$

De las [1] y [4] se deduce que n y n' son las raíces de la ecuacion de segundo grado

$$n^2-n+\frac{x}{a-a'}=0,$$

por lo cual, sacando de ella estos valores de n y n' y sustituyéndolos en la [5], hallarémos

$$y=b\left(\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\frac{4x}{a-a'}}\right)^2-b'\left(\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\frac{4x}{a-a'}}\right)^2,$$

ó bien

$$y=-\frac{b-b'}{a-a'}x+\tfrac{1}{2}(b-b')\pm\tfrac{1}{2}(b+b')\sqrt{1-\frac{4x}{a-a'}}.$$

Esta es la ecuacion del lugar, y representa una curva de segundo grado que se extiende indefinidamente en el sentido de las x negativas, pero que está limitada en el de las x positivas, por lo que tiene que ser una parábola.

OBSERVACIONES. I. La curva pasa por los puntos B y D, porque haciendo $x=0$ resultan $y=b$ ó $y=-b'$, resultado que debíamos haber previsto.

II. La recta dada por la ecuacion

$$y=-\frac{b-b'}{a-a'}x+\tfrac{1}{2}(b-b'),$$

que es la HK, que une los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero, es un diámetro.

III. La curva corta á su diámetro en el punto que tiene por abscisa $x=\frac{1}{4}(a-a')$, cuya abscisa es la misma del punto I medio de OH.

En virtud de la propiedad de la subtangente demostrada en el núm. **288**, que subsiste cuando se refiere la curva á un diámetro cualquiera y á la tangente levantada en su extremo (**296**), serán tangentes las rectas HB y HD.

IV. Cuando sea $b=b'$ se confundirá el diámetro HK con la diagonal AC.

Si además de esto cada diagonal del cuadrilátero fuese perpendicular á la otra, AC sería el eje.

Por último, cuando sea $a = a'$ quedará reducida la curva á la diagonal BD.

Conviene que los lectores se ocupen en resolver las cuestiones siguientes:

I. Teorema. *La recta que une el focus de una parábola con la interseccion de una tangente cualquiera y la directriz es perpendicular al radio vector que va al punto de contacto.*

II. Teorema. *Uniendo dos puntos cualesquiera* M *y* M' *(fig. 121) de una parábola con el extremo* A *de un diámetro, y tirando por* M *y* M' *paralelas á este diámetro, resulta un trapecio* MN M'N', *en que la diagonal* NN' *es paralela á la tangente levantada en* A (*).

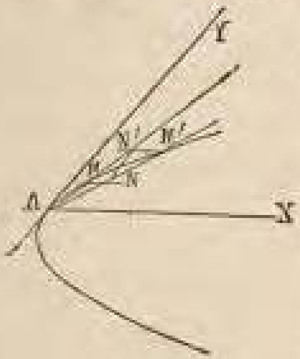


Fig. 121.

III. Teorema. *Cuando por el vértice* A *de una parábola se tira una cuerda cualquiera* AM, *y por* M *se levanta á esta una perpendicular* MB *que termine en el eje de la curva, la distancia* PB *entre el punto* B *y el pié de la ordenada de* M *es igual á la mitad del parámetro.*

IV. Problema. *En un trapecio dado* ABCD *se varía la direccion del lado* CD *sin que altere la superficie de la figura; se quiere hallar el lugar geométrico del punto* M *en que se cortan las diagonales.*

V. Problema. *Hallar el lugar geométrico de los puntos de contacto de todas las tangentes tiradas por un punto fijo á una série de parábolas que tengan todas un mismo eje y vértice comun.*

VI. Problema. *Hallar el lugar geométrico de todos los puntos que tengan la propiedad de que la suma (ó la diferencia) de las distancias que haya desde cada uno de ellos á un punto dado y á una recta fija sea constante.*

VII. Problema. *Hallar el lugar geométrico de todos los puntos que tengan la propiedad de que las dos tangentes tiradas desde cada uno de ellos á una parábola dada formen con el eje de esta ángulos cuya suma sea constante.*

VIII. Problema. *Se ha tirado desde un punto fijo* P *una secante cualquiera* PAB *á una parábola, y sobre aquella se ha tomado una distancia* PM, *media proporcional entre* PA *y* PB; *se quiere hallar el lugar geométrico del punto* M.

IX. Problema. *Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de todas las secantes tiradas á una parábola por un punto fijo.*

X. Problema. *Hallar el lugar geométrico de los centros de todos los círculos que sean tangentes á una recta dada y corten en ángulo recto á otro círculo dado.*

(*) Se supone que los dos puntos M y M' están á un mismo lado del diámetro que se considera. *(Nota del Traductor).*

309 Aplicaciones. I. Todo proyectil lanzado en el vacío describe una parábola, cuyo eje es vertical. Llamando v á la velocidad inicial del proyectil, y α el ángulo que su direccion forme con el horizonte, y refiriendo la curva á dos ejes, horizontal el uno y vertical el otro, tomados ambos en el plano del movimiento y que pasen por el punto de partida, será su ecuacion (*)

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \alpha} \qquad [1],$$

que haciendo $v^2 = 2gh$ se convierte en

$$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{x^2}{4h \cos^2 \alpha} \qquad [2].$$

La curva corta al eje horizontal en un punto que dista del orígen la cantidad

$$x = 4h \cos^2 \alpha \operatorname{tang} \alpha = 2h \operatorname{sen} 2\alpha,$$

cuya distancia se llama la *amplitud del tiro*, y es la mayor posible cuando $\alpha = 45°$.

La abscisa del vértice es la mitad de esta amplitud, ó sea

$$x = h \operatorname{sen} 2\alpha,$$

y de aquí se deduce que la ordenada correspondiente es

$$y = h \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Si se quiere hallar la ordenada del focus habrá que restar del valor que acabamos de hallar para y la cuarta parte del parámetro: y como refiriendo la curva á su eje y vértice no cambiará el coeficiente de x^2 y se tendrá

$$y = \frac{x^2}{4h \cos^2 \alpha} \quad \text{ó} \quad x^2 = 4h \cos^2 \alpha \,.\, y;$$

el valor de la cuarta parte del parámetro será $h \cos^2 \alpha$; de modo que la ordenada del focus tiene que ser $h \operatorname{sen}^2 \alpha - h \cos^2 \alpha$ ó $-h \cos 2\alpha$.

OBSERVACIONES. I. Para hallar el lugar geométrico de los vértices de todas las parábolas que puede describir el proyectil saliendo del mismo punto de partida y con la misma velocidad v, pero variando el ángulo α de tiro, bastará eliminar este ángulo entre las ecuaciones

$$x = h \operatorname{sen} 2\alpha \quad \text{é} \quad y = h \operatorname{sen}^2 \alpha;$$

pero la segunda puede escribirse

$$2y = h - h \cos 2\alpha \quad \text{ó} \quad h - 2y = h \cos 2\alpha,$$

y elevando al cuadrado esta última ecuacion, haciendo lo mismo con la primera, y sumándolas ordenadamente, resulta

$$x^2 + (h - 2y)^2 = h^2 \quad \text{ó} \quad x^2 + 4y^2 - 4hy = 0.$$

(*) Consúltense las nociones de *Mecánica* que se exigen para el ingreso en la escuela politécnica.

que es la de una elipse que tiene su centro sobre el eje de las y á una distancia del orígen igual á $\frac{h}{2}$: su eje menor está dirigido sobre el eje de las y y tiene por valor h, y el eje mayor, que es horizontal, vale $2h$.

II. El lugar geométrico de los focus de estas parábolas resulta de la eliminacion de α entre las ecuaciones

$$x = h \operatorname{sen} 2\alpha \quad \text{ó} \quad y = -h \cos 2\alpha,$$

y está representado por

$$x^2 + y^2 = h^2,$$

que es la ecuacion de un círculo descrito desde el orígen como centro y con el radio h.

310. II. Los cometas describen elipses (*) muy alargadas que pueden compararse con unas parábolas (**285**) en la parte de la órbita visible desde la tierra, y como la parábola es mas sencilla que la elipse, resulta que son menos complicados los cálculos, considerando que la órbita sea una curva de aquella especie: ademas, la aproximacion que se obtiene de este modo es casi siempre la suficiente.

311. III. Las cadenas ó cables que sostienen los travesaños de un puente colgante afectan la forma de una parábola de eje vertical, aun cuando los travesaños no estén equidistantes. Dados los dos puntos de suspension, que pueden hallarse á desigual altura, y la tangente en el vértice, que es horizontal y está determinada por la altura del piso del puente, hay bastantes elementos para trazar la curva.

Para esto se puede hacer uso del teorema demostrado en el núm. **281**. Sean, por ejemplo, A y B (fig. 122) los dos puntos de suspension del cable, y X'X la tangente en el vértice. Bájense desde A y B sobre X'X las perpendiculares AC y BD; búsquese su media proporcional geométrica, y tómese esta distancia sobre BD, desde D hasta I; tírese por I una horizontal que cortará en H á la recta AB, desde H bájese la HS perpendicular á X'X, y el punto S determinado de este modo será el vértice; la recta SH será el eje, y se hallará el parámetro por la relacion $\overline{CS}^2 = 2p.AC$; por consiguiente, hallarémos tambien el focus y la directriz, y con estos datos se podrá ya trazar la curva, siguiendo el procedimiento que se indicó en el núm. **286**.

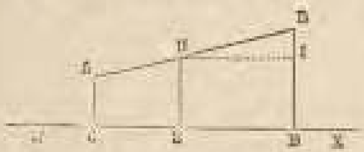


Fig. 122.

312. IV. Se da siempre á los balancines de las máquinas de vapor una forma parabólica, para que segun la teoría de la resistencia de los materiales, presenten la misma en todas sus secciones.

(*) Puede que algunos describan hipérbolas, pero aun no está bien aclarado este punto.

Conociendo la mitad OA de la longitud del balancin (fig. 123) y la mitad de su altura, hay que construir la parábola por su eje OA, su vértice A y un punto B. El parámetro se saca de la relacion $\overline{OB}^2 = 2p \cdot OA$, y por consiguiente el focus y la directriz; y por lo tanto, se construye la parábola por el método esplicado en el n.º **296**.

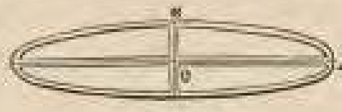


Fig. 123.

313. V. La perspectiva de un círculo puede ser una parábola, como sucede principalmente cuando el círculo está colocado en el plano horizontal del terreno, cortando á la línea de tierra, y siendo tangente á la circunferencia la paralela á aquella línea que pase por el pié del espectador.

Suponiendo que A y B (fig. 124) son los puntos en que la circunferencia corta á la línea de tierra, é I el medio de la distancia AB, el diámetro que pasa por I tomará en la perspectiva la direccion IV, siendo V el punto de vista. La perspectiva C del estremo de este diámetro se determina por el método ordinario: la tangente en este punto queda paralela á la línea de tierra, y por lo tanto á la cuerda AB que CI divide en dos partes iguales; por consiguiente, esta línea CI es un diámetro de la parábola, y para construir esta tenemos un diámetro, su estremo y un punto (A ó B) de la misma. El parámetro relativo á este diámetro se hallará por la relacion $\overline{AI}^2 = 2p' \cdot CI$, y podrán calcularse ó construirse las coordenadas correspondientes á tantas abscisas como se quiera. Bastará las mas veces con determinar las tangentes en A y B, y trazar la curva por medio de los tres puntos A, B, C y sus tangentes respectivas. Se hallará la tangente en A, recordando que la subtangente es doble de la abscisa, aun cuando esté la curva referida á cualquier diámetro y á la tangente levantada en el estremo de este; de modo que se tomará CK = CI, y uniendo A con K se tendrá la tangente en A. Por una razon semejante á esta será KB la tangente en B.

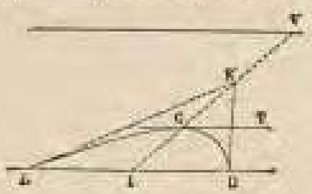


Fig. 124.

314. VI. Muchas son las funciones que se pueden representar por la ordenada de una parábola, como hallarémos pronto ocasion de hacerlo ver; mas por ahora nos limitarémos á presentar un ejemplo.

Fig. 125

De las esperiencias hechas por Mr. Defontaine en un brazo del Rhin se deduce que la velocidad de los hilos líquidos va decreciendo desde la superficie hasta el fondo, siguiendo la misma ley que las ordenadas de una parábola que tuviese por ecuacion

$$y = 1^m,266 - 0,232x^2,$$

en la cual las abscisas son las profundidades contadas desde la superficie, y las ordenadas las velocidades medidas en su sentido horizontal. Esta curva tiene la forma que manifiesta la figura 125.

§ VI.—Teoría general de los focus.

315. Tres definiciones distintas hemos dado de los focus, segun que hemos considerado estos puntos en la elipse, en la hipérbola ó en la parábola. Vamos ahora á presentar bajo un solo punto de vista una teoría que permite buscar de un modo general las propiedades de estos puntos.

Con efecto, ya hemos visto (números **183**, **232** y **285**, observacion) que en cualquiera de las tres curvas tiene el focus la notable propiedad de que su distancia á cualquier punto de la curva es una funcion racional de las coordenadas del punto. Tomando esta propiedad por definicion comun de los focus en las tres curvas de segundo grado, la marcha siguiente nos llevará á la determinacion de estos puntos.

Sean (α, β) el focus F, y (x, y) un punto M tomado en cualquier curva de segundo grado, y con estas notaciones podrá espresarse la distancia FM por

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2};$$

pero como esta distancia ha de ser una funcion racional de x y de y, tambien se podrá representar por

$$ex+fy+g,$$

siendo e, f, g incógnitas, lo mismo que α y β, que es preciso determinar; por consiguiente, se puede establecer la ecuacion

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=ex+fy+g,$$

ó sea $$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(ex+fy+g)^2=0 \qquad [1].$$

Ahora bien; como esta relacion [1] ha de verificarse cualquiera que sea el punto M, no es otra cosa que la misma ecuacion de la curva

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

ó esta misma ecuacion multiplicada por un factor indeterminado λ, y por consiguiente, es preciso que se verifique la siguiente identidad

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(ex+fy+g)^2=\lambda(Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F).$$

Identificando los coeficientes de los términos análogos de ambos miembros [illegible] resultarán tantas ecuaciones como sean necesarias para determinar las incógnitas $\alpha, \beta, \ldots$ [illegible]

No nos detendrémos en desenvolver estos cálculos [illegible] á ningun resultado nuevo nos conducirían [illegible] pero aconsejamos á los [illegible] tores que lo hagan como ejercicio muy con[illegible].

[illegible] sobre la ecuacion general [2] resultarian muy compl[illegible]; pero siendo eviden[illegible] que el punto que goce [illegible] [propie]dad característica de los focus [illegible] propiedad cuando se cambia el [illegible] de ejes, en vez de la ecuacion [2] se tomará [illegible] su ecuacion mas sencilla [illegible] una de las tres en parti[illegible]

II. [illegible] la ecuacion

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(ex+fy+g)^2=0$$

[illegible] el carácter B^2-4AC [illegible]

$$4e^2f^2-4(1-e^2)(1-f^2)=4(e^2+f^2-1),$$

resulta que la curva será

una elipse, si $e^2+f^2<1$;

una hipérbola, $e^2+f^2>1$;

una parábola, $e^2+f^2=1$.

La forma de esta ecuacion es muy cómoda para la resolucion de todos los problemas en que figuren las propiedades de los focus y de las directrices.

III. Esta ecuacion focal hace ver que la existencia de un focus lleva consigo la de una directriz.

Con efecto, representando por δ la distancia que haya desde un focus (α, β) á un punto (x, y) de la curva, será

$$\delta=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2};$$

y llamando δ' á la distancia entre el mismo punto (x, y) y la recta que tenga por ecuacion

$$ex+fy+g=0,$$

se tendrá
$$\delta'=\frac{ex+fy+g}{\sqrt{e^2+f^2}};$$

luego en virtud de la ecuacion focal se verificará

$$\frac{\delta}{\delta'}=\sqrt{e^2+f^2},$$

lo que indica que la recta $ex+fy+g=0$ es una directriz.

De modo que si llega á ponerse la ecuacion de segundo grado bajo la forma [3] se tiene inmediatamente el focus y la directriz correspondiente.

CAPÍTULO X.

COORDENADAS POLARES.

§ I.—Definicion de las coordenadas polares.—Transformacion de las coordenadas rectilíneas en polares y viceversa.

316. Algunas consideraciones sobre el modo de fijar la posicion de cualquier punto en un plano. — Para fijar sobre un plano la posicion de un punto hemos hecho hasta ahora uso de las coordenadas rectilíneas; es decir, de las distancias de este punto á dos rectas concurrentes, midiendo estas distancias en sentido perpendicular á las rectas, si estas eran perpendiculares entre sí, ó paralelamente á ellas cuando la una era oblícua á la otra; pero bien se deja ver que deben existir otros métodos para fijar la posicion de un punto. Por ejemplo, bastaria conocer las distancias que hubiese entre el punto en cuestion y otros dos conocidos de antemano, con tal que se dijese á qué lado habia de quedar el punto respecto á la recta que uniese los dos dados; pues tendria que hallarse en la interseccion de dos circunferencias de círculo trazada cada una de ellas con un radio igual á la distancia supuesta entre el punto buscado y cada uno de los conocidos, y haciendo centro en el respectivo de estos. Tambien se podria fijar un punto en un plano cuando se conociesen los ángulos que formasen con la recta que uniera dos puntos dados las que fuesen desde estos puntos al que se busca; pues este punto tendria que hallarse en la interseccion de las dos rectas que formasen con la que une los puntos dados ángulos iguales á los conocidos. Asimismo quedaria determinada la posicion que un punto debia ocupar sobre un plano cuando se dieran conocidas las distancias á que se hallase este punto de otro fijo y de una recta dada; pues tendria que hallarse en la interseccion de un círculo y una recta, y así sucesivamente.

Segun las diferentes maneras de fijar en un plano la posicion de un punto, resultan otros tantos *sistemas de coordenadas*, que tiene cada uno sus ventajas en determinadas cuestiones. Por ejemplo, en el primero de los que dejamos indicados, llamando ρ y ρ' á las distancias entre un punto cualquiera y otros dos fijos, las ecuaciones sencillísimas

$$\rho+\rho'=\text{constante}, \quad \text{ó} \quad \rho-\rho'=\text{constante},$$

representarán la primera una elipse y la segunda una hipérbola, cuyos focus serán los puntos fijos. Para dar un ejemplo del segundo sistema, llamemos ω y ω' á los ángulos que las rectas tiradas desde un punto cualquiera á dos fijos formen con la recta que une á estos dos, y en la ecuacion

$$\omega + \omega' = \text{constante}$$

tendrémos representada una circunferencia de círculo que pasará por los puntos fijos. Por el tercer sistema, llamando ρ y ϖ las distancias que haya desde un punto cualquiera á uno fijo y á una recta tambien determinada de posicion, y suponiendo que m es una constante, la ecuacion

$$\rho = m\varpi$$

representará una elipse, una hipérbola ó una parábola segun sea $m < 1$, $m > 1$ ó $m = 1$ (184, 231, 285).

Las ventajas que pueden ofrecer estos diferentes sistemas de coordenadas no son bastante generales para que se los prefiera al de coordenadas rectilíneas, que hemos usado hasta ahora, ni al que vamos á dar á conocer.

Observacion. Tanto en los sistemas de coordenadas arriba indicados como en el de las rectilíneas, cada punto que se quiere fijar en un plano está dado por la interseccion de dos lugares geométricos, que á su vez determinan las coordenadas; y bien pronto verémos que sucede otro tanto en las coordenadas polares; sin embargo, se faltaria á la exactitud si para definir un sistema de coordenadas se dijese, como lo hacen algunos, que es un sistema de lugares geométricos, por cuya interseccion se determinan los puntos que se buscan, porque pudiéramos muy bien hacer uso de ciertas coordenadas que no cumplen con esta condicion. Por ejemplo, en el estudio de las curvas se emplean como coordenadas, y produce muy buen resultado, un arco de la misma curva contado desde un punto fijo, y la inclinacion de la normal levantada en el otro estremo del arco (*). Tambien podrian tomarse por coordenadas de una curva su área y la inclinacion de su tangente, etc.; por consiguiente, es mejor limitarse á de-

(*) Véase la *Memoria sobre el desarrollo de las curvas planas*, escrita en 1820 por los señores Dubois-Aymé y Rigaud.

cir que *un sistema de coordenadas es el formado por unas magnitudes variables que sirven para determinar la posicion de un punto.*

316 *duplicado*. **Coordenadas polares.** — Si M (fig. 126) es un punto cuya posicion en un plano dado se quiere determinar, tirando en este plano una recta fija OX, fijando sobre ella un punto O, y uniendo O con M quedará completamente determinada la posicion de M cuando se conozca la longitud de OM y el ángulo MOX; pues no habrá mas que formar en el punto O un ángulo XOM igual al que se diga, y tomar desde O sobre la recta que forme con OX este ángulo una distancia OM igual á la que se dé conocida.

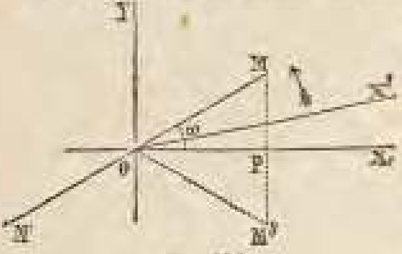


Fig. 126.

El ángulo MOX y la longitud OM forman lo que se llama las *coordenadas polares* del punto M: O es el *polo*, OX el *eje polar*, la distancia OM el *radio vector* del punto M, y aunque el ángulo MOX no tiene nombre particular, le llamarémos *ángulo polar* del punto M para facilitar el lenguaje.

Se acostumbra generalmente á representar por la letra ρ el radio vector, y por ω el ángulo polar. Este ángulo se considera como positivo en el sentido que indica la flecha, es decir, en el mismo que seguiria el radio vector, si estando confundido con OX, girase alrededor del punto O para venir á pasar por M; y puede darse á ω cualquier valor desde cero hasta un número cualquiera de circunferencias positivas ó negativas. En cuanto al radio vector ρ se le considera casi siempre como una distancia absoluta, ó lo que es lo mismo como una cantidad esencialmente positiva; aunque hay casos en que convendria mirar como negativos á los radios vectores, y entonces OM y OM' serian dos iguales y de signo contrario correspondientes á un mismo valor del ángulo polar ω.

317. **Ecuacion de una curva en coordenadas polares.** — Cualquiera ecuacion que tenga la forma $f(\rho, \omega) = 0$ ó $\rho = \varphi(\omega)$ repre-

sentará por medio de coordenadas polares una curva que se construirá del modo siguiente:

Se irá dando á ω valores crecientes á contar desde cero, y que se diferencien entre sí todo lo menos posible; se deducirá de la ecuacion propuesta los valores de ρ correspondientes á los que hayamos dado á ω: siguiendo lo dicho en el núm. 316 se construirán los puntos correspondientes á estos valores de ρ y ω, y si los valores de ω se diferenciaron bastante poco unos de otros, los puntos que resulten de la construccion que vamos esplicando estarán bastante inmediatos entre sí para que uniéndolos por una línea continua, resulte la curva pedida con una aproximacion tan grande como permite el dibujo.

Observacion. Cuando la variable ω esté representada en la ecuacion única y exclusivamente por sus líneas trigonométricas es indiferente que se halle referida á cualquier unidad; pero si entra de cualquier otro modo es preciso tomar por unidad de arco aquel que tenga una longitud igual al radio, ó lo que es lo mismo, tomar por unidad de ángulo el central correspondiente á este arco. De este modo la variable ω espresa nada mas que una razon, y figura en las fórmulas como un número abstracto; así es que un ángulo polar de 90º estará representado por $\frac{\pi}{2}$, uno de 180º por π, y sucesivamente los demás.

318. Segun la misma definicion de las coordenadas polares, la ecuacion

$$\omega = \alpha,$$

en que α es un ángulo dado, representa una recta que pasa por el polo y que forma con el eje polar dicho ángulo α. Si no se admite la consideracion de radios vectores negativos, esta ecuacion representará solamente la mitad de aquella recta, y la otra lo estará por $\omega = \alpha + 180^\circ$; pero conviniendo en que el radio vector pueda tomar valores positivos y negativos las dos mitades de la recta quedarán representadas por aquella misma ecuacion.

Las ecuaciones $\omega = 0$ y $\omega = 180^\circ$ representan el eje polar.

Si r es una longitud dada, $\rho = r$ espresa una circunferencia de círculo cuyo radio es aquella longitud y cuyo centro está en el polo.

La espresion del polo es $\rho = 0$.

319. Cambio del eje polar. — Ocurre con frecuencia tener que hacer el cambio del eje polar sin cambiar el polo; y para esto si OX′ (fig. 126) es el nuevo eje polar, y $\alpha = X'OX$ el ángulo que forme con el primitivo, así como ω' el ángulo polar correspondiente al punto M con relacion al nuevo eje, tendrémos

$$MOX = MOX' + X'OX, \quad \text{ó sea} \quad \omega = \omega' + \alpha,$$

que es la relacion que servirá para cambiar el eje polar conservando el mismo polo, y es muy fácil convencerse de la generalidad de esta fórmula.

320. Cambio de un sistema de coordenadas rectangulares en otro polar, y viceversa.

Si OX y OY (fig. 126) son dos ejes rectangulares, y MP y OP las coordenadas de un punto M referido á estos ejes, tomando primeramente por eje polar el de las x, se tendrá $OM = \rho$ y $MOX = \omega$; pero como las coordenadas rectangulares del punto M son las proyecciones de OM sobre los ejes, cualquiera que sea la posicion del punto M tendrá que verificarse

$$x = \rho \cos \omega \quad \text{é} \quad y = \rho \operatorname{sen} \omega \qquad [1].$$

Si la recta que se tomase por eje polar fuese la OX′, que pasando por el origen formára con OX un ángulo α, habria que sustituir en estas fórmulas $\omega' + \alpha$ en vez de ω, y se tendria

$$x = \rho \cos(\omega' + \alpha) \quad \text{é} \quad y = \rho \operatorname{sen}(\omega' + \alpha) \qquad [2]$$

321. Por el contrario, cuando haya que pasar de un sistema de coordenadas polares á otro rectangular que tenga su origen en el polo, será preciso deducir de las fórmulas precedentes los valores de ρ y de ω ó de ω' en funcion de x y de y.

Elevando al cuadrado las ecuaciones [1] y sumándolas despues ordenadamente, resulta

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad \text{y de aquí} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad [3].$$

Además tendrémos en seguida

$$\cos \omega = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \omega = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad [4].$$

Tambien se puede dividir miembro á miembro las ecuaciones [1], y resultará

$$\tan g\,\omega = \frac{y}{x} \qquad [5].$$

Del mismo modo sacarémos de las ecuaciones [2]

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y

$$\cos(\omega' + \alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \operatorname{sen}(\omega' + \alpha) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \tan g(\omega' + \alpha) = \frac{y}{x}\ [6].$$

322. Aplicacion de las fórmulas precedentes.—Consideremos en primer lugar la ecuacion de una recta referida á ejes rectangulares. Ya vimos en el núm. 71 que llamando p á la perpendicular bajada desde el origen sobre la recta, y α al ángulo que forme esta perpendicular con el eje de las x, podia escribirse la ecuacion de la recta bajo la forma

$$x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha = p,$$

por consiguiente, tomando por eje polar el de las x, y haciendo uso de las fórmulas [1], tendrémos

$$\rho\cos\omega\cos\alpha + \rho\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha = p.$$

de donde se deduce $\quad \rho = \dfrac{p}{\cos(\omega - \alpha)} \qquad [7].$

Tomando por eje polar la perpendicular bajada desde el origen sobre la recta habrá que sustituir en la última fórmula $\omega' + \alpha$ en vez de ω, lo que dará

$$\rho = \frac{p}{\cos\omega'},$$

fórmula que hubiera sido muy fácil hallar directamente, pues la perpendicular p es la proyeccion constante del radio vector.

323. La ecuacion $\quad x^2 - y^2 = a^2$

representa por medio de coordenadas rectangulares una hipérbola equilátera referida á sus ejes. Tomando por eje polar el transverso, el centro por polo y haciendo uso de las fórmulas [1], resultará

$$\rho^2\cos^2\omega - \rho^2\operatorname{sen}^2\omega = a^2, \quad \text{de donde} \quad \rho = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\omega}} \qquad [8].$$

La ecuacion $yx = m^2$ espresada en coordenadas rectangulares representa una hipérbola equilátera referida á sus asíntotas: tomando el centro por polo y una de las asíntotas por eje polar se convertirá, por medio de las fórmulas (1), en

$$\rho^2 \operatorname{sen}\omega \cos\omega = m^2, \quad \text{de donde resulta} \quad \rho = \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{sen} 2\omega}} \qquad [9].$$

224. La ecuacion

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x}$$

espresa en coordenadas rectangulares una cisóide (15), cuyo círculo generador tiene a por diámetro: la misma curva puede representarse, con el auxilio de las fórmulas (1), por la siguiente ecuacion espresada en coordenadas polares

$$\rho = a\,\frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\cos\omega} \qquad [10].$$

Finalmente, $(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4$ representa, por medio de coordenadas rectangulares, un lemniscato (14): pero la misma curva puede representarse en coordenadas polares por la ecuacion

$$(\rho^2 + a^2)^2 - 4a^2\rho^2 \cos^2\omega = a^4, \quad \text{ó sea} \quad \rho = a\sqrt{2}.\sqrt{\cos 2\omega} \qquad [11].$$

225. Supongamos, por el contrario, que se tenga la ecuacion polar

$$\rho = \frac{c}{a\cos\omega + b\operatorname{sen}\omega} \qquad (12);$$

y como de esta se saca $a\rho\cos\omega + b\rho\operatorname{sen}\omega = c$, ó bien, empleando las relaciones (1),

$$ax + by = c,$$

que es la ecuacion de una recta, vemos que la (12) representa una línea recta.

Consideremos tambien la ecuacion polar

$$\rho = a\cos\omega + b\operatorname{sen}\omega \qquad (13).$$

Multiplicándola por ρ, no olvidando que esto introduce un factor ρ que hay que tener en cuenta, se hallará

$$\rho^2 = a\rho\cos\omega + b\rho\operatorname{sen}\omega,$$

ó sirviéndose de las relaciones (1) y (3),

$$x^2 + y^2 = ax + by,$$

que es la ecuacion de una circunferencia de círculo que pasa por el orígen; y por lo tanto podemos decir que la ecuacion (13) es la espresion de una circunferencia de círculo que pasa por el polo.

Observacion. La introduccion del factor ρ está justificada, porque hay que tener en cuenta que la ecuacion $\rho = 0$, correspondiente á este factor, representa el polo (**218**), y esto no cambia en nada el lugar geométrico que espresa la (13).

326. Presentarémos por último ejemplo la ecuacion polar

$$\rho=\frac{a\cos\omega}{1-\operatorname{sen}2\omega} \qquad (14),$$

de la que se deduce, quitando el denominador y multiplicando por ρ

$$\rho^2-2\rho\operatorname{sen}\omega\,.\,\rho\cos\omega=a\,.\,\rho\cos\omega,$$

y echando mano de las relaciones (1) y (3) se la puede trasformar en

$$x^2+y^2-2xy=ax,$$

que representa una parábola: luego tambien la ecuacion (14) representaba esta misma curva.

Observacion. Aquí puede repetirse la observacion hecha en el número anterior.

§ II. — Ejes de simetría, asíntotas y tangentes de las curvas espresadas en coordenadas polares.

327. Ejes de simetría. — Cuando el eje polar lo es tambien de simetría de la curva, á cada punto M (fig. 126) de esta colocado encima de aquel corresponde otro M′ debajo á la misma distancia y en la misma perpendicular tirada desde M á dicho eje. Para estos dos puntos las distancias OM y OM′ son iguales, así como tambien lo son los ángulos MOX y M′OX; y como el primero de estos ángulos se toma siempre como positivo, se debe considerar negativo al segundo; de aquí se deduce que si los valores ρ y ω satisfacen á la ecuacion polar de una curva, tambien tienen que satisfacerla los valores ρ y $-\omega$, para lo cual es necesario que dicha ecuacion no cambie cuando en vez de ω se ponga $-\omega$.

Ejemplo de esto es lo que sucede cuando el ángulo polar entra solamente en la ecuacion por su coseno, secante ó líneas trigonométricas afectadas con esponentes pares, por cuya razon ecuaciones tales como las

$$f(\rho,\cos\omega)=0,\quad f(\rho,\operatorname{sen}^2\omega)=0,\quad f(\rho,\operatorname{tang}^2\omega)=0$$

representan curvas simétricas respecto al eje polar.

328. Cuando la curva tenga un eje de simetría que pase por el polo y que forme con el eje polar un ángulo α, es preciso que al referir la curva á este eje de simetría, es decir, al hacer girar al eje polar hasta que describa un ángulo α con su posicion primitiva se llegue á una ecuacion que no cambie por la variacion de signo del nuevo ángulo polar; y como para efectuar este cambio de eje polar habrá que sustituir en vez de ω, $\omega'+\alpha$, será necesario que la ecuacion polar resultante permanezca la misma aun cuando se cambie $-\omega'$ en ω'. Esto equivale á decir que la ecuacion primitiva no ha de variar cuando en vez de ω se sustituya $\alpha\pm\omega'$; por consiguiente, es preciso que desaparezcan, cualquiera que sea el valor de ω', los términos que puedan cambiar de signo al hacer esta sustitucion; y la ecuacion necesaria para satisfacer á esta condicion nos dará á conocer el valor de α.

Propongámonos por ejemplo la ecuacion

$$\rho=a+b\,\mathrm{sen}\,3\omega,$$

en la que sustituyendo $\alpha\pm\omega'$ en vez de ω, resulta

$$\rho=a+b\,\mathrm{sen}\,3\alpha.\cos 3\omega'\pm b\cos 3\alpha.\mathrm{sen}\,3\omega';$$

y será preciso, para que desaparezca el término en $\mathrm{sen}\,3\omega'$, cualquiera que sea ω', que se verifique $\cos 3\alpha=0$, de donde resulta, tomando solamente los valores positivos

$$3\alpha=90^\circ+n.180^\circ \quad \text{y} \quad \alpha=30^\circ+n.60^\circ,$$

siendo n número entero, lo que da los valores

$$\alpha=30^\circ,\quad \alpha=90^\circ,\quad \alpha=150^\circ,\quad \alpha=30^\circ+180^\circ,\quad \text{etc.},$$

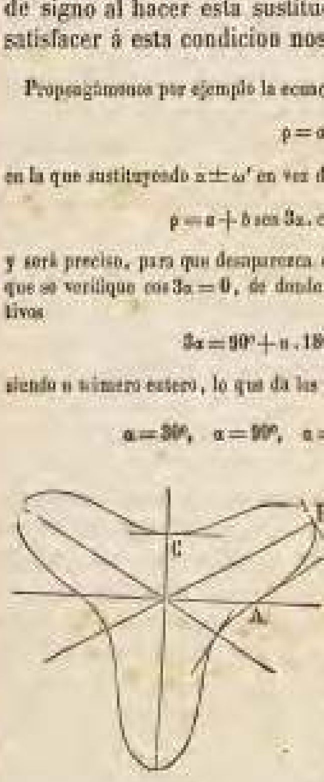


Fig. 127.

que únicamente dan tres direcciones distintas. Estas mismas volveríamos á encontrar si damos á n valores negativos; por consiguiente, la curva tiene tres ejes de simetría, que forman con el polar ángulos de 30, 90 y 150 grados.

Esta circunstancia abrevia de un modo notable la construccion de la curva; pues como estos tres ejes forman entre sí ángulos iguales la dividen en seis partes superponibles (fig. 127). Por regla general, siempre que una curva tenga n ejes de simetría que pasen por el polo y que formen ángulos iguales entre sí, estará compuesta de $2n$ partes superponibles.

OBSERVACION. Admitiendo que los radios vectores puedan tomar valores negativos una ecuacion polar representará una curva simétrica respecto al eje polar cuando no altere al sustituir simultáneamente $180^\circ-\omega$ por ω, y $-\rho$ en vez de ρ. En este caso sería preciso modificar de una manera conveniente el método anterior; esto es, para hallar los ejes de simetría que pasasen por el polo sería preciso sustituir sucesivamente $\alpha+\omega'$ y $\alpha+180°-\omega'$ en vez de ω, y espresar despues que los resultados obtenidos son idénticos cualquiera que sea el valor de ω'.

320. Asímtotas espresadas por coordenadas polares. — Cuando por un valor finito de ω, por ejemplo $\omega=\alpha$, resulta para ρ uno infinito, se debe averiguar si la recta que pase por el polo y forme el ángulo α con el eje polar es una asímtota de la curva, ó si esta tiene alguna rectilínea paralela á aquella recta.

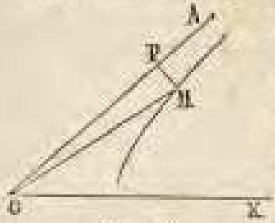


Fig. 128.

Si OA (fig. 128) es la recta que forme el ángulo α con el eje polar, y M un punto cualquiera de la curva, bajando desde M la MP perpendicular á OA, y uniendo O con M, tendrémos

$$\mathrm{POM}=\mathrm{POX}-\mathrm{MOX}=\alpha-\omega;$$

y llamando δ á la distancia MP,

$$\delta=\mathrm{OM}.\mathrm{sen\,POM}=\rho\,\mathrm{sen}(\alpha-\omega).$$

Suponiendo que se haya puesto en esta espresion, en vez de ρ su valor sacado de la ecuacion de la curva, y que ω vaya tendiendo hácia el valor particular α, podrán ocurrir tres casos: si δ tiende hácia cero se irá acercando la curva sin cesar á OA, y esta recta será una asímtota de la curva; si δ tiende hácia un valor finito d, tendrá la curva una asímtota paralela á OA, distante de esta recta una longitud igual á d; y si δ tiende al infinito no será OA asímtota de esta curva ni lo será tampoco ninguna paralela á OA.

El límite de δ admite una representacion muy sencilla, pues

$$\delta=\rho\,\mathrm{sen}(\alpha-\omega)=\frac{\mathrm{sen}(\alpha-\omega)}{\frac{1}{\rho}};$$

y como la inversa $\frac{1}{\rho}$ es una funcion de ω, que puede deducirse de la ecuacion de la curva, designándola por $f(\omega)$, y suponiendo además $\omega=\alpha+h$, resultará

$$\delta=\frac{\operatorname{sen} h}{f(\alpha+h)};$$

y por ser $f(\alpha)=0$ por hipótesis, será

$$\delta=\frac{\operatorname{sen} h}{f(\alpha+h)-f(\alpha)}=\frac{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}{\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}};$$

y por lo tanto $$\lim.\delta=\pm\frac{1}{f'(\alpha)},$$

en cuya fórmula se tomará el signo $+$ ó el $-$, segun que $f'(\alpha)$ sea positivo ó negativo.

Observaciones. I. Hemos omitido á drede el caso en que δ fuese independiente de ω; pues cuando esto sucediese, todos los puntos del lugar representado por la ecuacion propuesta equidistarian de OA y formarian una paralela á esta recta; pero como á la simple vista se reconoce cuándo una ecuacion polar representa una recta (322), claro es que no puede ofrecerse el caso que nos ocupa.

II. Cuando δ tenga un límite d positivo ó negativo, pero diferente de cero, la ecuacion de la asimtota será

$$\rho \operatorname{sen}(\alpha-\omega)=d,$$

pues representa el lugar geométrico de todos los puntos que distan de OA una cantidad igual á d.

Haciendo en ella $\omega=0$, de lo que se deduce que $\rho=\frac{d}{\operatorname{sen}\alpha}$, se tendrá el punto de su interseccion con el eje polar. De este modo queda completamente determinada la asimtota.

Si fuese $\alpha=0$ en vez de hacer en la ecuacion de la asimtota $\omega=0$, se haria $\omega=90°$, y se hallaria de este modo el punto en que la asimtota corta á la perpendicular al eje polar.

330. Ejemplos. I. Consideremos la ecuacion

$$\rho=a\operatorname{tang}\omega$$

Haciendo $\omega = 90^\circ$ resulta $\rho = \infty$, por lo que indagarémos si la perpendicular levantada en el polo al eje polar es una asimtota de la curva. Pero como hallamos

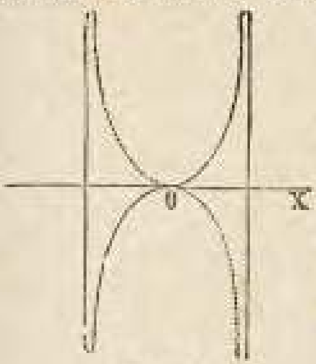


Fig. 129.

$$\delta = a \operatorname{tang} \omega \operatorname{sen} (90^\circ - \omega) = a \operatorname{sen} \omega,$$

cuyo valor se convierte en a cuando se hace en él $\omega = 90^\circ$, la recta tirada por el polo perpendicularmente al eje polar no es una asimtota de la curva, pero sí lo es otra perpendicular al eje polar, distante del polo una cantidad a (fig. 129).

Haciendo $\omega = 270^\circ$, resulta $\rho = \infty$; y procediendo del mismo modo que antes hallarémos otra segunda asimtota paralela á la primera al otro lado del polo y á una distancia de este igual á a.

Si admitimos valores negativos para ρ hallarémos otras dos ramas que tendrán las mismas asimtotas, y son las que están señaladas con puntos en la figura.

II. Consideremos igualmente la ecuacion

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{\operatorname{sen} \omega}},$$

que haciendo $\omega = 0$ da $\rho = \infty$. El valor que hallarémos

$$\delta = \frac{a}{\sqrt{\operatorname{sen} \omega}} \operatorname{sen} \omega = a\sqrt{\operatorname{sen} \omega}$$

se reduce á cero haciendo $\omega = 0$; luego el eje polar es una asimtota de la curva (figura 130).

Fig. 130.

Como el radical puede tomarse con el signo $+$ ó con el $-$, darán los radios vectores negativos otra rama de la curva, que se presenta con puntos en la figura.

III. Tomemos, finalmente, por ejemplo la ecuacion

$$\rho = \frac{a}{\operatorname{sen}^2 \omega},$$

que da tambien $\rho=\infty$ cuando se hace $\omega=0$. Hallarémos que

$$\delta=\frac{a}{\operatorname{sen}^2\omega}\cdot\operatorname{sen}\omega=\frac{a}{\operatorname{sen}\omega},$$

y como este valor se hace infinito cuando $\omega=0$ no tiene la curva por asímtota ni el eje polar ni paralela alguna á este eje (fig. 131).

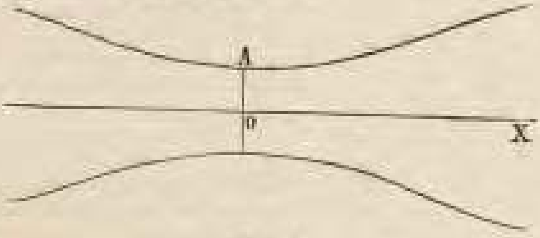


Fig. 131.

331. Puede ocurrir que los valores de ρ tiendan hácia un valor finito a á medida que ω vaya creciendo indefinidamente: en este caso el círculo representado por la ecuacion $\rho=a$ es una verdadera asímtota de la curva que se le aproxima indefinidamente dando vueltas alrededor de su circunferencia sin llegar jamás á tocarla.

A este género pertenecen las curvas representadas por la ecuacion $\rho=a+\frac{m}{\omega}$, las cuales tienen además otra asímtota rectilínea paralela al eje polar y colocada por encima de este á la distancia m. En la figura 132 se ve una curva perteneciente á este género, para la cual son $a=10$ y $m=\frac{\pi}{2}$. La parte señalada con puntos corresponde á los radios vectores negativos.

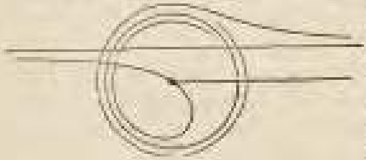


Fig. 132.

Cuando cero sea el límite hácia el cual tienda ρ á medida que ω crezca indefinidamente, es decir, cuando sea $a=0$, el círculo asimtótico quedará reducido al polo, y dicho polo es lo que se llama generalmente un *punto asimtótico*.

332. **Tangentes espresadas por coordenadas polares.**—Para determinar la tangente á una curva cuando esta viene espresada

por su ecuacion polar, se busca el ángulo que dicha tangente forma con el radio vector tirado al punto de contacto.

Sea M (fig. 133) el punto de la curva AB en que se quiere tirar á esta una tangente, y M' otro colocado á una distancia del primero infinitamente pequeña. Como la direccion de la tangente MT levantada en M es el límite de las posiciones que va tomando la secante MM', ó sea MS, á medida que el punto M' se aproxima indefinidamente al M, el ángulo OMT=V que forma la tangente con el radio vector OM es el límite del OMS=U.

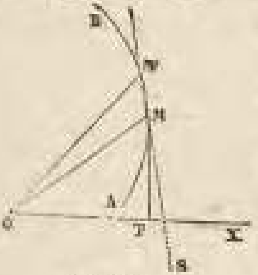


Fig. 133.

Llamando ω y ρ á las coordenadas del punto M, $\omega+h$ y $\rho+k$ serán las del punto M', siendo h y k los incrementos algebráicos que esperimentan respectivamente las coordenadas al pasar del punto M al M'; es decir, que $h=\text{M'OX}-\text{MOX}$ y $k=\text{OM'}-\text{OM}$.

Bajo este supuesto, el triángulo M'OM dará

$$\frac{\text{OM'}}{\text{OM}}=\frac{\text{sen OMM'}}{\text{sen OM'M}}$$

ó
$$\frac{\rho+k}{\rho}=\frac{\text{sen}(180^\circ-\text{OMS})}{\text{sen}(\text{OMS}-\text{MOM'})}=\frac{\text{sen U}}{\text{sen}(\text{U}-h)},$$

de donde resulta

$$\frac{k}{\rho}=\frac{\text{sen U}-\text{sen}(\text{U}-h)}{\text{sen}(\text{U}-h)}=\frac{2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}h\cos(\text{U}-\tfrac{1}{2}h)}{\text{sen}(\text{U}-h)}$$

y
$$\frac{\text{sen}(\text{U}-h)}{\cos(\text{U}-\tfrac{1}{2}h)}=\rho\,.\,\frac{2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}h}{k}=\rho\,.\,\frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}h}{\tfrac{1}{2}h}\,.\,\frac{h}{k}.$$

El primer miembro se reduce en su límite á tang V, porque el límite de U es V; la razon $\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}$ se reduce á la unidad, y queda

$$\text{tang V}=\rho\,.\lim\frac{h}{k} \qquad [1].$$

Cuando la ecuacion de la curva se presente bajo la forma

$\rho=\varphi(\omega)$, el límite de la razon $\frac{k}{h}$, ó sea de la razon entre el incremento de la funcion y el de la variable, es la derivada de ρ con relacion á ω, esto es, $\varphi'(\omega)$; por consiguiente el límite de $\frac{h}{k}$ es en este caso $\frac{1}{\varphi'(\omega)}$, y se tendrá

$$\operatorname{tang} V=\frac{\varphi(\omega)}{\varphi'(\omega)} \qquad [2].$$

Si la ecuacion de la curva tuviese la forma $f(\rho,\omega)=0$, se tendrá (101)

$$\text{lím.}\,\frac{k}{h}=-\frac{f'_\omega(\rho,\omega)}{f'_\rho(\rho,\omega)},$$

y en consecuencia,

$$\operatorname{tang} V=-\frac{\rho f'_\rho(\rho,\omega)}{f'_\omega(\rho,\omega)} \qquad [3].$$

333. Ejemplos. I. Considerémos en primer lugar la curva que tiene por ecuacion

$$\rho=4+2\,\text{sen}\,3\omega,$$

y hallarémos
$$\operatorname{tang} V=\frac{4+2\,\text{sen}\,3\omega}{6\cos 3\omega}.$$

En el punto A (fig. 127) que corresponde á $\omega=0$, será $\operatorname{tang} V=\frac{2}{3}$;

En el B correspondiente á $\omega=30^\circ$, será $\operatorname{tang} V=\infty$;

En el C para el que $\omega=90^\circ$, es $\operatorname{tang} V=\infty$.

Vemos, pues, que en los puntos B y C la tangente es perpendicular al radio vector, segun indica la figura.

II. Si fuese $\rho=a\operatorname{tang}\omega$ (fig. 129), se hallaria $\operatorname{tang} V=\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\omega$.

Haciendo $\omega=0$ resulta $\operatorname{tang} V=0$, de modo que la curva es tangente al eje polar en el punto O.

III. Sea $\rho=\frac{a}{\sqrt{\text{sen}\,\omega}}$ (fig. 130), y hallarémos que en esta curva es $\operatorname{tang} V=-2\operatorname{tang}\omega$.

Haciendo $\omega=90^\circ$, será $\operatorname{tang} V=\infty$; luego la tangente en el punto A es perpendicular al radio vector; y como el eje polar sirve de asíntota á esta curva, se deduce que ha de tener precisamente un punto de inflexion comprendido entre $\omega=0$ y $\omega=90^\circ$.

IV. Cuando sea $\rho=\frac{a}{\text{sen}^2\omega}$ (fig. 131) se hallará que $\operatorname{tang} V=-\frac{1}{2}\operatorname{tang}\omega$.

El valor $\omega=90^\circ$ da $\operatorname{tang} V=\infty$; de modo que la tangente en el punto A es perpendicular al radio vector. Haciendo $\omega=0$ resulta $\operatorname{tang} V=0$; lo que quiere decir que la tangente se confunde con el radio vector. De aqui se deduce que la curva tiene un punto de inflexion entre los correspondientes á $\omega=0$ y $\omega=90°$.

V. Si la espresion propuesta fuese $\rho=a+\frac{m}{\omega}$ se hallaria

$$\operatorname{tang} V=-\frac{\omega^2}{m}\left(a+\frac{m}{\omega}\right)=-\frac{\omega}{m}(a\omega+m).$$

Cuanto mayores sean los valores que ω vaya tomando, tanto mas se aproximará el ángulo V á ser recto. El valor $\omega=-\frac{m}{a}$, que da $\rho=0$, hace tambien que $\operatorname{tang} V=0$; luego en el polo se confunde la tangente con el radio vector.

Observacion. Esto es general; de modo que si dando á ω el valor α resulta $\rho=0$, la tangente en el polo tiene que ser precisamente la misma recta que tenga por ecuacion $\omega=\alpha$; porque esta recta es el límite hácia el cual tiende una secante que pasa por el polo, cuando gira alrededor de este punto hasta confundir en uno solo los dos en que corta á la curva; ó lo que es lo mismo, hasta que el radio vector de este segundo punto se haya reducido á cero.

334. Tomemos tambien por ejemplo la curva llamada *espiral de Arquímedes* (figura 134) que tiene por ecuacion $\rho=\omega$, y hallarémos

$$\operatorname{tang} V=\omega,$$

que indica que la tangente forma con el radio vector ángulos que se aproximan tanto mas á 90° cuanto mayor es ω. Esta curva corta al eje polar en varios puntos, para los cuales irémos hallando sucesivamente

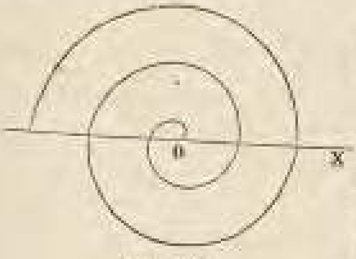


Fig. 134.

$$\omega=0,\quad \omega=\pi,\quad \omega=2\pi,\quad \omega=3\pi,\quad \text{y así para los demás,}$$

En general, toda recta que pase por el polo y forme con el eje polar un ángulo α, corta á la curva en puntos que corresponden á

$$\omega=\alpha,\quad \omega=\alpha+\pi,\quad \omega=\alpha+2\pi,\quad \omega=\alpha+3\pi,\quad \text{y así sucesivamente.}$$

Todos estos números representan al mismo tiempo los valores de la tangente trigonométrica de los ángulos que forman con el eje polar las tangentes levantadas en los mismos puntos.

Observacion. No se ha dibujado en la figura mas que la parte de curva correspondiente á valores positivos de ρ; pero si quisiéramos darle valores negativos, resultaria una segunda curva colocada simétricamente con aquella respecto al eje polar.

335. Considerémos, por último, la curva llamada *espiral logarítmica* que se representa por la ecuacion $\rho = a^{\omega}$ (figura 135), y hallarémos que

Fig. 135.

$$\operatorname{tang} V = \frac{1}{\log' a}$$

es una cantidad constante, en la cual $\log' a$ representa el logaritmo neperiano de a. Este valor de tang V hace ver que la espiral logarítmica tiene la notable propiedad de cortar siempre á los radios vectores bajo un ángulo constante.

Cuando a sea igual á la base del sistema neperiano el ángulo constante V valdrá 45°.

336. Conviene que los lectores se ocupen en construir las curvas que representan las ecuaciones siguientes, y en determinar sus ejes de simetría, sus asíntotas y tangentes:

I. $\rho = 4 - 3\cos\frac{1}{2}\omega.$

II. $\rho = a\dfrac{\cos 2\omega}{2\cos\omega}.$

III. $\rho = a\sqrt{\dfrac{\cos 2\omega}{2\cos\omega}}.$

IV. $\rho = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\omega + b^2\cos^2\omega}}.$

V. $\rho = a\left(\operatorname{sen}\omega + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\omega}\right).$

VI. $\rho = a\omega^2 - b\omega.$

§ III — Ecuaciones de las tres curvas de segundo grado representadas por coordenadas polares.

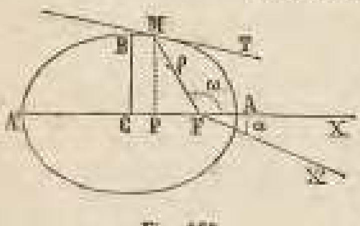


Fig. 136.

337. Elipse.—Si en una elipse (fig. 136) que tenga por eje mayor la recta AA' y uno de sus focus en F, tomamos este focus por polo y la recta FX por eje polar, y suponemos que M sea un punto cualquiera de la curva, tirando el radio vector MF y la perpendicular MP al eje polar, tendrémos segun lo dicho en el número 183 que

$$MF \quad ó \quad \rho=a-\frac{cx}{a}.$$

Además, del triángulo PMF rectángulo en P se deduce

$$PF \quad ó \quad c-x=MF\cos MFP=-\rho\cos\omega.$$

Eliminando x entre estas dos relaciones resultará otra que solo contendrá ω y ρ y será la ecuacion polar de la elipse; así hallarémos

$$\rho=\frac{a^2+c^2}{a+c\cos\omega}=\frac{b^2}{a+c\cos\omega},$$

que dividiendo los dos términos por a y haciendo, para abreviar,

$$\frac{b^2}{a}=p \quad y \quad \frac{c}{a}=e$$

se convierte en $$\rho=\frac{p}{1+e\cos\omega} \qquad [1],$$

en que hay que tener presente que e es menor que 1: esta es la ecuacion polar de la elipse.

337 *duplicado*. Como el ángulo polar ω entra en esta ecuacion representado por su coseno, el lugar geométrico es simétrico con relacion al eje polar (327); por consiguiente, no es necesario construir mas que la parte colocada encima de este eje.

El radio vector ρ no puede hacerse infinito por ninguno de los valores que se den á ω; pues para que el denominador $1+e\cos\omega$ se redujese á cero sería necesario que fuese $\cos\omega=-\frac{1}{e}$, lo que no puede suceder porque e es menor que 1; por consiguiente, esta curva no tiene ramas infinitas.

Haciendo $\omega=0$ resulta $\rho=\frac{p}{1+e}=\frac{a^2-c^2}{a+c}=a-c$, que es en efecto el valor de FA.

Cuando ω va creciendo desde cero á 90°, $\cos\omega$ disminuye, y por consiguiente aumenta ρ. Cuando $\omega=90°$ resulta $\rho=p=\frac{b^2}{a}$, que efectivamente es el valor de la ordenada del focus.

Si ω sigue creciendo desde 90° hasta 180° se hace negativo $\cos\omega$ y aumenta en valor absoluto; por lo tanto, disminuye $1+e\cos\omega$, y continúa ρ aumentando.

Cuando ω llegue á valer 180° resultará $\rho=\frac{p}{1-e}=\frac{a^2-c^2}{a-c}=a+c$, que es realmente el valor de FA'.

338. Quitando el denominador en la ecuacion [1] y dejando todos los términos en el primer miembro se la puede poner bajo la forma

$$\rho+\rho e\cos\omega-p=0.$$

La derivada con relacion á ρ es $1+e\cos\omega$; con relacion á ω es $-e\operatorname{sen}\omega$; luego aplicando la fórmula [3] del núm. 332 se tendrá

$$\operatorname{tang}V=\frac{1+e\cos\omega}{e\operatorname{sen}\omega}.$$

Este valor se hace infinito cuando se da á ω el valor cero ó el de 180°; así que en los puntos A y A' la tangente es perpendicular al radio vector ó sea al eje polar.

Por el contrario, la tangente es paralela al eje polar en el punto en que se verifica que

$$\operatorname{tang}V=-\operatorname{tang}\omega,$$

porque en este caso son suplementarios los ángulos ω y V. Esta condicion se reduce á que

$$\frac{1+e\cos\omega}{e\operatorname{sen}\omega}=-\frac{\operatorname{sen}\omega}{\cos\omega},$$

que equivale á $\cos\omega+e=0$, de donde sale $\cos\omega=-e=-\frac{c}{a}$; por consiguiente $\rho=\frac{p}{1-e^2}=\frac{pa^2}{a^2-c^2}=a$; luego el punto de que se trata es el estremo B del eje menor (183, II).

339. Tambien se puede referir la curva á otro eje polar FX' que forme con el FX, y por debajo de este un ángulo α; pues bastará cambiar en la ecuacion [1] ω en $\omega-\alpha$, lo que dará

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos(\omega-\alpha)}$$

Esta es la forma que generalmente se usa para estudiar las órbitas de los planetas y para otras muchas aplicaciones de la Astronomía.

340. Hipérbola. — Consideremos una hipérbola (fig. 137) que tenga por eje transverso la recta AA′ y uno de sus focus en F. Tomando este punto como polo y FX por eje polar, y suponiendo que M sea un punto cualquiera de la rama izquierda, si unimos M con F y bajamos desde M la MP perpendicular á FX, podrémos establecer, segun lo dicho en el núm. **232**, que

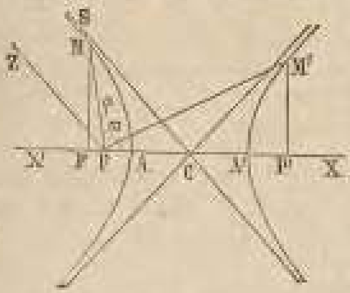


Fig. 137.

$$\text{MF} \quad \text{ó} \quad \rho=\frac{cx}{a}-a,$$

llamando x á la distancia absoluta CP. El triángulo PMF da.

$$\text{PF} \quad \text{ó} \quad x-c=\text{MF}\cos\text{MFP}=-\rho\cos\omega.$$

De la eliminacion de x entre estas dos relaciones sale

$$\rho=\frac{c^2-a^2}{a+c\cos\omega}=\frac{b^2}{a+c\cos\omega},$$

y haciendo como anteriormente

$$\frac{b^2}{a}=p \quad \text{y} \quad \frac{c}{a}=e$$

hallarémos, despues de dividir los dos terminos por a,

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\omega} \qquad [1],$$

que es la ecuacion polar de la rama de hipérbola que estamos considerando. No se diferencia de la que hallamos antes para la elipse sino en que la razon e es mayor que la unidad, á causa de que en la hipérbola es c mayor que a.

Repitiendo los mismos cálculos para otro punto M' colocado en la rama de la derecha, y llamando x á la distancia CP' que hay desde el punto C al pié P' de la ordenada M'P', se hallará sucesivamente

$$\rho=\frac{cx}{a}+a$$

y

$$c+x=\rho\cos\omega,$$

de donde sale eliminando x

$$\rho=\frac{a^2-c^2}{a-c\cos\omega},$$

ó sea

$$\rho=\frac{p}{e\cos\omega-1} \qquad (2),$$

que es la ecuacion polar de la rama de la derecha.

341. Examinemos primeramente la ecuacion (1). Como la variable ω entra solamente por medio de su coseno, la curva tiene que ser simétrica con relacion al eje polar. El radio vector se hace infinito cuando $1+e\cos\omega=0$, que da $\cos\omega=-\frac{1}{e}$, lo cual es posible, porque e es mayor que 1. Sea α el valor de ω que satisface á esta condicion y sea en su consecuencia,

$$\cos\alpha=-\frac{a}{c}, \quad \text{de donde resulta} \quad \operatorname{sen}\alpha=\frac{b}{c} \quad \text{y} \quad \operatorname{tang}\alpha=-\frac{b}{a}.$$

Busquemos si esta curva puede tener alguna asímtota paralela á la recta FZ que forma con FX el ángulo α. Para esto, aplicando el método espuesto en el núm. 329, tendrémos

$$\delta=\rho\operatorname{sen}(\alpha-\omega)=\frac{p\operatorname{sen}(\alpha-\omega)}{1+e\cos\omega}.$$

Sustituyendo en vez de e su valor $-\frac{1}{\cos\alpha}$ y multiplicando los dos términos del segundo miembro por $\cos\alpha$, resultará

$$\delta=\frac{p\cos\alpha\operatorname{sen}(\alpha-\omega)}{\cos\alpha-\cos\omega}=\frac{p\cos\alpha\,.\,2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\omega)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\omega)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\omega-\alpha)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\omega+\alpha)},$$

ó sea

$$\delta=-\frac{p\cos\alpha\cos\frac{1}{2}(\alpha-\omega)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\omega)};$$

por consiguiente, haciendo $\omega=\alpha$, tendrémos

$$\lim \rho = d = -\frac{p\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha},$$

ó sustituyendo los valores de p, de $\operatorname{sen}\alpha$ y de $\cos\alpha$

$$d = +b,$$

lo cual prueba que tiene la curva una asímtota paralela á FZ y colocada á la distancia b de esta recta; esta asímtota tendrá (329) por ecuacion

$$\rho \operatorname{sen}(\alpha-\omega) = +b$$

Haciendo en ella $\omega=0$ resulta

$$\rho = +\frac{b}{\operatorname{sen}\alpha} = +c$$

para la distancia entre el polo F y el punto en que la asímtota corta al eje polar: valor que ya debiamos esperar, pues sabemos que esta asímtota pasa por el centro que se halla á la distancia c del focus.

Respecto á la inclinacion que tiene la asímtota sobre el eje polar, ó eje transverso de la hipérbola, está conforme con lo que vimos en el núm. 253, pues se tiene

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{b}{a}.$$

Cuando se hace crecer á ω desde cero hasta α, el radio vector ρ crece desde $c-a$ hasta el infinito; y teniendo en cuenta la simetría de la curva respecto al eje polar, se tendrá toda la rama colocada á la izquierda.

342. Si se hace variar á ω desde α á 180°, $\cos\omega$ vendrá á hacerse mayor en valor absoluto que $\frac{a}{c}$, se conservará siempre negativo, y tambien lo serán $1+e\cos\omega$ y ρ; por consiguiente, hay que recurrir á la ecuacion (2), pues segun el modo con que se ha obtenido la (1) no hay derecho para admitir, á lo menos *à priori* los valores negativos que ella produce.

La ecuacion (2) representa, lo mismo que la (1), una curva simétrica con relacion al eje polar: da $\rho=\infty$ cuando se hace $\cos\omega=\frac{1}{e}$; de modo que si α' es el valor correspondiente de ω, será

$$\cos\alpha'=\frac{a}{c},\quad \operatorname{sen}\alpha'=\frac{b}{c}\quad \text{y}\quad \operatorname{tang}\alpha'=\frac{b}{a}.$$

En dicha ecuacion hallarémos

$$\delta=\frac{p\operatorname{sen}(\alpha'-\omega)}{e\cos\omega-1},$$

y operando como anteriormente

$$\lim\delta=d=b.$$

Esto manifiesta que la rama de la derecha tiene una asimtota que corta al eje polar á la distancia b del focus F y forma con dicho eje el ángulo α'. Esta asimtota tiene por ecuacion

$$\rho\operatorname{sen}(\alpha'-\omega)=b,$$

que haciendo $\omega=0$ da $\rho=\frac{b}{\operatorname{sen}\alpha'}=c$.

De aquí se deduce que tambien esta asimtota pasa por el punto C centro de la curva, y que su inclinacion está conforme con lo que se sabe respecto de la hipérbola, porque se tiene que

$$\operatorname{tang}\alpha'=+\frac{b}{a}.$$

Por el valor $\omega=0$ da la ecuacion [2] $\rho=\frac{p}{e-1}=\frac{c^2-a^2}{c-a}=c+a$, que es efectivamente la distancia FA'.

Cuando se hace crecer á ω desde cero hasta α' los valores de ρ se conservan siempre positivos y van creciendo, por cuanto $\cos\omega$ va disminuyendo; y teniendo en cuenta lo simétrica de la curva puede hallarse toda la rama de la derecha.

Si se diese á ω valores mayores que α', como seguiria disminuyendo $\cos\omega$, se harian negativos $e\cos\omega-1$ y ρ.

No se puede admitir *à priori* estos valores negativos del radio vector; pero es muy notable que admitiéndolos, cualquiera de las dos ecuaciones [1] ó [2] da toda la curva. Con efecto, acentuemos en la segunda ω y ρ para mayor claridad, y escribamos

$$(1)\qquad \rho=\frac{p}{1+e\cos\omega}\quad \text{y}\quad \rho'=\frac{p}{e\cos\omega'-1}\qquad (2).$$

Estableciendo la relacion $\omega-\omega'=180°$, de la cual se deduce que $\cos\omega'=-\cos\omega$, hallarémos $\rho'=-\rho$. Esto quiere decir que si se considera las dos direcciones opuestas sobre una misma recta que pase por el focus, y en una de ellas se toma el radio vector dado por la ecuacion (1), y en la otra el que da la (2), se hallarán siempre para estos dos radios vectores valores iguales y de signo contrario.

Por consiguiente, admitiendo que ρ pueda tomar valores negativos, cualquiera de las dos ecuaciones (1) ó (2) dará las dos ramas de la curva, porque los valores negativos que resulten para ρ en una de ellas corresponden á los mismos puntos que los positivos dados por la otra.

343. La inclinacion de la tangente sobre el radio vector queda determinada por la ecuacion.

$$\text{tang}\, V=\frac{1+e\cos\omega}{e\,\text{sen}\,\omega},$$

lo mismo que en la elipse.

Tanto cuando $\omega=0$ como cuando $\omega=180°$ resulta tang $V=\infty$; de modo que en los estremos del eje transverso la tangente es perpendicular al radio vector, es decir, al mismo eje transverso con el cual se ha confundido aquel.

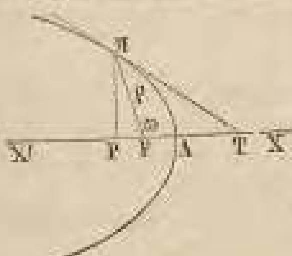


Fig. 138.

A proporcion que ω aumenta, disminuye $\cos\omega$ y crece $\text{sen}\,\omega$, por cuya doble razon se va haciendo menor tang V.

Si $\omega=\pi$ será tang $V=0$; y en este caso la tangente toma la direccion del radio vector.

344. Parábola. — Consideremos una parábola (fig. 138) que tenga por eje AX y su focus en F. Tomemos este focus por polo y el eje AX por eje polar.

Sea M un punto cualquiera de la curva; unámosle con F, y bajemos desde él la perpendicular MP á XX'.

Ya hemos visto en el núm. 285 que

$$\text{MF} \quad \text{ó sea} \quad \rho = x + \frac{p}{2},$$

llamando x á la distancia AP. Por otra parte, el triángulo MPF da

$$\text{PF}, \quad \text{ó sea} \quad x - \frac{p}{2} = \text{MF} \cos \text{MFP} = -\rho \cos \omega.$$

De la eliminacion de x entre estas dos relaciones, sale

$$\rho = \frac{p}{1 + \cos \omega} \qquad [1],$$

que es la ecuacion polar de la parábola, y únicamente se diferencia de las de la elipse é hipérbola en que e es igual á la unidad.

345. Esta ecuacion representa una curva simétrica con relacion al eje polar, porque ω entra solamente representada por su coseno.

El radio vector se hace infinito cuando se da á ω el valor de $180°$; pero en este caso

$$\delta = \rho \operatorname{sen}(180° - \omega) = \frac{p \operatorname{sen} \omega}{1 + \cos \omega},$$

cuya cantidad se convierte en el infinito cuando $\omega = 180°$; por consiguiente, esta curva no tiene asíntota rectilínea que sea paralela á la direccion que se considera.

Dando á ω el valor 0 resulta para el de ρ $\frac{p}{2}$, que es, en efecto, el de la distancia FA. Cuando se dan á ω valores crecientes desde cero hasta $180°$, tambien el radio vector crece desde $\frac{p}{2}$ hasta el infinito; y teniendo en cuenta la simetría de esta curva respecto al eje polar puede hallarse toda ella.

346. Hallarémos que $\operatorname{tang} V = \frac{1 + \cos \omega}{\operatorname{sen} \omega} = \cot \frac{1}{2}\omega$. Esta relacion demuestra una propiedad de la parábola que ya conocemos. En

efecto, llamando ω' al ángulo MFP, suplemento de ω, tendrémos $\cot\frac{1}{2}\omega=\tang\frac{1}{2}\omega'$; por consiguiente, $V=\frac{1}{2}\omega'$ ó $TMF=\frac{1}{2}MFP$, siendo MT la tangente en el punto M.

Efectivamente, en el núm. 291 hemos visto que la tangente á la parábola forma ángulos iguales con el eje y con el radio vector que va al punto de contacto; por consiguiente, siendo isósceles el triángulo MFT tendrémos $MFP=2FMT$.

Haciendo $\omega=0$ resulta $\tang V=\infty$; de modo que la tangente levantada en el vértice es perpendicular al radio vector, ó lo que es lo mismo al eje.

A proporcion que ω aumenta disminuye $\cot\frac{1}{2}\omega$, y lo mismo sucede á la $\tang V$; y para $\omega=180°$, ó lo que es lo mismo, para un punto situado sobre la curva á una distancia infinita, tendrémos $\cot\frac{1}{2}\omega=0$, de donde resulta que $V=0$, lo cual quiere decir que en este punto se confunde la tangente con el radio vector, y este á su vez con el eje.

§ IV. — EJERCICIOS Y APLICACIONES

317. PROBLEMA I. *Un disco vertical dotado de un movimiento de rotacion alrededor de su centro* O *gira en el sentido indicado por la flecha; un punto material cae libremente siguiendo la direccion del diámetro vertical* AB *del disco, dejando sobre este un rastro coloreado; se quiere hallar la curva formada por este trazo.*

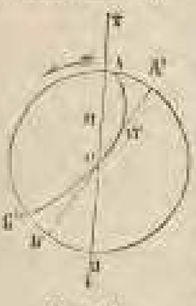


Fig. 139.

Esta curva es la misma que se formaria cuando el móvil recorriese el diámetro AB con un movimiento uniformemente acelerado, al mismo tiempo que este diámetro girase alrededor del punto O con movimiento uniforme y en sentido contrario al que indica la flecha.

Sea A'B' la posicion de AB al cabo del tiempo t, y M la que el móvil hubiera ocupado al terminar el mismo tiempo sobre el diámetro AB, si este hubiese permanecido vertical: la posicion que este punto ocupará realmente en atencion al movimiento de AB será en M' á una distancia OM' del centro igual á OM. Designando OM' por ρ, y por ω el ángulo AOA', como el movimiento del punto material sobre AB es el de un cuerpo que cae libremente en el vacío, tendrémos, llamando r al radio del disco (véanse las *Nociones de Mecánica*)

$$AM, \text{ ó sea } r-\rho=\tfrac{1}{2}gt^2.$$

Al mismo tiempo, y en atencion á ser uniforme el movimiento de AB, será

$$\omega=\alpha t.$$

siendo α el ángulo que describe OA en la unidad de tiempo; y eliminando entre esta relacion y la anterior la cantidad t, resultará la ecuacion del lugar que se busca

$$\rho = r - \tfrac{1}{2} g \frac{\omega^2}{\alpha^2} \qquad (1)$$

La curva tiene la forma que manifiesta la figura; la tangente en A es perpendicular al radio vector OA; en O forman OA y la tangente el ángulo que expresa la relacion (**323**, obs.)

$$\omega = \alpha \sqrt{\frac{2r}{g}}.$$

Si se prolongase esta curva mas allá de la circunferencia del disco, resultaria una espiral de un género particular, que seria fácil construir por puntos.

328. Problema II. *Suponiendo que dos discos tienen paralelos y muy próximos sus planos y que cada uno gira alrededor de su respectivo centro (fig. 140) en el sentido que manifiesta cada flecha, se quiere hallar la curva que traza sobre el disco mayor un punzon perpendicular á los planos de los discos y unido invariablemente á la circunferencia del menor. Para mayor sencillez se supone que la circunferencia del disco menor pasa por el centro del mayor.*

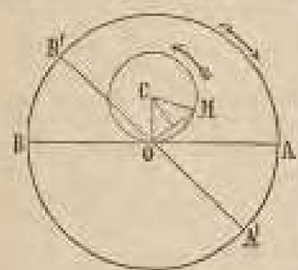


Fig. 140.

Suponiendo que sea M la posicion que haya tomado el punzon al cabo del tiempo t, y A′B′ la que corresponde al terminar este mismo tiempo al diámetro AB tangente en un principio á la circunferencia menor en el punto O, y llamando α y β á los ángulos descritos en la unidad de tiempo por los respectivos radios de cada disco, como estos discos giran con movimiento uniforme, tendrémos

$$\mathrm{OCM} = \alpha t \quad \text{y} \quad \mathrm{AOA'} = \beta t.$$

Llámese ρ á la distancia OM, ω al ángulo MOA′ que forma el radio vector OM con el diámetro móvil A′B′ al que hay que referir toda la curva; finalmente, llámese r al radio del círculo menor, y en virtud de estas notaciones sacarémos del triángulo isósceles OCM

$$\mathrm{OM} = 2r \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\mathrm{OCM}, \quad \text{ó bien} \quad \rho = 2r \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\alpha t.$$

Como además $\quad \omega = \mathrm{MOA} + \mathrm{AOA'} = \tfrac{1}{2}\mathrm{OCM} + \mathrm{AOA'} = \tfrac{1}{2}\alpha t + \beta t.$

si eliminamos t entre esta relacion y la anterior, tendrémos la ecuacion del lugar geométrico que se busca, que es

$$\rho = 2r \operatorname{sen} \frac{\alpha\omega}{\alpha + 2\beta} \qquad (1)$$

Si ambos discos tuviesen la misma velocidad sería $\beta = \alpha$, y la ecuacion anterior se reduciría á

$$\rho = 2r \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\omega,$$

y la curva que el punzon describiría en este caso sería la que representa la figura 141.

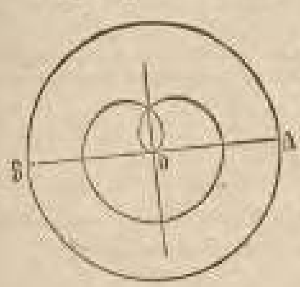


Fig. 141.

Observaciones. I. Si ambos discos girasen en el mismo sentido sería preciso cambiar el signo á cualquiera de las dos cantidades α ó β, y resultaría en ambos casos

$$\rho = 2r \operatorname{sen} \frac{\alpha\omega}{\alpha - 2\beta} \qquad [2].$$

II. Si el disco mayor permaneciese inmóvil sería $\beta = 0$, y quedaría

$$\rho = 2r \operatorname{sen} \omega,$$

que es la ecuacion polar de la circunferencia menor.

219. Problema III. *Hallar el lugar geométrico que va describiendo el vértice A' de una parábola móvil que rueda sobre otra fija sin resbalar, suponiendo que al principio del movimiento el vértice A' de la parábola móvil estaba en contacto con el A de la fija, que el eje de aquella es A'X', el de esta AX y ambas parábolas iguales* (fig. 142).

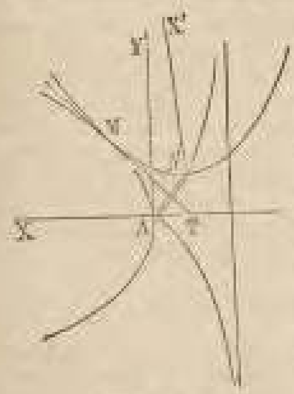


Fig. 142.

Si M es el punto de contacto de ambas parábolas en un instante cualquiera, tendrán en él una tangente comun MT perpendicular en el punto medio I de la recta AA' que une sus vértices, pues esta tangente comun será el eje de simetría del sistema formado por las dos parábolas en el instante que se considera. Por consiguiente, representando AA' por ρ, y el ángulo A'AT por ω, las coordenadas polares del punto I serán $\frac{1}{2}\rho$ y ω. La ecuacion de la tangente MT referida al eje AX y á la perpendicular AY tendrá la forma (**289**)

$$y = mx + \frac{p}{2m},$$

y la perpendicular AA' á esta tangente quedará representada por

$$y = -\frac{1}{m}x.$$

En estas dos ecuaciones se puede considerar que x é y representan las coordenadas rectangulares del punto I comun á las dos rectas, y como entre estas coordenadas y las polares del mismo punto existen las relaciones

$$x=\tfrac{1}{2}\rho\cos(180^\circ-\omega)=-\tfrac{1}{2}\rho\cos\omega \quad \text{ó} \quad y=\tfrac{1}{2}\rho\,\text{sen}(180^\circ-\omega)=\tfrac{1}{2}\rho\,\text{sen}\,\omega$$

se puede con su auxilio transformar las anteriores en

$$\rho\,\text{sen}\,\omega=-m\rho\cos\omega+\frac{p}{m}$$

y
$$\rho\,\text{sen}\,\omega=\frac{1}{m}\rho\cos\omega, \quad \text{de donde sale} \quad m=\frac{\cos\omega}{\text{sen}\,\omega}.$$

Eliminando m resultará la ecuacion del lugar, que es

$$\rho\,\text{sen}\,\omega=-p\frac{\cos^2\omega}{\text{sen}\,\omega}+\frac{p\,\text{sen}\,\omega}{\cos\omega}, \quad \text{ó bien} \quad \rho=p\frac{\text{sen}^2\omega}{\cos\omega} \qquad [1],$$

y representa una cisóide (**15**, **324**) que tiene por asíntota la perpendicular al eje de la parábola fija tirada á una distancia p del vértice.

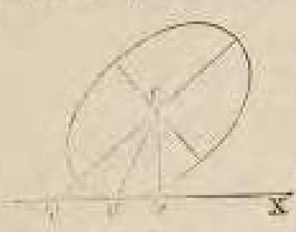


Fig. 143.

350. PROBLEMA IV. *Hallar el lugar geométrico descrito por el centro de una elipse que se mueve conservándose siempre tangente á una recta fija en un mismo punto de esta.*

Sean TX la tangente fija (fig. 143) y O el punto de ella en que se ha de verificar constantemente el contacto. Desde el centro C de la elipse móvil bajarémos la perpendicular CP á la recta OX, y unirémos C con O; de modo que representando la distancia OC por ρ y el ángulo COX por ω, y llamando x é y á las coordenadas del punto O con relacion á los ejes de la elipse móvil, tendrémos

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad [1]$$

y
$$x^2+y^2=\overline{OC}^2=\rho^2 \qquad [2],$$

de las que sacarémos fácilmente

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{\rho^2-b^2}{c^2} \quad \text{é} \quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-\rho^2}{c^2} \qquad [3].$$

Como el ángulo COP, ó sea ω, es la suma de los OCT y OTC, tendrémos

$$\text{tang OCT}=\frac{y}{x} \quad \text{y} \quad \text{tang OTC}=\frac{b^2x}{a^2y};$$

por consiguiente,
$$\text{tang}\,\omega=\frac{\dfrac{y}{x}+\dfrac{b^2x}{a^2y}}{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\frac{a^2b^2}{c^2xy},$$

de donde se deduce que

$$xy=\frac{a^2b^2\cot\omega}{c^2} \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2b^2\cot^2\omega}{c^4}$$

y sustituyendo en vez de $\frac{x^2}{a^2}$ é $\frac{y^2}{b^2}$ sus valores, resultará

$$(\rho^2-b^2)(a^2-\rho^2)=a^2b^2\cot^2\omega \qquad [4].$$

ó sea

$$\rho^4-(a^2+b^2)\rho^2+a^2b^2\operatorname{cosec}^2\omega=0 \qquad [5].$$

que es la ecuacion polar del lugar.

Esta es simétrica respecto al eje polar, pues no cambia su ecuacion cuando en vez de ω se escribe en ella $-\omega$: tambien es simétrica respecto á la perpendicular al eje polar tirada por el polo, pues su ecuacion da el mismo resultado cuando en vez de ω se pone $90^\circ+\omega'$ ó $90^\circ-\omega'$.

Dando á ω valores crecientes á partir de cero resultan imaginarios los de ρ hasta llegar á

$$(a^2+b^2)^2=4a^2b^2\operatorname{cosec}^2\omega \quad \text{ó sea} \quad \operatorname{sen}\omega=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Pero llamando α al ángulo que tenga por tangente $\frac{b}{a}$, hallarémos

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{y} \quad \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \text{de donde resulta} \quad \operatorname{sen}2\alpha=\frac{2ab}{a^2+b^2};$$

de modo que se conservarán imaginarios los valores de ρ mientras que ω sea menor que 2α, y volverán tambien á serlo desde que ω pase de $180^\circ-2\alpha$.

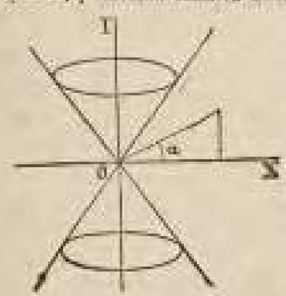


Fig. 144.

Para $\omega=2\alpha$ son iguales los dos valores positivos de ρ, verificándose que

$$\rho=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Si continúan creciendo los valores de ω se separan los dos positivos de ρ, y cuando $\omega=90^\circ$ resultan $\rho=a$ y $\rho=b$.

Tambien podemos asegurarnos de que,

si $\quad \omega=2\alpha,\quad$ será $\quad \operatorname{tang}V=0,$

y si $\quad \omega=90^\circ,\quad \operatorname{tang}V=\infty.$

De todo lo dicho podemos deducir que la curva tiene la forma que representa la figura 144, en que la parte colocada debajo del eje polar corresponde al caso en que la elipse móvil estuviese tambien colocada debajo del mismo eje.

351. Problema V. *Hallar el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que reciban de dos focos luminosos de igual intensidad colocados en aquel plano la* *misma cantidad total de luz que recibirían cuando los dos focos estuviesen reunidos en el mismo punto medio de la distancia que los separa.*

Tomarémos por eje polar la recta FF' (fig. 143) que une los dos focos luminosos, y por polo el punto O medio de esta distancia; y suponiendo que M sea un punto del lugar geométrico que buscamos le unirémos con los F, O y F'; supondrémos que OF $=a$, MO $=\rho$, MOF $=\omega$, MF $=\zeta$ y MF' $=\zeta'$; por último, representarémos por λ la cantidad de luz que un punto colocado á la unidad de distancia de cualquiera de los focos recibiria de él.

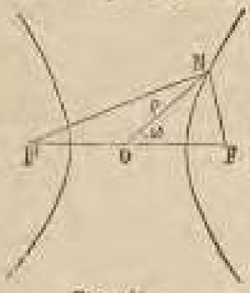


Fig. 143.

Como las cantidades de luz que recibe un punto varían en razon inversa de los cuadrados de sus distancias al foco, las que recibe el punto M de los dos focos propuestos serán $\frac{\lambda}{\zeta^2}$ y $\frac{\lambda}{\zeta'^2}$; la que recibiria de los mismos si estuviesen reunidos en el punto O sería $\frac{2\lambda}{\rho^2}$; de modo que deberá verificarse que

$$\frac{\lambda}{\zeta^2}+\frac{\lambda}{\zeta'^2}=\frac{2\lambda}{\rho^2}, \quad \text{ó bien} \quad \rho^2(\zeta^2+\zeta'^2)=2\zeta^2\zeta'^2.$$

Ahora bien; los triángulos MOF y MOF' dan

$$\zeta^2=\rho^2+a^2-2a\rho\cos\omega \quad \text{y} \quad \zeta'^2=\rho^2+a^2+2a\rho\cos\omega,$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion anterior resulta

$$2\rho^2(\rho^2+a^2)=2[(\rho^2+a^2)^2-4a^2\rho^2\cos^2\omega],$$

y reduciendo
$$\rho^2(4\cos^2\omega-1)=a^2,$$

que es la ecuacion polar del lugar geométrico buscado.

Es fácil conocer que este lugar es una hipérbola cuyos focos son F y F', y cuyas asíntotas forman ángulos de 60° con el eje transverso.

352. Conviene que los lectores se ejerciten con las cuestiones siguientes:

I. *Resolver el problema del núm.* **347** *suponiendo que el disco tenga un movimiento de rotacion uniformemente variado.*

II. *Resolver el problema del núm.* **348** *bajo el supuesto de que uno de los discos esté animado del movimiento uniformemente variado.*

III. *Hallar el lugar geométrico que describe uno de los focos de una hipérbola que rueda sin resbalar sobre otra igual y fija, suponiendo que al principio del movimiento están en contacto uno de los vértices de la primera con el correspondiente de la segunda.*

IV. *Hallar el lugar geométrico que describirá el foco de una parábola que se mueve conservándose siempre tangente á una recta dada en un mismo punto de esta.*

V. *Hallar todos los puntos que estando situados en un plano reciban de dos focos luminosos cualesquiera colocados en el mismo cantidades de luz proporcionales á dos números dados.*

353. Aplicaciones. — I. Las *excéntricas* que se usan en las máquinas para producir movimientos alternativos mas ó menos complicados pueden servir de ejemplo para el empleo de las coordenadas polares.

Supongamos que una pieza móvil PP (fig. 146) esté sujeta á moverse de tal modo que el punto A recorra la recta AB, y que se trate de hacer que dicho punto haya recorrido este camino en el tiempo T, siguiendo una ley espresada por la ecuacion

Fig. 146.

$$e = f(t) \qquad (1),$$

en la que e representa la distancia entre el móvil y el punto A al cabo del tiempo t. Elíjase en la prolongacion de BA, y á una distancia cualquiera a, un punto O, que se tomará por polo, así como la recta OB por eje polar. Constrúyase la curva representada por la ecuacion polar

$$\rho = a + f\left(\frac{T}{\pi}\omega\right) \qquad (2),$$

y sea AMB la parte de esta curva comprendida entre $\omega = 0$ y $\omega = \pi$: claro es que, colocando en el punto O perpendicularmente al plano de la figura un eje, y haciendo girar alrededor de este con movimiento uniforme un cuerpo que tenga la forma de la curva AMB, de modo que la media revolucion se complete en el tiempo T, la pieza PP será llevada desde A hasta B segun la ley pedida y en virtud del movimiento de aquel cuerpo.

En efecto, siendo uniforme el movimiento de rotacion, si t representa el tiempo que emplea un radio vector en describir el ángulo ω, tendrémos que

$$\frac{\omega}{\pi} = \frac{t}{T} \quad \text{de donde se deduce que} \quad \frac{T}{\pi}\omega = t;$$

además, cuando el punto M, que tiene por coordenadas ω y ρ, haya venido á colocarse sobre AB, el móvil habrá avanzado una cantidad e igual á OM — OA, ó sea á $\rho - a$; es decir, á $f\left(\frac{T}{\pi}\omega\right)$, ó lo que es lo mismo, á $f(t)$; por consiguiente, tendrémos que $e = f(t)$, que es lo que se trataba de encontrar.

El móvil retrocede despues desde B hácia A por medios que no pueden esplicarse en este tratado por ser ajenos á su objeto.

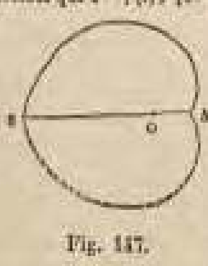


Fig. 147.

Observaciones. I. La excéntrica, llamada *de corazon* (fig. 147), pertenece á este género, siendo la curva polar una espiral de Arquímedes, y está por consiguiente destinada á producir un movimiento uniforme.

II. Cuando el movimiento deba sufrir interrupciones, se obtienen estas por medio de curvas discontinuas, en las que el movimiento se produce por medio de arcos de curvas análogas á las espirales, y las interrupciones del movimiento por arcos de círculo que tengan su centro en el polo. La figura 148 puede servir como ejemplo de una excéntrica de esta clase, que produce en una semi-revolucion dos movimientos y dos interrupciones.

Fig. 148.

354. II. Se puede usar las coordenadas polares lo mismo que las rectangulares para la representacion gráfica de las funciones; pero deben preferirse las primeras siempre que en la funcion no entren mas que las líneas trigonométricas de la variable.

Así hemos visto (**309**) que la ecuacion $\rho = \dfrac{c}{a\cos\omega + b\,\text{sen}\,\omega}$ representa una recta, y que la $\rho = a\cos\omega + b\,\text{sen}\,\omega$ un círculo, al paso que por coordenadas rectangulares las ecuaciones

$$y = \frac{c}{a\cos x + b\,\text{sen}\,x} \quad \text{ó} \quad y = a\cos x + b\,\text{sen}\,x$$

representarian curvas mucho mas complicadas.

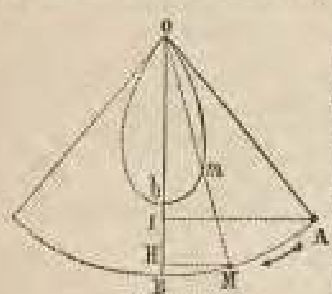


Fig. 149.

355. III. Suponiendo que O (fig. 149) sea el punto de suspension de un péndulo simple, que estando al principio colocado en la posicion OA sin velocidad alguna inicial haya venido á colocarse al cabo de un cierto tiempo en la posicion OM, que AI y MH sean las perpendiculares bajadas desde los puntos A y M á la vertical OB; y representando por α el ángulo AOB y por ω el MOB, se demuestra en Mecánica que la velocidad V del punto M se expresa por la relacion

$$V = \sqrt{2g \, . \, \text{IH}}$$

ó por

$$V = \sqrt{2g(\text{OH} - \text{OI})} = \sqrt{2ga(\cos\omega - \cos\alpha)},$$

en que g representa el número $9^m,81$ y a la longitud OA del péndulo. Esta ley se puede representar en la curva Omb, tomando V por radio vector y ω por ángulo polar; y si Ob representa la velocidad del móvil en el punto A, Om será su velocidad en el punto M.

356. IV. Sea O (fig. 150) la proyeccion del eje horizontal de una rueda que gira con un movimiento periódico en el sentido que indica la flecha por la accion de dos fuerzas constantes, una la F aplicada al boton M de una manivela OM adherida al eje O perpendicularmente á su direccion, la otra la P aplicada tangencialmente á una rueda, cuyo radio es OH, y que tiene por eje el mismo O. Se supone que la manivela es de doble efecto, es decir, que habiendo obrado la fuerza motriz F de arriba abajo durante la media revolucion, obra en sentido de abajo arriba durante la otra media revolucion, conservando la misma intensidad que en la primera: caso que se verifica frecuentemente en las máquinas. Sea V_0 la velocidad que tenia el boton de la manivela al pasar por el punto A, y V la que tiene al llegar á M; representemos por ω el ángulo AOM y por c una constante que depende de varias circunstancias que no es posible dar á conocer en este tratado: está demostrado que la velocidad V se espresa por la relacion

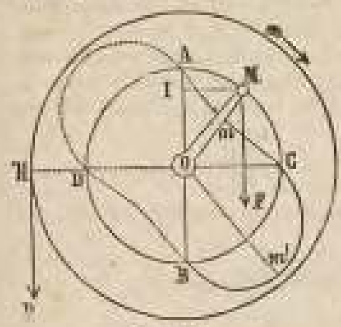


Fig. 150

$$V=\sqrt{V_0^2+c\left(1-\cos\omega-\frac{2\omega}{\pi}\right)}$$

Tomando V por radio vector y ω por ángulo polar, puede construirse la curva que representa esta ecuacion, y que espresa en funcion del ángulo ω descrito por la manivela la ley que sigue en sus variaciones la velocidad V, á partir de la direccion vertical OA. Se puede elegir la unidad de longitud de modo que V_0 esté representado por el mismo radio OA, y en este caso la curva toma la forma y posicion indicadas en AmCm'B..... en la figura. La parte que está señalada por puntos se refiere á la segunda media vuelta. Los radios vectores mínimo y máximo corresponden á las posiciones Om y Om' de la manivela, que forman con OA y OB ángulos de 39°,32',4.

Haciendo uso de un volante se puede disminuir la constante c, y entonces la velocidad V se aproxima cada vez mas á ser constante é igual á V_0.

Observacion. El uso de coordenadas polares ofrece grandes recursos en todas las cuestiones que se refieren á movimientos de rotacion.

CAPÍTULO XI.

EJEMPLOS DE DISCUSION DE CURVAS.

§ I.—Curvas referidas á coordenadas rectilíneas.

357. Preceptos generales.—Vamos á consagrar este capítulo al exámen de algunas curvas convenientemente elegidas para que los lectores se familiaricen con las teorías desenvueltas en los capítulos precedentes.

Hasta ahora solo hemos discutido parcialmente las curvas, escepto las de segundo grado, y aun esta discusion parcial solo ha tenido por objeto hacer una aplicacion inmediata de tal ó cual teoría; pero ahora vamos por el contrario á estudiar de una manera completa todas las diferentes propiedades que puede tener una curva.

Es imposible dar reglas fijas para la discusion de una curva; solo pueden establecerse algunos principios generales bastante vagos, que será preciso modificar en muchos casos, arreglándolos á la índole del que se quiera discutir; sin embargo, por regla general se procederá como sigue:

Se deducirá directamente de la ecuacion de la curva todas las propiedades que arroje la simple inspeccion de aquella, sin que sea necesario recurrir al cálculo, como por ejemplo la simetría con respecto á un eje ó un centro colocado en el orígen.

Cuando se pueda resolver la ecuacion con respecto á alguna de sus variables, por ejemplo la y, convendrá hacerlo, y se hallarán para y diversos valores: y', y'',..... que se irán discutiendo sucesiva y separadamente.

Otras veces convendrá más discutir simultáneamente todos los valores de y que correspondan á uno mismo de x.

De todos modos y en todos los casos se deberá estudiar si la curva es limitada en todos sentidos ó ilimitada en alguno: en este se averiguará cuántas ramas infinitas tiene, y esta determinacion deberá ir acompañada de la investigacion de sus asimtotas.

Por medio del coeficiente angular de la tangente se conocerá en qué sentido está la concavidad de la curva, cuántos son los puntos de inflexion, los múltiplos, etc.

358. Curva algebráica.—*Discutir la curva que está representada en la ecuacion*

$$y^4 - 2x(x-1)y^2 - (x^4 + 5x^3) = 0.$$

Eje de simetría. Esta curva tiene que ser simétrica con respecto al eje de las x porque su ecuacion no contiene mas que potencias pares de y; y pasa por el orígen pues que haciendo $x=0$ tambien y se reduce á cero.

Aspecto general de este lugar. Dando á x valores positivos queda negativo el término $-(x^4+5x^3)$; de modo que considerando que y^2 sea la incógnita de la ecuacion [1], esta ecuacion tendrá sus raices reales y de signo contrario; por consiguiente, desechando el valor negativo de y^2 resultan á la derecha del eje de las y dos ramas simétricas respecto al de las x, cuyas ramas se estienden hasta el infinito.

Si se supone que $x<0$, será negativo x^4+5x^3 por todos los valores de x comprendidos entre cero y -5, mientras que $x(x-1)$ será positivo; de manera que si y^2 es real habrá entre aquellos límites cuatro valores de y por cada uno de los de x. Pero resolviendo la ecuacion [1] con relacion á y^2 resulta

$$y^2=x(x-1)\pm x\sqrt{2(x+1)(x+\tfrac{1}{2})} \qquad [1].$$

Los dos valores de y^2 son *reales y positivos* cuando se dan á x valores comprendidos entre 0 y $-\frac{1}{2}$; *iguales* cuando se hace $x=-\frac{1}{2}$; *imaginarios* cuando los valores que se dan á x están comprendidos entre $-\frac{1}{2}$ y -1; nuevamente *iguales* haciendo $x=-1$, y finalmente *reales y positivos* por todos los de x comprendidos entre -1 y -5.

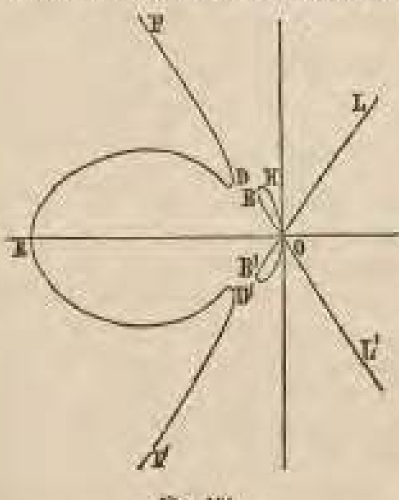


Fig. 151

En virtud de esta discusion podemos decir que arrancan del punto O (figura 151) dos arcos de la curva que estamos discutiendo; que vienen á unirse en el punto B que tiene por coordenadas $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, que forman una figura semejante á una hoja, y que la misma figura se repite debajo del eje de las x.

La curva no tiene punto alguno comprendido entre las rectas que tienen por ecuacion $x=-\frac{1}{2}$ y $x=-1$; pero vuelve á empezar en el punto D que tiene por coordenadas $x=-1$, $y=\sqrt{2}$; desde aquí arrancan dos arcos, uno que se estiende por encima del eje de las x y otro que viene á cortar á este eje en el punto E correspondiente á la abscisa $x=-5$.

Dando á x valores comprendidos entre -5 y $-\infty$, resultan reales y de signo contrario los dos de y^2. El valor de y que se reduce á cero por $x=-5$ se hace imaginario; el otro de y que por $x=-5$ es igual á $\sqrt{60}$ aumenta; por consiguiente, la rama DE termina en E, donde se une con la D'E simétrica con ella; al contrario, la rama DF atraviesa á la perpendicular levantada al eje de las x por el punto E, y se estiende por la izquierda hasta el infinito.

Ya que de esta discusion resulta de una manera clara el aspecto general de la curva, pasemos á examinar mas detenidamente su figura.

Tangente. Su coeficiente angular es

$$K=\frac{2y^2(2x-1)+4x^3+15x^2}{4y[y^2-x(x-1)]},$$

que se hace infinito cuando $y=0$ y $x=-5$, cuando $x=-\frac{1}{2}$ ó $y=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, y cuando $x=-1$ ó $y=\sqrt{2}$, de modo que en los puntos B, D y E la tangente es perpendicular al eje de las x.

Punto múltiplo. La forma del coeficiente K en el punto O es $\frac{0}{0}$; pero esta indeterminacion no es mas que aparente, y deja de presentarse cuando en vez de y se pone su valor sacado de la ecuacion (1), aunque es mejor buscar directamente el límite de $\frac{y}{x}$ por $x=0$. Ahora bien, dividiendo por x^2 la ecuacion (2) resulta

$$\frac{y^2}{x^2}=1-\frac{1}{x}\pm\sqrt{2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{2x}\right)};$$

y tomando el radical con signo $+$, y atribuyendo á x valores negativos que tiendan á cero, lo que equivale á considerar un punto colocado en el arco BHO, se hallará que

$$\lim \frac{y^2}{x^2} = +\infty; \quad \text{por consiguiente,} \quad \lim \frac{y}{x} = \infty;$$

de modo que los arcos BO y B'O son tangentes en el punto O al eje de las y.

Tomando el radical con el signo $+$ y haciendo variar á x desde $-\varepsilon$ hasta 0, ó tomándole con signo $-$ y dando á x valores desde $+\varepsilon$ hasta cero, resultará para el límite de $\frac{y^2}{x^2}$, $\infty - \infty$. Pero se puede escribir

$$y^2 = \frac{x^2(x-1)^2 - 2x^2(x+1)(x+\frac{1}{2})}{x(x-1) \mp x\sqrt{2(x+1)(x+\frac{1}{2})}},$$

de donde haciendo las reducciones queda

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{-x-5}{x-1 \mp \sqrt{2(x+1)(x+\frac{1}{2})}},$$

y tomando el radical con signo $-$, que equivale á considerar un punto colocado en el arco LOB', se hallará que

$$\lim \frac{y^2}{x^2} = \frac{5}{2}, \quad \text{de modo que el} \quad \lim \frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Por consiguiente, la rama LOB' corta al eje de las x bajo un ángulo que tiene por tangente $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Asimtotas. Para hallar las asimtotas de esta curva seguirémos el método general, llamando c al coeficiente angular de la asimtota y d á su ordenada en el origen, y dicha cantidad c vendrá dada por la ecuacion

$$c^4 - 2c^2 - 1 = 0,$$

por lo que será $$c^2 = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Desentendiéndonos del signo — porque da para c valores imaginarios, tendrémos

$$c=\pm\sqrt{1+\sqrt{2}};$$

en su consecuencia hallarémos $d=-\frac{2c^3-5}{4c(c^4-1)}$, que efectuando el cálculo manifiesta la existencia de dos asímtotas inclinadas próximamente, la una 67°30', y la otra 112°30' sobre el eje de las x, cortando ambas á este eje en un mismo punto distante del origen $-0,012.....$: estas asímtotas no están representadas en la figura.

Construccion por puntos. Como lo complicado de la ecuacion no permite investigar directamente los *puntos máximos*, *mínimos*, *de inflexion*, etc., vamos á deducir todas estas particularidades de una discusion puramente numérica.

Primeramente hallarémos que

haciendo	$x=1$,	resulta	$y=1,6$;
	$=2$,		$y=3,1$;
	$=3$,		$y=4,7$;
	$=4$,		$y=6,2$;

y como se puede decir sin gran error que los valores de y forman una progresion aritmética, concluirémos que la rama OL se diferencia muy poco de una recta: además, como sus ordenadas son menores que las correspondientes á la tangente tirada en O, no hay inconveniente en afirmar que presenta su concavidad hácia el eje de las x.

Despues hallarémos que

haciendo	$x=-0,1$,	resultan	$y_1=0,43$	e	$y_2=0,25$;
	$=-0,2$,		$=0,61$		$=0,32$;
	$=-0,3$,		$=0,74$		$=0,48$;
	$=-0,4$,		$=0,84$		$=0,45$;
	$=-0,5$,		$=0,86$		$=0,86$,

cuyo cuadro nos hace conocer que el arco OB se diferencia tambien muy poco de una recta. Las ordenadas del arco OHB van creciendo muy rápidamente, y llegan á su máximo valor entre $x=-0,4$ y $x=-0,5$.

Haciendo variar á x desde -1 á -5, tendrémos

cuando	$x=-1,$	$y_1=1,414,$	$y_2=1,414;$
	$=-1,1,$	$=1,630,$	$=0,960;$
	$=-1,2,$	$=1,809,$	$=1,416;$
	$=-1,3,$	$=1,973,$	$=1,445;$
	$=-1,4,$	$=2,132,$	$=1,473;$
	$=-1,5,$	$=2,291,$	$=1,500;$
	$=-1,6,$	$=2,449,$	$=1,523;$
	$=-1,7,$	$=2,606,$	$=1,545;$
	$=-1,8,$	$=2,763,$	$=1,563;$
	$=-1,9,$	$=2,917,$	$=1,884;$
	$=-2,$	$=3,076,$	$=1,592;$
	$=-3,$	$=4,635,$	$=1,884;$
	$=-4,$	$=6,191,$	$=1,293;$
	$=-5,$	$=7,745,$	$=\ 0;$

de modo que en esta parte del plano la ordenada y_1 de la rama DF va creciendo constantemente, siendo sus incrementos casi proporcionales á los de la abscisa; todo lo cual nos autoriza para decir que dicho arco se diferencia muy poco de una recta hasta llegar á la inmediacion del punto D.

La ordenada y_2 del arco DE decrece al principio muy rápidamente á partir desde $x=-1,1$; llega á su minimum entre $x=-1,1$ y $x=-1,2$, y crece despues muy lentamente, llegando á su valor máximo entre $x=-2$ y $x=-3$.

350. **Curva trascendente.**—Vamos á discutir la curva que está representada en la ecuacion

$$y=\frac{2^x-2^{-x}}{2}.$$

Centro. Como la ecuacion permanece la misma aun cuando se cambie x en $-x$ é y en $-y$, el orígen es centro de la curva, y al mismo tiempo está sobre ella, pues que haciendo $x=0$ resulta $y=0$.

Aspecto general. Como á todo valor de x corresponde otro de y, tanto mayor cuanto mayor es el absoluto de x, la curva se compone de dos ramas infinitas colocadas en el ángulo YOX (fig. 152) y en su opuesto por el vértice, y basta construir una de ellas.

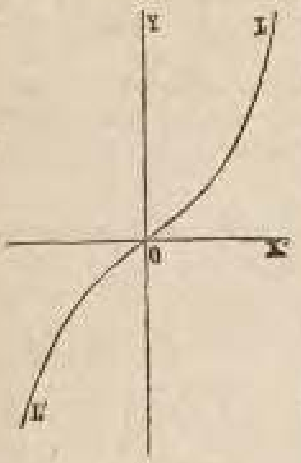


Fig. 152.

SENTIDO DE LA CONCAVIDAD. Designando y por $\varphi(x)$ resulta

$$\varphi'(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}\log 2,$$

$$\varphi''(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2}(\log 2)^2,$$

cuyos logaritmos han de tomarse en el sistema neperiano.

Como $\varphi''(x)$ es positivo, escepto en el caso de hacer $x=0$, la rama OL vuelve su concavidad hácia las y positivas, y lo contrario sucede en la rama opuesta.

ASÍMTOTAS. Siendo así que $\varphi'(x)$ varía de un modo contínuo desde 0 hasta ∞ cuando x crece entre los mismos límites no puede la curva tener asímtota alguna.

PUNTOS DE INFLEXION. Anulándose $\varphi''(x)$ cuando se hace $x=0$, y cambiando de signo cuando se cambia el de x, debe deducirse que el orígen es un punto de inflexion, lo cual es tambien una consecuencia de hallarse sobre la curva el orígen de las coordenadas y ser este un centro.

TANGENTE. Su coeficiente angular es

$$\varphi'(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}\log 2,$$

que en el orígen es igual al logaritmo neperiano de 2, y que va creciendo muy rápidamente al mismo tiempo que x.

CONSTRUCCION POR PUNTOS. Hallarémos que á los valores de x

0, 0,5 1, 2, 2,5, 3, 4,

corresponden los de y

$$0,\ 0{,}35,\ 0{,}75,\ 1{,}21,\ 1{,}87,\ 3{,}93,\ 7{,}97;$$

de modo que las ordenadas van creciendo rápidamente; y como el término 2^{-x} tiende hácia 0, podemos decir que la curva propuesta y la representada por la ecuacion $y=\frac{1}{2}2^x$ son respectivamente asíntotas.

Ejercicios. Los lectores pueden ejercitarse con los siguientes ejemplos:

$$y^3=\frac{1}{x+1},\ y^2=\frac{1}{x^2+1},\ (y^2-x^2)\left[\left(\frac{y}{2}-1\right)^2-x^2\right]+\mu(y+a)=0,$$

$$y=\frac{1}{1-x^2},\ y^2=\frac{x^3}{1-x^2},\ (y^2+x^2)\left[\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+x^2\right]+\mu(y+a)=0,$$

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+1},\ y^2=\frac{x^2-1}{x},\ y^4-16y^2+25x^2-x^4=0,$$

$$y^2=\frac{x^2-x}{1+x},\ y=\pm\sqrt{x}\pm\sqrt{1-x},\ y=\frac{e^{\frac{x}{\lambda}}-e^{-\frac{x}{\lambda}}}{2},$$

$$xy^2-2xy+4y+x^3=0, \qquad y=e^{\operatorname{sen}\frac{x}{\lambda}},$$

$$a\operatorname{sen}^2\pi\frac{x}{\lambda}\operatorname{sen}\pi\frac{y}{\lambda}+a'\operatorname{sen}\pi\frac{x}{\lambda}\operatorname{sen}2\pi\frac{y}{\lambda}=0.$$

§ II. — Curvas referidas á coordenadas polares.

360. Sea la ecuacion $\rho=\dfrac{1}{\cos^2\omega}$.

Ejes de simetría. Aplicando á esta ecuacion el método del número 327 hallarémos que el eje polar y la perpendicular tirada á este por el polo son dos ejes de simetría de la curva que representa, y como ρ vuelve á tomar los mismos valores cuando los que se dan á ω esceden de 2π, resulta que esta curva se compone de cuatro ramas idénticas colocadas en los cuatro ángulos que forman entre sí aquellos dos ejes de simetría; de modo que no hay necesidad de construir mas que una sola de estas cuatro ramas, haciendo para esto variar á ω desde 0 á $\frac{\pi}{2}$.

Aspecto de la curva. Cuando $\omega=0$ el valor de ρ es 1; luego la curva pasa por el punto A (fig. 153), situado á la distancia 1 del punto O. A proporcion que ω crece disminuye su coseno, y por consiguiente aumenta ρ. Cuando $\omega=\frac{\pi}{2}$, $\rho=\infty$.

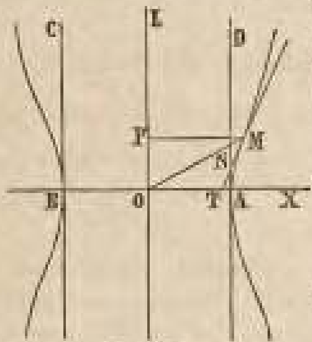


Fig. 153.

Supongamos que M es un punto de la curva, y tendrémos

$$\mathrm{ON}=\frac{1}{\cos\omega},$$

por lo que

$$\mathrm{OM}, \text{ ó sea } \rho=\mathrm{ON}.\frac{1}{\cos\omega};$$

de modo que ρ será mayor que ON; luego todos los puntos de la curva pertenecientes á la rama comprendida en el ángulo LOX están al otro lado de la perpendicular AD al eje polar.

La curva pasa por los puntos

$$\omega=\frac{\pi}{6},\ \rho=\frac{4}{3};\quad \omega=\frac{\pi}{4},\ \rho=2;\quad \omega=\frac{\pi}{3},\ \rho=4.$$

Asímtotas. Supuesto que ρ se hace infinito cuando ω toma el valor $\frac{\pi}{2}$, buscarémos si la curva tiene asímtotas perpendiculares al eje polar.

Tenemos que

$$\mathrm{MP}=\rho\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)}{\cos^2\omega};$$

y como haciendo $\omega=\frac{\pi}{2}$, resulta $\mathrm{MP}=\infty$, esta curva no tiene asímtotas perpendiculares al eje polar, y por consiguiente no tiene ninguna asímtota.

TANGENTE. Tenemos que

$$\operatorname{tang} V=\frac{1}{2\operatorname{tang}\omega},$$

en que V es el ángulo que forma con el radio vector la tangente á la curva. Haciendo en esta ecuacion $\omega=0$ resulta $\operatorname{tang} V=\infty$; luego la tangente levantada en el punto A es perpendicular al eje polar.

Dando á ω valores crecientes disminuyen los de $\operatorname{tang} V$, y cuando ω llega á $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tang} V$ se reduce á cero; de modo que la tangente tiende á quedarse de nuevo perpendicular al eje polar, y por consiguiente, la rama de curva que vamos estudiando presenta un punto de inflexion.

PUNTO DE INFLEXION. Sea M el que acabamos de reconocer que existe, y para determinar sus coordenadas observarémos que el ángulo α formado por la tangente á la curva y el eje polar llega á su valor mínimo cuando el punto M es el de contacto; por consiguiente, buscarémos cuál es el valor de ω que hace un mínimo el de α. Para esto sabemos que

$$\alpha=\omega+V,\quad \text{por lo que será}\quad \operatorname{tang}\alpha=\frac{\operatorname{tang}\omega+\operatorname{tang}V}{1-\operatorname{tang}\omega\operatorname{tang}V},$$

y por ser
$$\operatorname{tang} V=\frac{1}{2\operatorname{tang}\omega}$$

podemos escribir $\operatorname{tang}\alpha=2\operatorname{tang}\omega+\frac{1}{\operatorname{tang}\omega}$;
y como en las dos partes que componen $\operatorname{tang}\alpha$ hay un producto constante, su suma será un mínimo, en virtud de un teorema conocido, cuando se tenga

$$2\operatorname{tang}\omega=\frac{1}{\operatorname{tang}\omega},\quad \text{de donde sale}\quad \operatorname{tang}\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De modo que hallarémos $\omega=26°33'30''$ y $\rho=\frac{2}{3}$.

EJERCICIOS. Aconsejamos á los lectores que se ejerciten con los ejemplos dados en el párrafo 336 y con los siguientes:

$$\rho=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos 6\omega},\quad \rho=\frac{1}{1-\frac{2}{3}\cos\frac{2}{3}\omega},\quad \rho=\frac{\omega}{1-\operatorname{tang}\omega}.$$

hay necesidad de construir mas que una sola de estas cuatro ramas, haciendo para esto variar á ω desde 0 á $\frac{\pi}{2}$.

Aspecto de la curva. Cuando $\omega=0$ el valor de ρ es 1; luego la curva pasa por el punto A (fig. 153), situado á la distancia 1 del punto O. A proporcion que ω crece disminuye su coseno, y por consiguiente aumenta ρ. Cuando $\omega=\frac{\pi}{2}$, $\rho=\infty$.

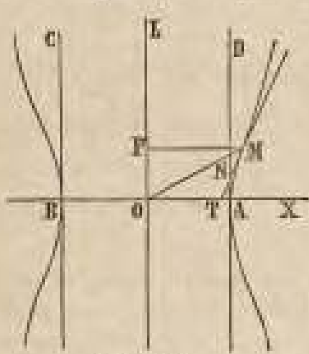


Fig. 153.

Supongamos que M es un punto de la curva, y tendrémos

$$ON=\frac{1}{\cos\omega},$$

por lo que

$$OM, \text{ ó sea } \rho=ON.\frac{1}{\cos\omega};$$

de modo que ρ será mayor que ON; luego todos los puntos de la curva pertenecientes á la rama comprendida en el ángulo LOX están al otro lado de la perpendicular AD al eje polar.

La curva pasa por los puntos

$$\omega=\frac{\pi}{6},\ \rho=\frac{4}{3};\quad \omega=\frac{\pi}{4},\ \rho=2;\quad \omega=\frac{\pi}{3},\ \rho=4.$$

Asímtotas. Supuesto que ρ se hace infinito cuando ω toma el valor $\frac{\pi}{2}$, buscarémos si la curva tiene asímtotas perpendiculares al eje polar.

Tenemos que

$$MP=\rho\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)}{\cos^2\omega};$$

y como haciendo $\omega=\frac{\pi}{2}$, resulta $MP=\infty$, esta curva no tiene asímtotas perpendiculares al eje polar, y por consiguiente no tiene ninguna asímtota.

TANGENTE. Tenemos que

$$\operatorname{tang} V = \frac{1}{2 \operatorname{tang} \omega},$$

en que V es el ángulo que forma con el radio vector la tangente á la curva. Haciendo en esta ecuacion $\omega = 0$ resulta $\operatorname{tang} V = \infty$; luego la tangente levantada en el punto A es perpendicular al eje polar.

Dando á ω valores crecientes disminuyen los de $\operatorname{tang} V$, y cuando ω llega á $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tang} V$ se reduce á cero; de modo que la tangente tiende á quedarse de nuevo perpendicular al eje polar, y por consiguiente, la rama de curva que vamos estudiando presenta un punto de inflexion.

PUNTO DE INFLEXION. Sea M el que acabamos de reconocer que existe, y para determinar sus coordenadas observarémos que el ángulo α formado por la tangente á la curva y el eje polar llega á su valor mínimo cuando el punto M es el de contacto; por consiguiente, buscarémos cuál es el valor de ω que hace un mínimo el de α. Para esto sabemos que

$$\alpha = \omega + V, \quad \text{por lo que será} \quad \operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang} \omega + \operatorname{tang} V}{1 - \operatorname{tang} \omega \operatorname{tang} V},$$

y por ser

$$\operatorname{tang} V = \frac{1}{2 \operatorname{tang} \omega}$$

podemos escribir $\operatorname{tang} \alpha = 2 \operatorname{tang} \omega + \dfrac{1}{\operatorname{tang} \omega}$;

y como en las dos partes que componen $\operatorname{tang} \alpha$ hay un producto constante, su suma será un mínimo, en virtud de un teorema conocido, cuando se tenga

$$2 \operatorname{tang} \omega = \frac{1}{\operatorname{tang} \omega}, \quad \text{de donde sale} \quad \operatorname{tang} \omega = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De modo que hallarémos $\omega = 26°33'30''$ y $\rho = 1$.

EJERCICIOS. Aconsejamos á los lectores que se ejerciten con los ejemplos dados en el párrafo 336 y con los siguientes:

$$\rho = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cos 6\omega}, \quad \rho = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}\omega}, \quad \rho = \frac{\omega}{1 - \operatorname{tang} \omega}.$$

CAPÍTULO XII.

NÚMERO DE CONDICIONES NECESARIAS PARA DETERMINAR UNA CURVA DE SEGUNDO GRADO.—INTERSECCION DE CURVAS DE SEGUNDO GRADO, Y EN GENERAL DE LAS CURVAS PLANAS.—CONSTRUCCION DE LAS RAÍCES REALES DE LAS ECUACIONES.

§ I.—Número de condiciones necesarias para determinar una curva de segundo grado.

301. *Una curva de segundo grado queda por regla general completamente determinada cuando está sujeta á satisfacer á ciertas condiciones geométricas, que den lugar á cinco relaciones distintas entre cinco de los coeficientes de la ecuacion general de la curva.*

Con efecto, de los seis coeficientes que contiene la ecuacion

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0 \qquad [1],$$

solamente cinco son arbitrarios, porque puede dividirse aquell sin que altere por uno cualquiera de los seis, con tal que se le considere diferente de cero; y como cinco relaciones entre otras tantas cantidades bastan por lo general para conocer estas, para determinar la ecuacion [1], y por lo tanto la línea que represente, bastarán por lo comun cinco relaciones distintas entre dichos cinco coeficientes indeterminados. Queda pues demostrado lo que enunciamos al principio.

Observaciones. I. Generalizando esto podemos decir que, conteniendo toda ecuacion del grado m un número $\frac{m(m+3)}{2}$ de coeficientes indeterminados, quedará completamente determinada una curva del órden m cuando sean conocidas $\frac{m(m+3)}{2}$ condiciones entre los coeficientes de su ecuacion general.

II. Se considera por lo comun que toda relacion entre los coeficientes arbitrarios de la ecuacion [1] equivale á *una condicion* geométrica impuesta á la curva; y bajo este aspecto se dice que *toda curva de segundo grado está determinada por cinco condiciones.*

III. Cuando las cinco relaciones entre los coeficientes arbitrarios de la ecuacion [1] admitan una sola solucion quedará completamente determinada esta ecuacion, y si representa una curva no habrá mas que una de segundo grado que satisfaga á las condiciones geométricas correspondientes á las cinco relaciones algebráicas dichas; cuando admitan mas de una solucion habrá por regla general varias curvas que puedan sujetarse á las mismas condiciones geométricas; y por último si las relaciones entre los coeficientes son incompatibles no habrá curva alguna que las satisfaga.

IV. Como en la parábola se verifica siempre que

$$B^2-4AC=0\,,\quad \text{y se deduce de aqui}\quad B=\pm2\sqrt{AC}\,,$$

bastan por lo general para determinar una parábola las otras cuatro relaciones; además, y en razon al doble signo de B, habrá por lo comun dos parábolas que satisfagan á cuatro condiciones geométricas dadas.

Cuando se trate de una circunferencia de círculo será

$$C=A \quad \text{y} \quad B=2A\cos\theta\,,$$

y bastarán, por consiguiente, otras tres relaciones para determinar esta curva; es decir, que tres condiciones bastan para determinar una circunferencia de círculo.

362. Siendo muy importante saber si una curva de segundo grado queda ó no completamente determinada por las condiciones á que se la quiere sujetar, vamos á investigar el número de relaciones diferentes entre los coeficientes arbitrarios de la ecuacion general que espresen las principales condiciones geométricas á que se puede sujetar una curva de esta clase y á ver cómo se obtienen estas relaciones.

363. Sujetar una curva á que pase por un punto dado equivale á establecer una relacion que esprese que las coordenadas de este punto satisfacen á la ecuacion de la curva.

Sujetarla á que tenga por centro un punto conocido equivale á dos relaciones, que se hallarán espresando que las coordenadas de este punto satisfacen á las ecuaciones que determinan las del centro de la curva.

Fijar un punto por focus es lo mismo que establecer dos relaciones; pues si (α, β) son las coordenadas de aquel, podrá ponerse la ecuacion de la curva bajo la forma

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2-(ey+fx+g)^2=0 \qquad [2],$$

y solo quedarán arbitrarios los tres coeficientes e, f, g.

Señalar un punto para vértice de la curva equivale á dos relaciones, pues para espresar que un punto sirve de vértice es preciso escribir: 1.° que pertenece á la curva, y 2.° que la tangente en este punto es perpendicular al correspondiente diámetro.

Por regla general, sujetar una curva á que tenga por alguno de sus puntos notables uno dado equivale á dos relaciones, que se hallarán espresando las coordenadas del punto notable que se trate en funcion de los coeficientes de la ecuacion de la curva é igualándolas respectivamente á las del punto dado.

364. Sujetar una curva á que sea tangente á una recta dada $y=mx+n$ es lo mismo que establecer una condicion, que se hallará eliminando y entre la ecuacion de la recta y la de la curva, y espresando que han de ser iguales los dos valores que resulten para x en la ecuacion final.

Hacer que una curva tenga por asímtota una recta dada equivale á dos relaciones, que se hallarán identificando la ecuacion de la recta dada con la general de las asímtotas. Tambien pudieran establecerse eliminando y entre las ecuaciones de la recta y la curva, y espresando que los valores resultantes para x en la ecuacion final han de ser infinitos.

Igualmente veriamos que, sujetar una curva á que tenga una recta dada, ya sea por directriz ó ya por eje, es lo mismo que establecer dos relaciones; y que, en general, la condicion de que una recta dada sea alguna de las notables relacionadas con la curva de dos relaciones, que se hallan identificando la ecuacion de la recta dada con la general de la notable que se considere.

365. Es posible algunas veces escribir la ecuacion de una curva de tal modo que deje conocer fácilmente que esta satisface á una ó varias condiciones geométricas; así es que poniendo la ecuacion general de segundo grado bajo la forma [2], se espresa que todas las curvas representadas por esta tienen por focus el punto (α, β) y por directriz la recta $ey+fx+g=0$. Propondrémos otros ejemplos.

366. Para espresar que el punto (α, β) es un centro se escribirá la ecuacion de la curva como sigue:

$$A(y-\beta)^2+B(x-\alpha)(y-\beta)+C(x-\alpha)^2+F=0.$$

367. Quedará espresado que la recta

$$y=mx+n \qquad [3]$$

es tangente á una curva, poniendo la ecuacion de esta última bajo la forma

$$\lambda(y-mx-n)+(ey+fx+g)^2=0 \qquad [4];$$

pues el sistema de las ecuaciones [3] y [4] se puede reemplazar evidentemente por otro compuesto de la [3] y de

$$ey+fx+g=0 \qquad [5],$$

en que, siendo ambas de primer grado, no hay mas que una solucion comun; y como esta es tambien la única de [3] y [4], se ve claramente que la recta representada por [3] solo tiene un punto comun con la curva [4], y es por consiguiente tangente á esta.

368. Para espresar que una recta dada es asimtota de una curva, si es arbitraria la eleccion de los ejes, se tomará por el de las x la recta dada, y se podrá escribir la ecuacion de la curva bajo la forma

$$xy+ay+bx+c=0,$$

que da $y=0$ cuando se hace $x=\infty$, y que por consiguiente representa todas las hipérbolas que tienen por asimtota el eje de las x.

369. Si $f=0$ y $\varphi=0$ son las ecuaciones de dos curvas de segundo grado, la

$$f+\lambda\varphi=0 \qquad [6],$$

en que λ es una indeterminada cualquiera positiva ó negativa, representa todas las líneas de segundo grado que pasen por los puntos de interseccion de aquellas.

370. De la ecuacion [6] se deduce inmediatamente la de todas las curvas de segundo órden que pasen por cuatro puntos dados;

porque si $P=0$ y $Q=0$ son las ecuaciones de dos rectas que pasen por los cuatro puntos, y $P'=0$, $Q'=0$ las de otras dos que tambien pasen por ellos, se puede considerar que $PQ=0$ y $P'Q'=0$ representen dos líneas de segundo grado que pasen por dichos puntos, y de aquí resulta que

$$PQ+\lambda P'Q'=0 \qquad [7]$$

es la ecuacion de todas las líneas de segundo grado que pasen por los cuatro puntos de que se trate.

371. La ecuacion general de todas las curvas de segundo grado que pasen por los puntos en que la del mismo $A=0$ corte á una recta $P=0$ es

$$A+(\alpha x+\beta y+\gamma)P=0 \qquad [8],$$

porque es de segundo grado, y todas las curvas que representa pasan evidentemente por los puntos de interseccion de la curva y recta propuestas, lo cual las sujeta á dos condiciones; y como se puede hacer que cumpla con cinco toda curva de segundo grado, quedan otras tres para determinar los parámetros α, β, γ.

372. Del mismo modo veríamos que la ecuacion general de todas las curvas de segundo grado que pasen por tres puntos dados es

$$\lambda AB+\mu AC+\nu BC=0,$$

en la que λ, μ y ν son tres parámetros cualesquiera, y $A=0$, $B=0$, $C=0$, las ecuaciones de los lados del triángulo que determinan aquellos tres puntos. Aunque sería fácil presentar muchos ejemplos preferimos aclarar cuanto precede por medio de los dos problemas siguientes:

373. PROBLEMA. *Hallar la ecuacion de una curva de segundo grado que pase por cinco puntos dados.*

Como tomando la palabra *curva* en su verdadera significacion no es posible que una recta corte á una de segundo grado mas que en dos puntos, es preciso, para que sea posible el problema, que nunca estén en línea recta tres de los cinco puntos dados. Bajo este supuesto habrá entre las diversas rectas que los cinco puntos determinan dos por lo menos que no serán paralelas, y cuyo punto de interseccion no pertenecerá á la curva. Tomando estas dos rectas por ejes coordenados, como no podrá la curva pasar por el orígen, se podrá escribir su ecuacion bajo la forma

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+1=0 \qquad (9).$$

Sean $(0, x_1)$ y $(0, x_2)$ los dos puntos situados en el eje de las x, $(0, y_1)$ y $(0, y_2)$ los dos colocados en el de las y, y (x_3, y_3) el restante de los cinco puntos dados: para hacer ver que la curva pasa por todos ellos será preciso espresar que sus coordenadas satisfacen á la ecuacion (9), y así tendrémos las cinco siguientes relaciones entre los coeficientes desconocidos a, b, c.....

$$ay_1^2+dy_1+1=0, \qquad ay_2^2+dy_2+1=0,$$

$$cx_1^2+ex_1+1=0, \qquad cx_2^2+ex_2+1=0,$$

$$ay_3^2+bx_3y_3+cx_3^2+dy_3+ex_3+1=0.$$

De estas sacarémos

$$a=\frac{1}{y_1y_2},\quad c=\frac{1}{x_1x_2},\quad d=-\frac{y_1+y_2}{y_1y_2},\quad e=-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2},$$

$$b=-\frac{1}{x_3y_3}\left[\frac{y_3(y_3-y_2-y_1)}{y_2y_1}+\frac{x_3(x_3-x_2-x_1)}{x_2x_1}+1\right];$$

y como el valor de ninguno de estos coeficientes es indeterminado ni infinito, porque segun las hipótesis ninguna de las cantidades x_1, x_2, etc., es cero, resulta que *por cinco puntos dados, con tal que cada tres no estén en línea recta se puede hacer pasar una, y nada mas que una curva de segundo grado.*

OBSERVACIONES. I. Si tres de los puntos dados estuviesen en línea recta serian $x_3=0$ ó $y_3=0$, y en su consecuencia $b=\infty$, por lo que la ecuacion (9) quedaria reducida á $xy=0$, representando los dos ejes coordenados; y con efecto los cinco puntos dados determinan en este caso dos rectas que son los ejes coordenados.

Si estuviesen en línea recta mas de tres puntos de los cinco dados serian indeterminados algunos de los coeficientes, y lo quedaria por consiguiente la ecuacion (9); y en efecto habria entonces una infinidad de rectas que pasasen por los cinco puntos dados.

II. Puede resolverse con mas sencillez el anterior problema partiendo de la ecuacion (7); porque la ecuacion general de las curvas de segundo grado que pasan por los cuatro primeros puntos es

$$\left(\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}-1\right)\left(\frac{x}{x_2}+\frac{y}{y_2}-1\right)+\lambda xy=0,$$

y bastará para hallar el valor de λ con espresar que esta ecuacion queda satisfecha por las coordenadas (x_5, y_5) del quinto punto.

371. Problema. I. *Hallar una curva de segundo grado que pase por tres puntos conocidos* M', M'', M''' *y que tenga por focus un punto* F *dado tambien.*

Tomando por origen el punto F y representando por

$$x', y'; \quad x'', y''; \quad x''', y'''$$

las coordenadas respectivas de los

$$M', \quad M'', \quad M''',$$

la ecuacion de la curva será de la forma

$$(ex+fy+g)^2=x^2+y^2 \qquad (10);$$

y para determinar los coeficientes desconocidos habrá que resolver las tres ecuaciones

$$\begin{aligned} ex'+fy'+g&=\pm\sqrt{x'^2+y'^2}=\pm\delta, \\ ex''+fy''+g&=\pm\sqrt{x''^2+y''^2}=\pm\delta' \qquad (11), \\ ex'''+fy'''+g&=\pm\sqrt{x'''^2+y'''^2}=\pm\delta'', \end{aligned}$$

que sirven para espresar que la curva pasa por los tres puntos dados.

Como pueden combinarse de ocho maneras diferentes los signos de los segundos miembros de estas ecuaciones, parece que puede resolverse la cuestion de ocho maneras distintas, pero fijándose un poco se reconoce que no hay mas que cuatro soluciones diferentes; porque si despues de haber tomado con unos signos los segundos miembros de las ecuaciones (11) se los toma con los contrarios, se tendrá otro sistema que evidentemente quedará satisfecho por los mismos valores que satisfaciesen al primero, pero con los signos cambiados; y como la ecuacion (10) no se altera cuando se cambian en ella los signos de e, f y g, resulta que las soluciones de los dos sistemas son unas mismas. Por lo tanto, solo debemos examinar los cuatro siguientes casos:

1.° Cuando se toman las tres cantidades δ, δ' y δ'' con el signo $+$, las sustituciones de las coordenadas de los puntos M', M'', M''' en el primer miembro de la ecuacion

$$\alpha y+\beta x+\gamma=0$$

que representa la directriz, darán resultados del mismo signo, lo cual prueba que los tres puntos se hallan al mismo lado de la directriz; y entonces, si $\gamma>0$, los tres puntos conocidos y el focus quedan á un mismo lado de la directriz, y la curva puede ser una elipse, una hipérbola ó una parábola; si $\gamma<0$ el focus y los tres puntos se hallan á diferentes lados de la directriz, y no puede haber mas solucion que una hipérbola.

2.° Tomando δ' y δ'' con signo positivo, y δ''' con el negativo;

3.° δ' y δ''' positivos, y δ'' negativo,

4.° δ' positivo, y negativos δ'' y δ''',

se verá que en cada uno de estos tres casos quedan dos puntos á un mismo lado de la directriz y el otro á diferente, lo que no puede ocurrir mas que en la hipérbola.

Por consiguiente este problema admite en general cuatro soluciones, de las cuales tres por lo menos son hipérbolas.

Observacion I. Este problema tiene gran importancia en astronomía, donde sirve para determinar la trayectoria de un planeta cuando se conocen tres posiciones del astro, y en este caso no admite mas que una solucion, porque es sabido que todos los planetas describen órbitas elípticas que tienen al sol en uno de sus focus. En esta aplicacion sirven de datos á los astrónomos los tres radios vectores representados ya por δ', δ'', δ''' y los ángulos que estos forman con una recta fija tirada por el focus, y ordinariamente hacen uso de las coordenadas polares. Como la ecuacion de la elipse en esta clase de coordenadas es (**336**)

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos(\omega-\alpha)},$$

en que α es el ángulo que forma el eje polar con el focal de la curva, no habrá mas que determinar las incógnitas p, e, α por medio de los tres pares de valores de ρ y ω que deben satisfacer á esta ecuacion, lo cual no ofrece dificultad.

Observacion II. Puede resolverse geométricamente este problema por un método que no harémos mas que indicar, y que se funda en el siguiente

Teorema. *Si dos puntos* M *y* M' *están sobre una misma elipse, parábola ó en una misma rama de hipérbola, y* F *es el focus de la curva, el punto en que la recta* MM' *queda dividida en dos segmentos sustractivos que guarden entre sí la misma razon que* MF *con* M'F *pertenece á la directriz correspondiente al focus* F. *Cuando los dos puntos* M *y* M' *están colocados en diferente rama de una misma hipérbola, el punto que divida la recta* MM' *en dos segmentos aditivos que guarden entre sí la misma razon que* MF *con* M'F *está sobre la directriz correspondiente al focus* F.

Por medio de este teorema es fácil hallar dos puntos de la directriz, y por consiguiente determinar esta; bajando despues sobre ella una perpendicular FP desde el punto F se tendrá la direccion del eje focal, y dividiendo FP en dos segmentos aditivos ó sustractivos que guarden entre sí la razon que haya entre las distancias de M al focus y á la directriz resultarán los vértices; y teniendo ya un eje y los focus es fácil hallar el segundo eje y construir la curva.

375. Cuando las condiciones geométricas á que debe sujetarse una curva no son mas que cuatro, hay una infinidad que cumplen con ellas, y en este caso puede buscarse el lugar geométrico de cualquiera de los puntos notables de todas estas curvas ó el de alguno de sus puntos conveniente y suficientemente definido. Por ejemplo, sujetando una parábola á que pase por un punto dado y á que tenga por directriz una recta dada habrá una infinidad de curvas de este género que pasen por aquel punto y tengan aquella directriz, porque las condiciones impuestas equivalen únicamente á tres entre los coeficientes de la ecuacion, y en este caso puede pedirse el lugar geométrico de los vértices, focus, etc., de todas estas parábolas.

Para resolver un problema de esta especie se principia por introducir en la ecuacion de la curva las condiciones dadas, lo cual hace que todos los coeficientes de la ecuacion, menos uno, queden determinados; y como el que queda arbitrario entra en las ecuaciones que determinan las coordenadas del punto cuyo lugar geométrico se busca, eliminándole entre estas últimas ecuaciones se tendrá la de dicho lugar. Esto es lo que vamos á hacer en los dos ejemplos siguientes:

376. Problema. *Hallar el lugar geométrico de los vértices de todas las hipérbolas que tengan un focus y una asimtota comunes.*

Tomarémos la asimtota por eje de las y, por el de las x la perpendicular á esta tirada por el focus, y buscarémos la ecuacion general de todas las hipérbolas que satisfagan á las condiciones dadas.

Si $x=\alpha$ é $y=0$ son las coordenadas del focus dado todas las curvas de segundo grado que tengan por focus este punto se hallarán representadas por la ecuacion

$$y^2+(x-\alpha)^2-(my+nx+p)^2=0 \qquad (1);$$

y como el eje de las y ha de ser una asimtota, si en esta ecuacion se hace $x=0$, la resultante en y deberá tener dos raices infinitas, por lo que tendrémos las dos relaciones

$$1-m^2=0 \quad \text{y} \quad -2pm=0,$$

de las que se deduce $m=\pm 1$ y $p=0$,

y en cuya virtud la ecuacion (1) queda reducida á

$$y^2+(x-\alpha)^2-(\pm y+nx)^2=0 \qquad [2].$$

Haciendo variar á n representará esta ecuacion todas las hipérbolas que tengan comunes el focus $(0, \alpha)$ y la asímtota que ha servido de eje de las y, y llamando x', y' á las coordenadas del vértice de una de ellas, como este punto ha de pertenecer á la curva tendrémos la relacion

$$y'^2+(x'-\alpha)^2-(\pm y'+nx')^2=0 \qquad [3].$$

Por otra parte, si espresamos que la recta que pasa por este vértice y por el focus es perpendicular á las directrices que tienen por ecuaciones $y=\pm nx$, podrémos establecer que

$$\frac{y'}{x'-\alpha}=\frac{1}{\pm n}, \quad \text{y de aquí sacarémos} \quad n=\frac{\pm(x'-\alpha)}{y'} \quad [4].$$

Por consiguiente, eliminando n entre las ecuaciones [3] y [4] encontrarémos para ecuacion del lugar, despues de suprimir los acentos,

$$y^2+(x-\alpha)^2-\left(\pm y\pm\frac{(x-\alpha)x}{y}\right)^2=0.$$

Resultan dos ecuaciones para este lugar geométrico, lo cual consiste en que cada hipérbola tiene dos vértices, y que no hay nada en el cálculo que indique que se trata del lugar descrito por uno y no por el que describe el otro. Considerando la ecuacion que corresponde á $y=+nx$ la podrémos escribir

$$x^2(x-\alpha)^2+y^2(x^2-\alpha^2)=0,$$

bajo cuya forma hace ver que equivale á las dos siguientes:

$$(x+\alpha)y^2+(x-\alpha)x^2=0 \quad \text{y} \quad x-\alpha=0;$$

y como la última representa una recta extraña al lugar buscado, la ecuacion de este es

$$(x+\alpha)y^2+(x-\alpha)x^2=0, \quad \text{de la que resulta} \quad y=\pm x\sqrt{\frac{\alpha-x}{\alpha+x}}.$$

Esta manifiesta que el lugar pasa por el origen y por el foco; que está limitado en el sentido de las x positivas por la paralela al eje de las y representada por $x=\alpha$, y que se estiende indefinidamente por el lado de las x negativas; ademas tiene por tangentes en el origen las bisectrices de los ángulos que forman los ejes, por cuanto $\lim \frac{y}{x} = \pm 1$; finalmente, la paralela al eje de las x que tiene por ecuacion $x = -\alpha$ es una asíntota.

OBSERVACIONES. I. El lugar que acabamos de hallar admite una definicion geométrica análoga á la que dimos de la cisóide. Refiriéndonos á la figura 15, pág. 19, tomando $\mathrm{IM}=\mathrm{IB}$ y haciendo $\mathrm{OA}=\alpha$, el lugar geométrico de los puntos M será el que hemos hallado.

II. Para hallar las ecuaciones de los lugares geométricos descritos por los centros de todas las hipérbolas sujetas á las condiciones dadas en el enunciado partiríamos de la ecuacion (2).

377. PROBLEMA II. *Hallar el lugar geométrico de los focos de todas las parábolas que tengan la misma directriz y un punto comun.*

Tomarémos por ejes la directriz y una perpendicular á esta tirada por el punto dado, y supondrémos que $(a, 0)$ es este punto.

La ecuacion general de las parábolas (**314**) es

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(ex+fy+g)^2=0 \qquad (1),$$

con la condicion

$$e^2+f^2=1 \qquad (2).$$

Por ser la directriz eje de las y es preciso que su ecuacion (**208**, III)

$$ex+fy+g=0$$

quede verificada haciendo $x=0$, cualquiera que sea el valor de y, y esto exige que se tenga $f=0$ y $g=0$; por consiguiente, la ecuacion (2) se reduce á $e^2=1$, y la (1) se convierte en

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-x^2=0 \qquad (3).$$

Esta conviene á todas las parábolas que tengan la misma directriz; y reemplazando en ella x é y por las coordenadas del punto dado, tendrémos

$$(a-\alpha)^2+\beta^2=a^2,$$

que es una relacion constante entre las coordenadas α y β de los focos, que en su consecuencia representa el lugar buscado y que hace ver que es una circunferencia de círculo que tiene a por radio y cuyo centro se halla en el punto dado.

Observacion. Si en vez de dar la directriz y un punto fuesen los datos la directriz y una tangente podríamos partir de la ecuacion (3) para hallar el lugar de los focus.

Los lectores podrán ejercitarse en la resolucion de los siguientes

Problemas. *Determinar una curva de segundo grado conociendo: 1.° un focus y tres tangentes; 2.° el centro y tres puntos.*

Construir una elipse conociendo: 1.° el focus, el vértice y un punto; 2.° un vértice, una tangente y una directriz; 3.° un focus, un vértice y una tangente.

Construir una parábola conociendo: 1.° la directriz y dos puntos; 2.° el parámetro, dos tangentes y un punto; 3.° la directriz, una tangente y el punto de contacto; 4.° el focus, un punto y una tangente; 5.° el vértice y dos tangentes; 6.° el vértice, una tangente y el punto de contacto; 7.° el parámetro, el focus y una tangente.

Construir una hipérbola conociendo: 1.° una asíntota, una directriz y la excentricidad; 2.° una asíntota, un vértice y la excentricidad; 3.° una asíntota, un focus y un punto; 4.° una asíntota, una directriz y un punto; 5.° un focus, un vértice y una tangente; 6.° una asíntota, una tangente y una directriz; 7.° una asíntota, una tangente y un focus; 8.° una asíntota, un vértice y un punto; 9.° una directriz, una asíntota y la longitud del eje transverso; 10.° un punto, una asíntota y dos tangentes; 11.° una asíntota y tres puntos.

Hallar el lugar geométrico de los vértices de todas las parábolas que sean tangentes á tres rectas dadas.

Hallar el lugar geométrico de los focus de todas las elipses inscriptas en un rectángulo dado.

Hallar el lugar geométrico de los focus de todas las hipérbolas que tengan un mismo vértice y una misma asíntota dados.

Hallar el lugar de los centros de todas las elipses que tengan un vértice comun y comunes tambien dos tangentes perpendiculares entre sí.

Hallar el lugar de los vértices de todas las parábolas que tengan el mismo focus y una tangente comun ó un punto comun.

§ II. — Interseccion de las curvas de segundo grado y de las planas en general.

378. La investigacion de los puntos que sean comunes á dos curvas dadas por sus ecuaciones se reduce á la de las soluciones que sean comunes á estas ecuaciones; pues las coordenadas de aquellos puntos deben satisfacer simultáneamente á las de aquellas curvas. Así pues el problema de la interseccion de las curvas se refiere á uno de eliminacion, y recíprocamente uno algebráico de eliminacion se puede sustituir por otro gráfico de interseccion entre dos curvas; y no es menor el interés que ofrece esta cuestion bajo el segundo punto de vista que el que presenta bajo el primero.

379. Interseccion de dos curvas de segundo grado.

Si $$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0 \qquad [1],$$

$$A'y^2+B'xy+C'x^2+D'y+E'x+F'=0 \qquad [2]$$

son las ecuaciones de dos curvas de segundo grado, multiplicando por A' la primera y la segunda por A, y restando ordenadamente las resultantes hallarémos otra de primer grado en y que tendrá la forma

$$axy+bx^2+dy+ex+f=0 \qquad [3],$$

la cual podrá reemplazar á cualquiera de las dos propuestas. Eliminando y entre esta última y una de aquellas hallarémos otra en x que por lo general será de cuarto grado y de la forma

$$Px^4+Qx^3+Rx^2+Sx+T=0 \qquad [4].$$

Las cuatro raíces de esta podrán ser reales ó imaginarias; y como en virtud de la [3] á cada valor de x corresponde uno solo de y, se deduce que el sistema de las [1] y [2] solo puede admitir cuatro soluciones, pero estas podrán ser todas reales, ó bien dos reales y dos imaginarias, y tambien imaginarias las cuatro. Por consiguiente, las curvas de segundo grado representadas por las ecuaciones [1] y [2] se pueden cortar en cuatro puntos, ó en dos, ó en ninguno; pero conviniendo en tomar toda solucion imaginaria como las coordenadas de un punto *imaginario* de interseccion podrémos decir que *dos curvas de segundo grado se cortan siempre en cuatro puntos reales ó imaginarios.*

OBSERVACIONES. I. El grado de la ecuacion [4] será inferior al cuarto siempre que las curvas propuestas tengan uno ó mas puntos comunes situados en el infinito; porque si uno de los de interseccion estuviese en el infinito, la ecuacion [4] tendria infinita una de las raices, y esto daria la condicion $P=0$, por lo que dicha ecuacion se rebajaria al tercer grado; y del mismo modo veríamos que seria de segundo grado si dos puntos de interseccion se hallasen en el infinito, como se verificaria tratándose de dos hipérbolas que tuviesen comun una de sus asímtotas.

II. Los cuatro puntos de interseccion de dos curvas de segundo grado determinan tres pares de rectas, cuyas ecuaciones serán reales ó imaginarias, segun que lo sean los mismos puntos. En el caso de que existan estos puntos y se conozcan las ecuaciones de las rectas, la investigacion de aquellos se reduce á la de los comunes á una de las curvas y á dos de estas rectas; ó tambien, y es mas sencillo, á buscar los cuatro puntos en que se cortan cuatro de estas rectas tomadas de dos en dos.

La determinacion de las ecuaciones que representan las rectas de que se trata se funda en el problema que vamos á resolver; mas debemos observar desde luego que, aun en el caso de que los cuatro puntos sean imaginarios, las ecuaciones de dos de las rectas que determinan serán algebráicamente reales, y lo serán las de aquellas que correspondan á los dos puntos cuyas coordenadas imaginarias sean conjugadas de dos en dos, como es fácil convencerse desarrollando los cálculos.

380. Problema. *Hallar la ecuacion general de las curvas de segundo grado que pasen por los puntos de interseccion de otras dos del mismo, cuyas ecuaciones se conocen.*

Si las dos curvas tienen por ecuaciones respectivas

[5] $$f(x, y)=0 \quad \text{y} \quad \varphi(x, y)=0$$ [6],

la ecuacion $$f(x, y)+\lambda\varphi(x, y)=0$$ [7],

en que λ es una indeterminada cualquiera positiva ó negativa, es la pedida. En efecto, observarémos en primer lugar que representará una curva que pasa por los puntos comunes á las dos primeras, y que no tiene mas que estos comunes con ellas; pues todos los sistemas de valores de x y de y que satisfagan á las [5] y [6] satisfarán á la [7], por cuanto reducirán á cero las dos partes de que se compone esta última; y todos los sistemas de valores que satisfagan á la [7] y á cualesquiera de las dos primeras, por ejemplo á la [5], satisfarán á la otra [6], porque de $f=0$ y $f+\lambda\varphi=0$ resulta que $\lambda\varphi=0$, y por consiguiente que $\varphi=0$.

En segundo lugar, la ecuacion [7] representa cuantas curvas de segundo grado pasan por los puntos de interseccion de las propuestas; y con efecto, consideremos una de ellas, tomemos otro punto cualquiera sobre la misma, y determinemos λ por la condicion de que la ecuacion [7] quede verificada por las coordenadas de este punto; entonces dicha [7] lo será por las coordenadas de los cinco puntos de la curva de que se trata, y por consiguiente será la de esta curva.

381. Como entre las líneas de segundo grado que representa la ecuacion [7] están los pares de rectas determinados por los puntos en que se cortan las curvas dadas, se tendrán las ecuaciones de estos pares de rectas determinando λ por la condicion de que dicha ecuacion [7] represente dos líneas rectas. Para esto se la resuelve con relacion á y, se espresa [147] que el trinomio sometido al radical es un cuadrado exacto, se llega á una de tercer grado respecto á λ, y tomando por valor de λ una de las raíces, representará la [7] dos rectas, y se tendrá los tres pares de rectas.

Ahora bien; para que estas rectas sean reales es preciso: 1.° que lo sea λ; 2.° que el binomio B^2-4AC formado por los coeficientes del trinomio en x sometido al radical sea positivo. En primer lugar, la ecuacion de tercer grado en λ tiene siempre una raiz real; además, siempre hay un par de rectas, cuyas ecuaciones son algebráicamente reales, de donde se sigue que este valor real de λ debe satisfacer á la segunda condicion.

En el caso de que fuesen reales los tres valores de λ no puede por esto decirse que lo serán todas las ecuaciones de los tres pares de rectas, ni que se corten las curvas propuestas. Hay sobre este particular varios teoremas muy curiosos, pero que no creemos que se deben esponer aquí.

382. Algunas veces será posible elegir la cantidad λ de tal modo que la ecuacion [7], que no es otra que la

$$\left.\begin{array}{l}(A-\lambda A')y^2+(B-\lambda B')xy+(C-\lambda C')x^2+(D-\lambda D')y \\ \quad +(E-\lambda E')x+F-\lambda F'=0\end{array}\right\},$$

represente un círculo. Para esto será preciso que, si los ejes son rectangulares, se verifiquen simultáneamente

$$B-\lambda B'=0 \quad y \quad A-\lambda A'=C-\lambda C';$$

pero de la primera de estas relaciones sale $\lambda=\frac{B}{B'}$, y sustituyendo este valor en la segunda se halla la ecuacion de condicion

$$A-\frac{BA'}{B'}=C-\frac{BC'}{B'}, \quad ó \quad \frac{B}{A-C}=\frac{B'}{A'-C'} \qquad [8].$$

Recordando la simplificacion de la ecuacion de segundo grado por medio de la transformacion de coordenadas (172) observarémos que, llamando α y α' á los ángulos que uno de los ejes de la primera curva y uno de los de la segunda forman con el de las x, se reducirá la relacion (8) á

$$-\tang 2\alpha = -\tang 2\alpha', \quad \text{ó bien á} \quad \tang 2\alpha' = \tang 2\alpha,$$

de donde salen los valores

$$\alpha' = \alpha, \quad \alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad \alpha' = \alpha + \pi, \quad \alpha' = \alpha + \frac{3\pi}{2},$$

y así sucesivamente, que manifiestan que los ejes de las dos curvas han de ser paralelos ó perpendiculares entre sí. Esta es la condicion geométrica que se necesita para que todos los puntos comunes á las dos curvas se hallen sobre una misma circunferencia de círculo.

383. Interseccion de cualesquiera curvas. 1.° Caso en que pueden resolverse las ecuaciones con relacion á una misma variable. — Siempre que sea posible resolver las dos ecuaciones con relacion á una misma variable, como sucede principalmente cuando son de segundo grado, se puede, haciendo préviamente una construccion gráfica, hallar las coordenadas de los puntos comunes con tanta aproximacion como se quiera, sin necesidad de resolver ninguna ecuacion final de grado superior.

Suponiendo que se hayan construido sobre una misma hoja de papel las curvas que representen dos ecuaciones, que supondrémos numéricas y reducidas á la forma

$$y = f(x) \quad \text{é} \quad y = \varphi(x),$$

será posible medir sobre el dibujo las coordenadas de los puntos que aquellas tengan comunes; y si x_1 es el valor hallado de este modo para la abscisa de uno de estos puntos, este será un valor aproximado de la verdadera abscisa correspondiente al punto de interseccion que se considera. A esta abscisa corresponderán las dos ordenadas $f(x_1)$ y $\varphi(x_1)$, que no serán exactamente iguales; pero los dos puntos que tengan por coordenadas, el uno x_1 y $f(x_1)$, y el otro x_1 y $\varphi(x_1)$, estarán bastante próximos al de interseccion para que en el intérvalo de uno á otro pueda tomarse sin error sensible en vez de cada curva su tangente.

Estas dos tangentes tendrán por ecuaciones (100)

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$$

é

$$y-\varphi(x_1)=\varphi'(x_1)(x-x_1).$$

Conociendo x_1 se podrán calcular fácilmente $f'(x_1)$ y $\varphi'(x_1)$; y como se tiene ya $f(x_1)$ y $\varphi(x_1)$ se podrá determinar la abscisa del punto de interseccion de ambas tangentes haciendo uso de las dos ecuaciones anteriores que son de primer grado.

Supongamos que el valor que resulte para x sea x_2, y si el dibujo se hizo con bastante cuidado, es decir, si x_1 es un valor bastante aproximado á la abscisa del punto de interseccion, x_2 será otro mas aproximado aun. Esto mismo se conocerá sustituyendo x_2 en vez de x en las funciones f y φ, pues las ordenadas $f(x_2)$ y $\varphi(x_2)$ de las dos curvas se diferenciarán en menos que las $f(x_1)$ y $\varphi(x_1)$.

Para hallar otra nueva aproximacion se sustituirá, en vez de las dos curvas, sus tangentes levantadas en los puntos cuyas coordenadas son por una parte x_2 y $f(x_2)$, y por la otra x_2 y $\varphi(x_2)$; es decir, que se hará uso de las ecuaciones

$$y-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2),$$

$$y-\varphi(x_2)=\varphi'(x_2)(x-x_2),$$

que darán para x un valor x_3 mas aproximado aun que x_2; y esto se comprobará viendo que la diferencia entre las ordenadas $f(x_3)$ y $\varphi(x_3)$ es menor que la que existia entre las $f(x_2)$ y $\varphi(x_2)$.

Continuando de este modo se llegará á tener el grado de aproximacion que se quiera.

Observacion. No es posible fijar de antemano el grado de aproximacion con que se ha de calcular x_2, porque no lo es conocer exactamente la de los valores x_1 é y_1 que están medidos sobre el dibujo. Es mas sencillo establecer préviamente el límite del error que se quiere cometer, por ejemplo una milésima, que por regla general será mas que suficiente en cualesquiera aplicaciones; de modo que se calculará x_2, y por consiguiente $f(x_2)$ y $\varphi(x_2$

con tres ó cuatro decimales; lo mismo se hará con x_3, $f(x_3)$, $\varphi(x_3)$, y así de los demás; finalmente, se detendrá el cálculo cuando los valores $f(x)$ y $\varphi(x)$ resulten ya con tres decimales comunes.

Para asegurarse de que el mismo valor de x tiene la aproximacion deseada se puede hacer uso del carácter siguiente. Si x_n es el valor á que hayamos llegado, se calcularán las cantidades

$$f(x_n-0,001)-\varphi(x_n-0,001)$$

y

$$f(x_n+0,001)-\varphi(x_n+0,001),$$

cuyas dos diferencias han de tener precisamente signo contrario, pues la curva que antes de la interseccion está en el dibujo sobre la otra pasa debajo de esta despues de haberla cortado. Se escluye el caso en que solo hubiese contacto.

Por lo demás muy pocas veces reportará utilidad el verificar esta comprobacion, y por regla general puede suprimirse.

384. Propongámonos como un ejemplo de aplicacion de este método hallar los puntos de interseccion de las dos curvas representadas en las ecuaciones

$$y^2-2xy+x^2-2y-2x+1=0, \quad \text{ó sea} \quad y=x+1\pm2\sqrt{x}$$

y

$$y^2+2xy+x^2-8y-9x+16=0, \quad \text{ó bien} \quad y=-x+4\pm\sqrt{x}.$$

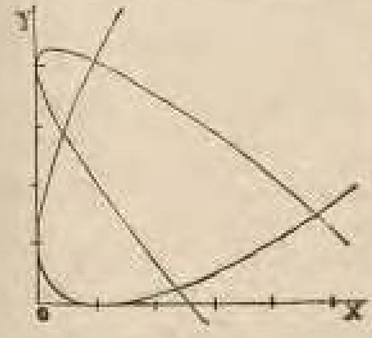


Fig. 134.

Construyendo cuidadosamente sobre un papel, que si se quiere podrá estar formando cuadrícula, y con una escala conveniente las dos parábolas que las ecuaciones anteriores representan, se echará de ver (fig. 134) que tienen cuatro puntos comunes, cuyas abscisas medidas sobre el dibujo valen aproximadamente

$$x=0,45,\quad x=1,\quad x=2,23,\quad x=4,73.$$

1. Ocupémonos desde luego del primero. La simple inspeccion de la figura hace ver que este punto pertenece á las ramas de parábola representadas por

$$y=x+1+2\sqrt{x} \quad \text{é} \quad y=-x+4-\sqrt{x},$$

de modo que serán para él

$$f(x)=x+1+2\sqrt{x} \quad \text{y} \quad \varphi(x)=-x+4-\sqrt{x}.$$

de donde sacarémos

$$f'(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad \varphi'(x)=-1-\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

El valor $x=0,45$ da

$$f(0,45)=2,7916 \quad \text{y} \quad \varphi(0,45)=2,8792;$$

y como es muy notable la diferencia entre estas dos ordenadas será preciso recurrir á las tangentes. Hallarémos

$$f'(0,45)=2,4534 \quad \text{y} \quad \varphi'(0,45)=-1,7453;$$

por lo que las ecuaciones de las tangentes serán

$$y-2,7916=\ 2,4534(x-0,45) \quad \text{ó} \quad y-2,4534x=1,6874$$

ó

$$y-2,8792=-1,7453(x-0,45) \quad \text{ó} \quad y+1,7453x=3,6646,$$

y de estas sacarémos $x=0,4708$; y sustituyendo este valor en las funciones f y φ, resultará

$$f(0,4708)=2,8430 \quad \text{y} \quad \varphi(0,4708)=2,8431;$$

valores que se pueden considerar suficientemente aproximados.

Observacion. Aplicando el carácter indicado en el núm. **393** hallarémos

$$f(0,4707)-\varphi(0,4707)=-0,0006$$

y

$$f(0,4709)-\varphi(0,4709)=+0,0004,$$

y como estas diferencias tienen signo contrario, x estará comprendido entre 0,4707 y 0,4709; de modo que el error que se comete en el valor 0,4708 es menor que una unidad del cuarto órden decimal.

II. El segundo punto de interseccion está sobre las ramas representadas por

$$y=x+1+2\sqrt{x} \quad \text{ó} \quad y=-x+4+\sqrt{x},$$

y como haciendo $x=1$ ambas ecuaciones dan $y=4$, estos dos valores son exactos.

III. El tercer punto comun pertenece á las ramas que tienen por ecuaciones

$$y=x+1-2\sqrt{x} \quad \text{ó} \quad y=-x+4-\sqrt{x}.$$

Haciendo $x=2,25$ resulta en ambas ecuaciones $y=0,25$, por lo que son exactos los valores de x é y.

IV. En las ramas que tienen por ecuaciones respectivas

$$y=x+1-2\sqrt{x} \quad \text{ó} \quad y=-x+4-\sqrt{x}$$

está el cuarto punto de interseccion; de modo que son en este caso

$$f(x)=x+1-2\sqrt{x} \quad \text{y} \quad \varphi(x)=-x+4+\sqrt{x},$$

y por lo tanto $\quad f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{y} \quad \varphi'(x)=-1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

El valor $x=4,75$ produce

$$f(4,75)=1,3912 \quad \text{y} \quad \varphi(4,75)=1,4294,$$

y siendo muy diferentes estos dos resultados es preciso recurrir á las tangentes. Pero como tenemos

$$f'(4,75)=0,5412 \quad \text{y} \quad \varphi'(4,75)=-0,7706,$$

las ecuaciones de las tangentes serán

$$y-1,3912=0,5412(x-4,75) \quad \text{ó} \quad y-0,5412.x=-1,1795$$

$$\text{é} \qquad y-1,4294=-0,7706(x-4,75) \quad \text{ó} \quad y+0,7706.x=5,0898.$$

De aquí resulta $x=4,7790$, que da

$$f(4,7790)=1,4068 \quad \text{y} \quad \varphi(4,7790)=1,4071;$$

por consiguiente, se pueden tomar $x=4,779$ é $y=1,407$ como valores suficientemente aproximados.

385. Presentarémos por segundo ejemplo las dos ecuaciones trascendentes

$$y=\operatorname{sen} x \quad \text{é} \quad y=e^{-x},$$

en las que será preciso, para que sean homogéneas, considerar que y y x expresan las razones de la ordenada y la abscisa con la unidad de longitud. De este modo x representa en la primera el arco que guarda con el radio la razon que expresa el número x, y en la segunda e será la base del sistema de logaritmos neperianos, esto es 2,718281828.

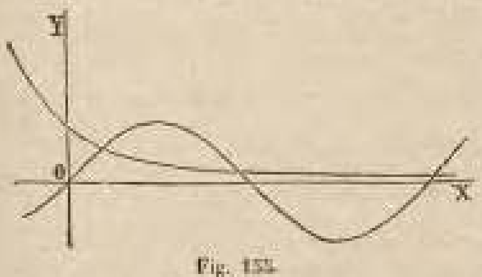


Fig. 153.

Bajo este supuesto se verá fácilmente que las curvas representadas por estas dos ecuaciones tienen la forma que manifiesta la figura 153, y que se cortan á la derecha del eje de las y en puntos que se aproximan cada vez mas al de las x.

La abscisa del primer punto comun medida sobre el dibujo es $x=0,55$, por lo que tendremos

$$\operatorname{sen} 0,55=\operatorname{sen} 31^\circ,30',7=0,5227$$

y

$$e^{-0,55}=0,5769;$$

pero como es bastante considerable la diferencia entre estas ordenadas nos valdrémos de las tangentes. Ahora bien; haciendo

$$f(x)=\operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad \varphi(x)=e^{-x}$$

serán

$$f'(x)=\cos x \quad \text{y} \quad \varphi'(x)=-e^{-x};$$

de modo que tendrémos

$$f'(x)=\cos 31^\circ,30',7=0,8525$$

$$\varphi'(x)=-e^{-0,55}=-0,5769,$$

y las tangentes estarán representadas por las ecuaciones

$$y-0,5227=0,8525(x-0,55) \quad \text{ó} \quad y-0,8525\,.\,x=0,0538$$

ó

$$y-0,5769=-0,5769(x-0,55) \quad \text{ó} \quad y+0,5769\,.\,x=0,8942$$

de las que se saca

$$x=0,587,$$

y por lo que serán

$$f(x)=\operatorname{sen} 0,587=\operatorname{sen} 33^\circ 37',9=0,5538$$

y

$$\varphi(x)=e^{-0,587}=0,5560.$$

Como estos valores no se aproximan suficientemente el uno al otro harémos uso de nuevas tangentes; y siendo

$$f'(x)=\cos 33^\circ 37',9=0,8326$$

y

$$\varphi'(x)=-e^{-0,587}=-0,5560,$$

serán las ecuaciones de las nuevas tangentes

$$y-0,5538=\ \ 0,8326(x-0,587) \quad \text{ó} \quad y-0,8326\,.\,x=0,0651,$$

$$y-0,5560=-0,5560(x-0,587) \quad \text{ó} \quad y+0,5560\,.\,x=0,8824,$$

donde resulta $x=0,5885$, y en su consecuencia

$$f(x)=\operatorname{sen} 0,5885=\operatorname{sen} 33^\circ 43',3=0,5551\ \ldots\ldots$$

$$\varphi(x)=e^{-0,5885}=0,5551\ \ldots\ldots$$

Estas ordenadas no se diferencian mas que desde la cuarta cifra decimal en adelante, y por lo mismo se puede considerar como suficientemente aproximados los valores $x=0,5885$ é $y=0,5551$.

Del mismo modo se hallarian los otros puntos de interseccion.

386. **2.° Caso en que no se puedan resolver las ecuaciones de las dos curvas con relacion á una misma variable.** — Para mayor simetría hemos supuesto que las ecuaciones de las dos curvas están resueltas con relacion á una misma variable; pero aun se podria aplicar el método anterior cuando fuese necesario resolver cada una con respecto á una variable diferente. Por ejemplo, supongamos que se tenga

$$y=f(x) \quad \text{y} \quad x=\varphi(y);$$

y que sean y_1 y x_1 los valores aproximados y medidos sobre el dibujo correspondientes á las coordenadas de un punto comun á las dos curvas.

Considerando la primera se hallará que á la abscisa x_1 corresponde una ordenada $f(x_1)$ poco diferente de y_1; y que la tangente en el punto que tenga por coordenadas x_1 y $f(x_1)$ estará representada por la ecuacion

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1).$$

En la segunda curva corresponderá á la ordenada y_1 una abscisa $\varphi(y_1)$ poco diferente de x_1; y la tangente levantada en el punto que tenga por coordenadas y_1 y $\varphi(y_1)$ estará representada por la ecuacion

$$x-\varphi(y_1)=\varphi'(y_1)(y-y_1).$$

Se buscará los valores de x y de y que satisfagan simultáneamente á estas dos ecuaciones de primer grado, y suponiendo que sean x_2 é y_2 se comparará y_2 con $f(x_1)$ y x_2 con $\varphi(y_1)$, y si las diferencias son muy pequeñas se podrá considerar que x_2 é y_2 son valores suficientemente aproximados. Por el contrario, si aquellas diferencias fuesen muy considerables se repetirá con x_2 é y_2 el mismo cálculo que hemos hecho con x_1 é y_1; se hallará nuevos y mas aproximados valores x_3 é y_3, y continuando del mismo modo se llegará á la aproximacion que se quiera.

387. **3.° Ecuaciones irresolubles.** — Pasemos ya al caso en que no se pueda resolver las ecuaciones propuestas, ni con relacion á x ni con relacion á y, y supongamos primeramente que sean algebráicas.

En este caso se ordenará cada una de ellas con relacion á la variable que entre en ambas con menor esponente, y suponiendo que esta sea la y, m el mayor esponente que tenga en la primera ecuacion, y n en la segunda, las representarémos por

$$Y_m=0 \quad é \quad Y_n=0 \qquad [1].$$

Hecho esto dividirémos Y_m por Y_n continuando la division hasta hallar un resto del grado $n-1$ respecto á y; este resto, lo mismo que el cociente tendrán por regla general coeficientes fraccionarios; y suponiendo que resto y cociente se hayan reducido á un mismo denominador $\varphi(x)$, que resulte Y_n para numerador del resto y Q para el del cociente, se tendrá

$$Y_m=Y_n.\frac{Q}{\varphi(x)}+\frac{Y_{n-1}}{\varphi(x)},$$

por lo que $$\varphi(x).Y_m=Y_n.Q+Y_{n-1} \qquad [2].$$

Debe observarse que, si preventivamente se hubiese multiplicado Y_m por $\varphi(x)$, se hubiera llevado á cabo la division sin que ni en el cociente ni en el resto hubiera aparecido x en el denominador.

Sentado esto, todo sistema de valores de x y de y que reduzca á cero á Y_m é Y_n tambien reducirá á cero á Y_{n-1}; pues como $\varphi(x)$ y Q nó contienen variables en su denominador no pueden hacerse infinitos por valores finitos de estas variables. De aquí se deduce que todos los puntos comunes á las dos curvas propuestas están en la que tiene por ecuacion

$$Y_{n-1}=0.$$

En segundo lugar, todo sistema de valores de x y de y que reduzca á cero Y_{n-1} é Y_n hará lo mismo con el segundo miembro de la ecuacion (2); por consiguiente, tambien tendrá que reducir á cero el primer miembro, y para ello á cualquiera de los dos factores Y_m ó $\varphi(x)$. Por lo tanto, los puntos que sean comunes á las curvas representadas por las ecuaciones

$$Y_n=0 \quad é \quad Y_{n-1}=0 \qquad [3]$$

están en la curva $Y_m=0$, ó en las paralelas al eje de las y comprendidas en la ecuacion $\varphi(x)=0$.

De aquí resulta que al buscar todos los puntos comunes á las curvas representadas en las ecuaciónes [3] resultarán todos los que sean comunes á las dos propuestas, y además algunos otros que no pertenecerán á la $Y_m=0$.

Operando sobre las curvas [3] como lo hicimos con las [1] llegarémos á sustituirlas por otras dos

$$Y_{n-1}=0 \quad ó \quad Y_{n-2}=0 \qquad [4],$$

cuyos puntos comunes comprenderán todos los que lo sean á las [3], y quizá algunos otros que no pertenezcan á la $Y_n=0$; de modo que entre estos puntos comunes estarán todos los de interseccion de las dos curvas propuestas [1], y tal vez algunos otros estraños á estas.

Continuando así se llegará á un sistema de curvas

$$Y_2=0 \quad ó \quad Y_1=0,$$

cuyos puntos comunes estarán compuestos de los de interseccion de las dos curvas propuestas, y tal vez de algunos otros que no pertenezcan á estas. Como estas curvas $Y_2=0$ ó $Y_1=0$ serán la una de segundo grado y la otra de primero respecto á y, se las podrá resolver con relacion á esta variable, construirlas fácilmente y aplicarles el método del núm. 383.

Los pares de valores así hallados que no satisfagan á las dos ecuaciónes de las curvas propuestas corresponderán á las soluciones estrañas que haya introducido el cálculo.

Es verdad que el Álgebra da medios para evitar esta introduccion de valores estraños, pero no es este el sitio conveniente para darlos á conocer: además, es preciso no exagerar la importancia de estas soluciones estrañas, que son casi siempre en corto número cuando las ecuaciones propuestas no tienen un grado muy elevado ni están preparadas á drede.

388. Ecuaciones trascendentes. — Cuando las ecuaciones son trascendentes y no se pueden resolver con relacion á ninguna de las variables que contienen, no es posible establecer un método general para hallar las coordenadas de los puntos comunes á las curvas que representan. Pero si fuese fácil por cualquier medio hallar valores aproximados de estas coordenadas se podrá llegar al grado de aproximacion que se quiera siguiendo el método que vamos á establecer, aplicable tambien á las ecuaciones algebráicas.

Sean $$f(x,y)=0 \quad \text{y} \quad \varphi(x,y)=0$$

las propuestas, y x_1 é y_1 los valores aproximados correspondientes á las coordenadas de un punto comun á las dos curvas.

Hagamos $$x=x_1+\alpha \quad \text{é} \quad y=y_1+\beta,$$

cuya hipótesis dará

$$f(x_1+\alpha, y_1+\beta)=0, \quad \text{y} \quad \varphi(x_1+\alpha, y_1+\beta)=0,$$

que desarrolladas, y teniendo presente que si los valores x_1 é y_1 están suficientemente aproximados, α y β serán cantidades bastante pequeñas para que se pueda desechar sus cuadrados y producto, resultará

$$f(x_1, y_1)+\alpha f'_x(x_1, y_1)+\beta f'_y(x_1, y_1)=0$$

y $$\varphi(x_1, y_1)+\alpha\varphi'_x(x_1, y_1)+\beta\varphi'_y(x_1, y_1)=0.$$

De estas ecuaciones de primer grado saldrán los valores de α y β, que añadidos respectivamente á los de x_1 é y_1, darán para x é y otros x_2 é y_2 mas aproximados. Haciendo con estos valores lo mismo que hicimos con x_1 é y_1 resultarán otros aun mas aproximados x_3 é y_3, y así sucesivamente.

Se conocerá que se ha llegado al grado necesario de aproximacion cuando sustituyendo en $f(x,y)$ y en $\varphi(x,y)$ los valores de x é y en que nos hayamos detenido, como exige la marcha del cálculo, sean despreciables los resultados.

389. Para que sirva de ejemplo considerarémos los dos lugares geométricos representados por las ecuaciones

$$y+x-\tfrac{1}{5}\cos(y+x)=0 \quad \text{é} \quad y^3-xy+x^3=0,$$

y supondrémos que por cualquier medio hayamos podido averiguar con un error menor que una centésima los valores de las coordenadas de un punto comun.

Sea, por consiguiente, $x_1=0{,}03$ é $y_1=0{,}16$, y tendrémos

$$f(x_1, y_1)=y_1+x_1-\tfrac{1}{5}\cos(y_1+x_1)=0{,}19-\tfrac{1}{5}\cos 0{,}19=0{,}19-\tfrac{1}{5}\cos 10^\circ,53',10'',2$$
$$=0{,}19-0{,}19640=-0{,}0064.$$

$$f_x'(x_1, y_1) = 1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(y_1 + x_1) = 1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 10°,33',10'',2 = 1,0378$$

$$f_y'(x_1, y_1) = 1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(y_1 + x_1) = 1,0378.$$

$$\varphi(x_1, y_1) = y_1^3 - x_1 y_1 + x_1^3 = -0,00068$$

$$\varphi_x'(x_1, y_1) = -y_1 + 3x_1^2 = -0,1573$$

$$\varphi_y'(x_1, y_1) = 3y_1^2 - x_1 = +0,0468;$$

por consiguiente, hay que resolver las dos ecuaciones

$$1,0378\,\alpha + 1,0378\,\beta = 0,0064$$

$$-0,1573\,\alpha + 0,0468\,\beta = 0,0068,$$

que dan $\alpha = -0,00201 \;\; y \;\; \beta = 0,00817.$

por lo cual $x_2 = 0,03 - 0,00201 = 0,02799$

$$y_2 = 0,16 + 0,00817 = 0,16817.$$

Para conocer á qué grado de aproximacion hemos llegado se puede calcular los valores de $f(x_2, y_2)$ y de $\varphi(x_2, y_2)$, lo cual nos dará

$$f(x_2, y_2) = -0,000006 \;\; y \;\; \varphi(x_2, y_2) = +0,000070;$$

y, por lo tanto, podemos considerar como suficientemente aproximados los valores de x_2 é y_2.

390. Observaciones. I. Con motivo de las curvas cuyas ecuaciones no se pueden resolver respecto á ninguna de sus variables conviene recordar que la transformacion de coordenadas hace algunas veces que desaparezca esta dificultad.

Por ejemplo, considerando la curva anterior que tiene por ecuacion

$$y^3 - xy + x^3 = 0,$$

como su primer miembro no cambia cuando en vez de y se pone x, y en vez de x y, debemos deducir que la curva que representa está colocada del mismo modo respecto al eje de las x que lo está respecto al de las y, y que tiene en consecuencia de esto por eje de simetría la bisectriz del primer ángulo formado por aquellos. Tomando esta bisectriz por eje de las x, y suponiendo rectangulares las nuevas coordenadas no podrá contener la ecuacion mas potencias de y' que las pares; y como su grado no puede aumentar por el cambio de coordenadas, será preciso que desaparezca el término en y'^3, y que únicamente entre y' elevada al segundo grado.

Esto es, en efecto, lo que sucede, pues las fórmulas de transformacion son para el caso que nos ocupa (57, OBS. III)

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \quad \text{ó} \quad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}};$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion, resulta

$$x^3\sqrt{2}+3xy^2\sqrt{2}-x^2+y^2=0,$$

y de aquí sale $y=\pm x\sqrt{\dfrac{1-x\sqrt{2}}{1+3x\sqrt{2}}}$.

La curva que esta ecuacion representa tiene la forma que indica la figura 156, y por asimtota la recta AB paralela al eje de las x' y espresada por la ecuacion

$$1+3x\sqrt{2}=0,$$

ó sea $$x=-\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

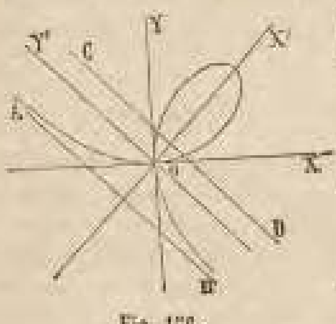


Fig. 156.

II. Fácil es conocer que la ecuacion

$$y+x-\tfrac{1}{2}\cos(y+x)=0$$

representa una recta; pues haciendo $y+x=d$ queda una ecuacion en d, de la que se saca un valor determinado $d=0,196156$. La recta espresada por la ecuacion $y+x=d$ es una paralela CD á la asimtota AB.

301. Cuando se pueda resolver con relacion á una de las variables, á la y por ejemplo, cualquiera de las dos ecuaciones propuestas, sustituyendo en la otra en vez de y su valor en funcion de x, no faltará mas que resolver una ecuacion que solamente contendrá x, y que puede ser algebráica ó trascendente. Para construir las raíces de una ecuacion de esta especie se emplearán los métodos que darémos á conocer en el párrafo siguiente.

§ III. — CONSTRUCCION DE LAS RAICES REALES DE UNA ECUACION NUMÉRICA.

392. Si la ecuacion propuesta es de segundo grado tendrá alguna de las cuatro formas siguientes:

$$x^2 - px + q = 0 \qquad [1],$$

$$x^2 - px - q = 0 \qquad [2],$$

$$x^2 + px + q = 0 \qquad [3],$$

$$x^2 + px - q = 0 \qquad [4];$$

en todas las cuales suponemos que p y q son cantidades positivas.

Para que estas fórmulas sean homogéneas (29) es preciso que, si x representa una linea, p lo sea tambien, y q una superficie.

Hecha esta aclaracion, ocupémonos en primer lugar de la ecuacion [1]. Podriamos sacar de ella los valores de x y construirlos por las reglas dadas en el núm. 36; pero es mas sencillo observar que esta ecuacion se puede descomponer en

$$x(p-x) = q, \quad \text{ó bien en} \quad x(p-x) = c^2,$$

llamando c al lado de un cuadrado equivalente á la superficie q. Escrita la ecuacion bajo esta forma podemos conocer que x y $p-x$ son los dos lados de un rectángulo equivalente á este cuadrado; y como la suma de x y $p-x$ es p queda reducida la cuestion á *construir un rectángulo que sea equivalente á un cuadrado dado y que la suma de sus dos lados componga una longitud conocida* p, cuyo problema es muy conocido en Geometria elemental.

Consideremos en segundo lugar la ecuacion [2] que puede escribirse

$$x(x-p) = q = c^2.$$

En esta ecuacion los lados del rectángulo equivalente á la superficie q son x y $x-p$, que se diferencian en la longitud p; de modo que el problema queda reducido á este otro sencillísimo de Geometria elemental: *Construir un rectángulo que sea equivalente á un cuadrado dado, y que sus lados se diferencien en una longitud conocida* p.

Las ecuaciones [3] y [4] pueden reducirse a las anteriores haciendo $x = -x'$.

Si se examina todos los casos particulares que pueden presentarse al hacer las construcciones arriba esplicadas se volverán á hallar todas las circunstancias indicadas en la discusion de las ecuaciones de segundo grado, por lo cual no nos detendrémos mas en este asunto.

393. La construccion de las raices de una ecuacion de tercer grado está comprendida en la de las de cuatro; por consiguiente, nos ocuparémos de una de este último que carezca del segundo término:

$$x^4+px^2+qx+r=0 \qquad [1],$$

en que p, q y r son números positivos ó negativos.

Haciendo $$x^2=y \qquad [2],$$
que da $$x^4=y^2,$$

se puede escribir la ecuacion [1] bajo la forma

$$y^2+py+qx+r=0 \qquad [3],$$

y considerar que la [1] proviene de la eliminacion de y entre las [2] y [3]; de modo que el problema queda reducido á buscar los puntos comunes á las dos curvas de segundo grado que las ecuaciones [2] y [3] representan.

Pero á la espresada por la [3] se puede sustituir otra mas sencilla; pues sumando miembro á miembro las ecuaciones [1] y [2], y dejando todos los términos de la suma en el primer miembro, resulta

$$x^2+y^2+qx+(p-1)y+r=0 \qquad [4],$$

que representa un círculo.

Las abscisas correspondientes á los puntos de interseccion de este círculo con la parábola espresada siempre por la ecuacion [2] son las raices reales de la propuesta; y si el dibujo se hizo con cuidado y arreglado á una escala conveniente se podrán hallar estas raices con una aproximacion que bastará para las aplicaciones.

Ejemplo. Supongamos que la ecuacion sea

$$x^4+4x^3+3x^2-4x-8=0.$$

Haciendo $x=x'-1$ para que desaparezca el segundo término, resulta

$$x'^4-3x'^2-2x'-4=0,$$

y las raíces reales de esta vendrán dadas por la interseccion de la parábola

$$y=x'^2$$

con el círculo $$x'^2+y^2-2x'-4y-4=0.$$

Llamando α y β á las coordenadas del centro de este círculo y R á su radio, resultarán

$$\alpha=1,\quad \beta=2\quad \text{y}\quad R=3.$$

394. Cuando la ecuacion propuesta sea de tercer grado se la puede reducir siempre á la forma

$$x^3+px+q=0 \qquad [1];$$

y multiplicándola por x, que equivale á introducir en ella la raiz $x=0$, se convertirá en

$$x^4+px^2+qx=0 \qquad [2],$$

y segun lo que dejamos dicho en el número precedente la interseccion de la parábola $y=x^2$ con el círculo

$$x^2+y^2+qx+(p-1)y=0$$

dará sus raíces reales. Como el círculo pasa por el orígen no hay necesidad de hallar su radio; y como tambien la parábola pasa por el orígen, uno de los puntos de interseccion tiene por abscisa $x=0$, que es la raiz introducida al multiplicar la ecuacion propuesta por x, y por esta razon es preciso no tomarla en cuenta.

EJEMPLO. *Hallar la altura que debe tener un segmento esférico para que su volúmen sea la cuarta parte del de la esfera.*

Tomando por incógnita la razon entre la altura buscada y el radio, representándola por x, y por R el radio de la esfera, será Rx la altura del segmento, y tendrá que verificarse que

$$\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{4}{3}\pi R^3=\pi\,.\,R^2x^2(R-\tfrac{1}{3}Rx)$$

ó $$x^3-3x^2+1=0.$$

Haciendo $x=x'+1$ para que desaparezca el segundo término, resulta

$$x'^3-3x'-1=0;$$

y como esta ecuacion no tiene mas que una raiz real positiva será la dada por la interseccion de la parábola $y=x'^2$ con el círculo $x'^2+y'^2-x'-4y=0$ que pasa por el orígen y tiene su centro en el punto cuyas coordenadas son

$$x'=\tfrac{1}{2} \quad \text{é} \quad y=2.$$

395. Pasemos ya á considerar una ecuacion cualquiera

$$f(x)=0 \qquad [1],$$

cuyo primer miembro sea una funcion continua cualquiera de x, como sucede en cuantas presentan las aplicaciones.

Como se la puede tomar por resultado de la eliminacion de y entre las ecuaciones

$$y=f(x) \quad \text{é} \quad y=0,$$

y de este modo queda reducido el problema á buscar las intersecciones del eje de las x con la curva representada por

$$y=f(x) \qquad [2];$$

se construirá esta curva segun dijimos en los números 19 y 21, y las abscisas de los puntos en que corte al eje de las x serán las raices reales de la ecuacion propuesta, raices que se pueden hallar con la aproximacion necesaria en la práctica, si el dibujo se hizo con algun cuidado y se tomó una escala conveniente.

Si $f(x)$ es una funcion algebráica entera se podrá calcular las ordenadas sucesivas de la curva por el método de las diferencias que se esplica en todos los tratados de Álgebra superior; y podrémos hacerlo con toda seguridad, pues los casos de que la curva se aproxime demasiado al eje de las x sin cortarle, ó de que le corte en dos puntos sumamente próximos, que son los únicos que podrian ofrecer duda sobre la naturaleza de las raices halladas, casi nunca ocurren en las aplicaciones: además, cuando tratemos de las interpolaciones verémos de qué modo se puede hacer que desaparezca esta dificultad en caso de presentarse.

396. Se puede llevar hasta el grado de aproximacion que se quiera el valor de una raiz cuando gráficamente se le haya tomado con una bastante adelantada.

Sea x_1 el valor de x aproximado gráficamente é y_1 el correspondiente de y, por manera que $y_1=f(x_1)$. Claro es que el punto determinado por las coordenadas x_1 é y_1 no será el de interseccion de la curva con el eje de las x, pero estará muy inmediato á él; y en el intérvalo podrá sustituirse á la curva su tangente en el punto (x_1, y_1). La ecuacion de esta tangente será (100)

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1);$$

y haciendo en ella $y=0$, resultará para la abscisa de su interseccion con el eje de las x

$$x=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

que es un valor aun mas aproximado á la raiz que se busca.

Representando por x_2 este nuevo valor, por y_2 el correspondiente á y, y repitiendo con ellos los razonamientos y cálculos que se han hecho con x_1 é y_1, resultará otro valor

$$x=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)},$$

aun mas aproximado á la raiz que se va buscando, y así podrá continuarse.

Si de antemano se ha fijado la aproximacion á que se quiere llegar se conocerá en general que hemos llegado á él cuando la cantidad

$$-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

sea numéricamente menor que el límite fijado al error.

Para convencerse más de que se ha llegado á la aproximacion pedida se podrá echar mano del carácter indicado ya en el número **383**, obs., que en esta circunstancia se puede simplificar.

Suponiendo que x_n sea el valor hallado, y δ el límite de que no se quiere que pase el error, se calculará las dos cantidades

$$f(x_n-\delta) \quad \text{y} \quad f(x_n+\delta),$$

que deberán tener signos contrarios; pues si antes de la interseccion pasa la curva por encima del eje de las x, despues de ella tiene que pasar por debajo, y *vice-versa*. (Se escluye el caso en que solo haya contacto).

Este método que acabamos de indicar no es mas que el de aproximacion de Newton; sino que en los tratados de Álgebra se le trata bajo otra forma.

397. I. Sirva de ejemplo la ecuacion algebráica

$$x^5 - 38,197x^2 - 92708 = 0,$$

que es la que habria que resolver cuando se buscase el radio que debiera tener un tubo de 500^m de longitud para que diese bajo una carga de 10^m de agua un volúmen constante de 50 litros por segundo. El radio x está medido en centímetros.

Construyendo la curva representada por

$$y = x^5 - 38,197x^2 - 92708$$

se encuentra que corta al eje de las x á la derecha del orígen en un punto cuya abscisa queda comprendida entre 9 y 10, pero mas cerca de 10 que de 9; de modo que tomando por primer valor aproximado $x = 10$, resulta

$$f(x) = +3473, \quad f'(x) = +49236,$$

y en su consecuencia $\qquad -\dfrac{f(x)}{f'(x)} = -\dfrac{3473}{49236} = 0,07$ próximamente.

Se puede tomar así por segundo valor aproximado

$$x = 10 - 0,07 = 9,93;$$

lo que dará $\qquad f(x) = +74,177, \quad f'(x) = +47856,01;$

de modo que $\qquad -\dfrac{f(x)}{f'(x)} = -0,00155;$

por consiguiente, será $\qquad x = 9,93 - 0,00155 = 9,9284....$

Como sería inútil por ilusorio llevar la aproximacion del radio de un tubo mas allá de las décimas de milímetro, se deberá tomar por bastante aproximado el valor $x = 9,93$; y con efecto siendo

$$f(9,93) = +74,177 \quad \text{y} \quad f(9,92) = -103,891$$

queda x comprendido entre 9,92 y 9,93; por lo tanto, este último valor está aproximado hasta una centésima de centímetro, ó sea hasta una décima de milímetro.

Por consiguiente, el diámetro del tubo referido al metro es $0^m,1986$.

II. Sea para segundo ejemplo la ecuacion trascendente

$$\cos x + \frac{2x}{\pi} = 1,2,$$

forma que tienen algunas de las que ofrecen los problemas relativos á la velocidad de las volantes, y en la que el radio sirve de unidad al arco.

En este caso será

$$f(x) = \cos x + \frac{2x}{\pi} - 1,2 \quad \text{y} \quad f'(x) = -\operatorname{sen} x + \frac{2}{\pi}.$$

Llamando u al valor de x en grados, será

$$x = \pi \frac{u}{180^\circ} \qquad [1].$$

Dando á u los valores sucesivos 45°, 46°, 47°, etc., se podrá deducir fácilmente de la última ecuacion x, y $\cos x$, y en su virtud $f(x)$. De este modo resulta,

cuando $\qquad u = 49^\circ \ldots f(x) = +0,00050,$

y cuando $\qquad u = 50^\circ \ldots f(x) = -0,00167,$

que teniendo signos contrarios dan á conocer que el valor de x está comprendido entre los correspondientes á $u = 49^\circ$ y á $u = 50^\circ$.

Tomando, por consiguiente, como primer valor aproximado $x = \frac{49^\circ}{180^\circ}\pi$, resulta

$$f'(x) = -0,11808,$$

por lo cual

$$-\frac{f(x)}{f'(x)} = +\frac{0,00050}{0,11808} = 0,0042,$$

que corresponde á 14'26".

Se tendrá un valor mas aproximado de x haciendo

$$x = \frac{49^\circ 14' 26''}{180^\circ}\pi \qquad [2];$$

y en efecto en este caso resulta

$$f(x) = -0,00001,$$

que es una cantidad que se puede despreciar.

Por lo tanto, la raiz buscada es [2] con una aproximacion bastante grande.

CAPÍTULO XIII.

SECCIONES CÓNICAS Y CILÍNDRICAS.

ESTUDIO DE LAS SECCIONES PLANAS DEL CONO Y CILINDRO RECTOS DE BASE CIRCULAR.

398. Seccion del cono; método analítico. — Las líneas de segundo órden, que tan minuciosamente hemos estudiado en esta obra, fueron en otro tiempo objeto de numerosos trabajos hechos por los geómetras, que las designaron con el nombre de *secciones cónicas*; y efectivamente vamos á demostrar que las líneas de segundo grado son idénticas á las que resultan de cortar un cono por un plano.

Sean SAB (fig. 157) un cono recto de base circular, YCX un plano secante, SA y SB las generatrices colocadas en un plano perpendicular al YCX; representemos por 2α el ángulo del cono, por 2β el SCX que forma el plano secante con la generatriz SA, y por d la distancia SC; finalmente, tomemos en el plano secante por ejes la interseccion CX de este plano con el SAB, y una perpendicular CY.

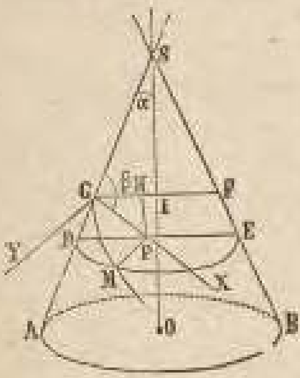


Fig. 157.

Para hallar la ecuacion de la seccion CM se imaginará que por la ordenada MP pasa un plano perpendicular al eje del cono y que cortará al ASB en una recta DPE, y á la superficie del cono en un círculo DME que tendrá DE por diámetro. Así se tendrá

$$\overline{MP}^2 \quad \text{ó} \quad y^2 = DP.PE.$$

Pero el triángulo DCP da

$$DP = CP.\frac{\operatorname{sen} DCP}{\operatorname{sen} SDP} = \frac{x \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha}.$$

Además, tirando CF paralela á DE, y PH paralela á SB, se hallará

$$PE = FH = CF - CH.$$

Mas como $$CF = 2CI = 2d \operatorname{sen} \alpha,$$

$$CH = CP \cdot \frac{\operatorname{sen} CPH}{\operatorname{sen} CHP} = \frac{x \operatorname{sen}(\beta + 2\alpha)}{\cos \alpha}$$

será $$PE = 2d \operatorname{sen} \alpha - x \frac{\operatorname{sen}(\beta + 2\alpha)}{\cos \alpha};$$

y por consiguiente

$$y^2 = \frac{2d \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha} x - \frac{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen}(\beta + 2\alpha)}{\cos^2 \alpha} x^2 \qquad [1]$$

Esta es la ecuacion de la seccion, y á su simple vista se conoce que representa una curva de segundo grado, y que respecto á su especie será una *elipse* cuando sea

$$\operatorname{sen}(\beta + 2\alpha) > 0; \quad \text{es decir, cuando} \quad \beta + 2\alpha < 180°;$$

una *hipérbola* cuando

$$\operatorname{sen}(\beta + 2\alpha) < 0; \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \beta + 2\alpha > 180°;$$

una *parábola* en caso de que

$$\operatorname{sen}(\beta + 2\alpha) = 0; \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \beta + 2\alpha = 180°.$$

Ahora bien las desigualdades

$$\beta + 2\alpha < 180°, \quad \beta + 2\alpha > 180° \quad \text{y la igualdad} \quad \beta + 2\alpha = 180°$$

son precisamente las condiciones que deben satisfacer los ángulos 2α y β para que CX corte á SB por bajo de S, por encima ó quedar paralelo á él; por consiguiente, se puede decir

Que *una seccion cónica es elipse cuando el plano secante corta á todas las generatrices en una misma hoja; hipérbola, si corta á las dos hojas; parábola, si el plano secante es paralelo á una generatriz y corta á todas las demás.*

Por lo tanto, de *la interseccion de un cono con un plano pueden resultar las tres curvas de segundo grado.* Vemos á averiguar si es cierta la recíproca, es decir, si es posible siempre la resolucion del siguiente

399. PROBLEMA. *Trazar sobre la superficie de un cono de revolucion dado una curva determinada de segundo grado.*

Esto queda reducido á probar que son idénticas las dos ecuaciones

$$y^2 = \frac{2d \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha} x - \frac{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} (\beta + 2\alpha)}{\cos^2 \alpha} x^2 \qquad [1]$$

ó

$$y^2 = 2px + qx^2 \qquad [2],$$

que la una representa una seccion cónica cualquiera, y la otra, como vimos en (285, OBS. II), cualquiera curva de segundo grado referida á un eje y á la tangente levantada en el vértice que esté colocado en dicho eje.

Para hallar las incógnitas d y β se resolverá las ecuaciones

$$\frac{2d \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha} = 2p \qquad [3],$$

$$-\frac{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} (\beta + 2\alpha)}{\cos^2 \alpha} = q \qquad [4].$$

Como la segunda solamente contiene β se reduce a

$$\cos (2\beta + 2\alpha) - \cos 2\alpha = 2q \cos^2 \alpha;$$

y teniendo presente que $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, dará

$$\cos (2\beta + 2\alpha) = 2(1 + q) \cos^2 \alpha - 1.$$

Para que pueda sacarse de ésta un valor de β es preciso que el absoluto del segundo miembro sea menor que 1; por consiguiente, es necesario que

$$[2(1 + q) \cos^2 \alpha - 1]^2 - 1 < 0,$$

ó descomponiendo el primer miembro en factores y suprimiendo el positivo $4 \cos^2 \alpha$ deberá verificarse

$$(1 + q)[(1 + q) \cos^2 \alpha - 1] < 0 \qquad [5].$$

Ahora bien: 1.° Si la ecuacion [2] representa una elipse será $q < 0$ y > -1; de modo que $1 + q$ será positivo; $(1 + q) \cos^2 \alpha - 1$ será negativo, y la desigualdad [5] se verificará por sí misma.

Por lo tanto, el ángulo β es real, así como tambien lo es el valor de d sacado de la ecuacion [3], resulta que *toda elipse que se de puede colocarse sobre cualquier cono dado.*

2.° Si la ecuacion [2] representa una hipérbola será q positivo, y la desigualdad [5], despues de suprimido el factor positivo $1+q$, se convierte en

$$(1+q)\cos^2\alpha - 1 < 0,$$

que da
$$\cos^2\alpha < \frac{1}{1+q},$$

y llamando a y b á los ejes de la hipérbola, $q = \frac{b^2}{a^2}$; por lo tanto

$$\cos^2\alpha < \frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

Pero llamando γ al semiángulo de las asíntotas será $\frac{a^2}{a^2+b^2} = \cos^2\gamma$, de modo que

$$\cos^2\alpha < \cos^2\gamma;$$

y como se trata de ángulos esencialmente agudos, será

$$\alpha > \gamma.$$

Luego podemos decir: *para que una hipérbola dada se pueda colocar sobre un cono dado ha de ser el ángulo de las asíntotas que contenga la curva menor que el formado por las generatrices opuestas del cono.*

Si no se hubiera dado el ángulo α se le podrá elegir siempre de modo que se verifique la desigualdad

$$\cos\alpha < \cos\gamma,$$

y de aquí podemos deducir que siempre se hallará un cono sobre el que pueda colocarse una hipérbola dada.

3.° Cuando la ecuacion [2] representa una parábola será $q = 0$, y la desigualdad [5] se verificará por sí misma; de modo que, *dada una parábola cualquiera es siempre posible colocarla sobre cualquier cono.*

Hemos demostrado que *toda seccion cónica es una curva de se-*

gundo grado: la discusion que hemos terminado demuestra tambien que *toda curva de segundo grado puede considerarse como una seccion cónica*; luego queda probada la identidad de aquellas curvas con estas secciones.

400. Seccion de un cilindro recto de base circular. — Suponiendo que el plano YCX permanezca fijo y lo mismo la base del cono, y que el vértice S se aleje hasta el infinito sobre la recta SO, el cono tenderá cada vez más á convertirse en un cilindro recto que tendrá por base el círculo AB: la cantidad $CI = d \operatorname{sen} \alpha$ tenderá á hacerse igual con el radio r de este cilindro, y el ángulo α tendrá por límite cero. Introduciendo estas hipótesis en la ecuacion general de las secciones cónicas la convertirán en

$$y^2 = 2r \operatorname{sen} \beta \,.\, x - \operatorname{sen}^2 \beta \,.\, x^2 \qquad [1],$$

que representa una elipse.

Para colocar una elipse que tenga por ejes a y b sobre un cilindro es preciso hacer idéntica esta ecuacion con la siguiente

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2,$$

lo que da
$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{a} \quad \text{y} \quad b = r;$$

de modo que no se puede colocar sobre un cilindro dado mas elipses que las que tengan el eje menor igual al *diámetro* del cilindro.

401. Secciones cónicas. Método geométrico. — Se puede llegar á los mismos resultados por un método puramente geométrico debido á los señores Dandelin y Quételet, que ofrece además la ventaja de manifestar sobre el mismo cono el papel que juegan los puntos y rectas notables que hemos designado con los nombres de *focus* y *directrices*.

ELIPSE. Supongamos que el plano de la figura 158 sea una seccion que pase por el eje, y CD la traza de un plano perpendicular á aquel y que corte en una misma hoja del cono á las dos generatrices estremas SA y SB: vamos á probar que la seccion CMD es una elipse

Para conseguirlo trazarémos los círculos EFG y E'F'G' tangentes á los tres lados del triángulo SCB, el uno por la parte interior y el otro por la esterior; y suponiendo que la recta AS gire alrededor de SO, arrastrando consigo los semicírculos IEK, I'E'K', nacerán simultáneamente el cono propuesto y dos esferas inscritas en él, que le tocarán la primera segun el círculo ENG, y la segunda segun el E'N'G'. Estas dos esferas tambien serán tangentes al plano secante en los puntos F y F'.

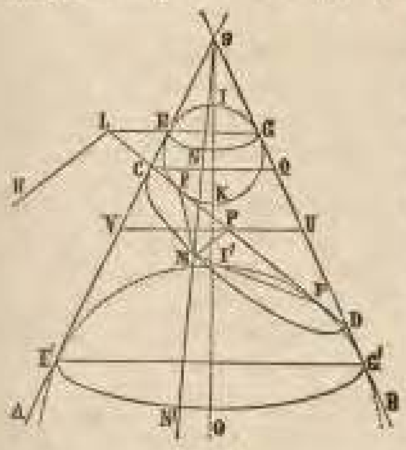


Fig. 158

Bajo este supuesto, tírese por un punto M de la seccion la generatriz SM que encuentre á los círculos de contacto en los puntos N y N', y tírense las MF y MF'. Las rectas MF y MN tangentes á una misma esfera y tiradas por el mismo punto son iguales; lo mismo sucede á las MF' y MN'; de modo que

$$MF+MF'=MN+MN'=NN'=EE'.$$

Por consiguiente, la curva que vamos considerando tiene la propiedad de que la suma de las distancias desde uno de sus puntos á dos fijos es una cantidad constante; luego es una elipse, y F y F' sus focus. Es evidente que su eje mayor es la línea CD.

DIRECTRICES. Sea LH la interseccion del plano secante con el del círculo de contacto, y MP una perpendicular bajada á CD desde el punto M: por ser los triángulos LCE y CPV semejantes tendrémos

$$\frac{CP}{LC}=\frac{CV}{EC},$$

y por lo mismo $$\frac{CP+LC}{LC}=\frac{CV+EC}{EC};$$

es decir que $$\frac{LP}{VE}=\frac{LC}{EC}=constante;$$

pero LP es la distancia entre el punto M y LH, y $VE=MN=MF$ es la que hay entre el mismo punto y el focus; luego las distancias desde un punto cualquiera del lugar al punto M y á la recta LH guardan una razon constante. Esta recta LH es, por consiguiente, la directriz que corresponde al focus F. De un modo análogo se hallaria la otra directriz.

Colocar una elipse dada sobre un cono tambien dado. Tírese CQ paralela á EG, y se tendrá $GQ=CE=CF$, $G'D=DF'$; y como por otra parte $GG'=CD$, tendrá que ser QD la escentricidad. Colocar sobre el cono una elipse dada equivale evidentemente á construir el triángulo CDQ, del cual se conoce los lados CD y DQ, y el ángulo obtuso CQD opuesto al lado CD; y como $CD>QD$, siempre habrá una solucion para el problema.

Hipérbola y parábola. Iguales construcciones y discusiones ligeramente modificadas se aplican á la hipérbola y á la parábola; pero no pasamos á ocuparnos de ellas para que lo hagan los lectores y les sirva de ejercicio.

Seccion cilíndrica. La misma analogía nos conducirá á las construcciones propias para este caso, que por otra parte no hay necesidad de estudiar separadamente, porque se puede considerar que un cilindro no es mas que un cono cuyo vértice se ha alejado hasta el infinito.

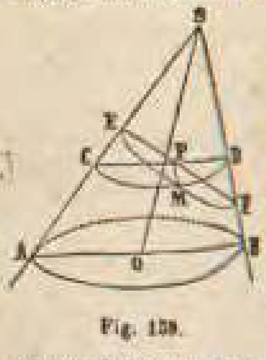


Fig. 158.

102. Seccion antiparalela. — Es evidente que las secciones causadas en un cono oblícuo de base circular por planos paralelos á la base son circunferencias de círculo. Vamos ahora á demostrar que existe otro sistema de planos no paralelos á la base que tambien producen secciones circulares.

Sea ASB (fig. 158) la *seccion principal* de un cono oblícuo de base circular, es decir, la seccion causada en él por un plano que pasa por el eje y es perpendicular á la base

Sea EMF otro plano perpendicular al ASB. Si la seccion EMF fuese un círculo, tirando la ordenada MP perpendicular al diámetro EF de este círculo tendria que verificarse que

$$\overline{MP}^2 = PE \times PF.$$

Por otra parte, tirando por MP un plano paralelo á la base la seccion CMD causada por él será un círculo, y se tendrá

$$\overline{MP}^2 = CP \times PD,$$

de donde resulta

$$PE \times PF = CP \times PD \quad \text{ó sea} \quad \frac{PE}{CP} = \frac{PD}{PF}.$$

Esta condicion necesaria para que la seccion EMF sea un círculo es tambien suficiente; y como se verifica siempre que los dos triángulos CPE, DPF son semejantes, ó lo que es lo mismo, siempre que es el ángulo C igual al F, dirémos que la seccion producida en un cono oblicuo por un plano que no sea paralelo á su base será una circunferencia de círculo, *si el plano que la ha producido y el de la base del cono forman ángulos respectivamente iguales con las generatrices de la seccion principal.*

Observaciones. I. Siendo el ángulo F igual al A, volviendo el triángulo SEF de modo que el punto F se coloque en la generatriz AS, la seccion EMF será paralela á la base del cono: por este motivo toma el nombre de seccion *antiparalela*.

II. Del mismo modo se demostraria que en todo cilindro oblícuo de base circular existen dos sistemas de planos que dan por secciones círculos.

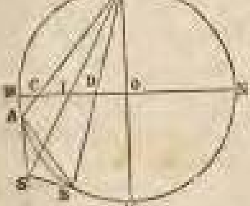


Fig. 160.

403 Aplicacion. El método de las *proyecciones estereográficas* de que se hace uso en la construccion de los mapa-mundi está fundado en la propiedad de la seccion antiparalela.

Sean ASB (fig. 160) la seccion principal de un cono oblícuo de base circular, y O el centro del círculo máximo causado por el plano ASB en la esfera circunscrita al cono. Tirando el diámetro SK todo plano perpendicular á este diámetro cortará al cono en una circunferencia; y con efecto si MN es la traza sobre el plano ASB de cualquiera otro perpendicular á SK, el ángulo C tendrá por medida la semisuma de los arcos AM y SN, ó sea la mitad del arco AS por la igualdad de SN con MS; mas tambien el ángulo B tiene por medida la mitad del arco AS: luego el ángulo C es igual al B. Siendo antiparalela la seccion que se ha hecho tiene que ser un círculo.

Se llama *proyeccion estereográfica* de un punto A de la esfera sobre un plano perpendicular al diámetro SK al punto C en que la recta SA corta á este plano; y de lo que acabamos de decir resulta que en este sistema de proyecciones la de cualquier círculo es tambien un círculo. Tambien ofrece otras muchas ventajas que no podemos enumerar aquí.

Ejercicio. Demostrar que tirando las tangentes AS′, BS′ y la línea SS′, el punto I es el centro del círculo que tiene por diámetro CD.

Problemas. I. *Hallar la ecuacion de las secciones planas de un cono oblícuo. — Idem de un cilindro oblícuo.*

II. *Hallar el lugar geométrico de los focos de todas las secciones planas causadas en un cono recto haciendo girar el plano secante alrededor de un punto, de una generatriz ó perpendicularmente al plano determinado por esta generatriz y el eje del cono. — Hallar el lugar de los centros de las mismas secciones.*

III. *Ecuacion de la curva que forma una seccion plana de un cono cuando se desarrolla este sobre un plano.*

SEGUNDA PARTE.

GEOMETRÍA ANALÍTICA DE TRES DIMENSIONES.

La Geometría analítica de tres dimensiones tiene por objeto estudiar las superficies y líneas, ya sean unas ú otras planas ó ya de doble curvatura, siguiendo métodos análogos á los que dejamos espuestos en la de dos dimensiones.

CAPÍTULO PRIMERO.

TEORÍA DE LAS PROYECCIONES.

404. En la primera parte de esta obra hemos demostrado diversos teoremas sobre las proyecciones, pero suponiendo que la figura proyectada y el eje de proyeccion estaban en el mismo plano. El objeto de este capítulo es estender estos teoremas á las figuras situadas de un modo cualquiera en el espacio.

405. Proyecciones de las líneas. — Definiciones. I. La *proyeccion* de un punto sobre una recta es el pié de la perpendicular bajada desde el punto á la recta.

II. La proyeccion de una recta de longitud determinada sobre otra situada ó no en el mismo plano que la primera es, *en valor absoluto*, la distancia comprendida entre las proyecciones de los estremos de la primera.

III. Se puede concebir que la proyeccion A'B' de una recta AB sobre un eje OX (fig. 161) está engendrada por la proyeccion M' de un punto móvil M que recorre la recta AB, marchando de A hácia B ó de B hácia A; y bajo este concepto considerarémos como positiva la proyeccion A'B' cuando esté engendrada por el movimiento del punto M' en una direccion dada sobre el eje, por ejemplo en

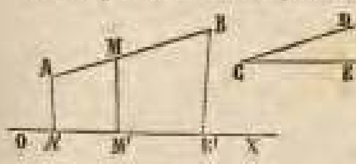


Fig. 161.

el sentido OX; y como negativa cuando el movimiento de M' haya sido en sentido contrario.

Convendrémos en indicar el sentido del movimiento del punto M, y por lo tanto el del M', por el órden de las letras de la recta proyectada; así, cuando digamos que se proyecta segun AB, entenderémos que el punto móvil va desde A hácia B. En virtud de esto podrémos escribir

$$proy\,AB = -proy\,BA.$$

IV. El ángulo de dos rectas situadas en planos diferentes será el formado por dos paralelas á estas tiradas por un punto cualquiera del espacio y dirigidas en el sentido indicado por el órden de las letras; de modo que si por un punto C del espacio (figura 161) se tira una paralela CD á la AB en el sentido AB, otra CE paralela á OX en el sentido OX, se dirá que el ángulo DCE es el de AB con OX. Le designarémos algunas veces por (AB, OX), y segun estas convenciones se tendrá

$$\text{ángulo}\,(AB, OX) = \text{ángulo}\,(BA, XO)$$

$$\text{angulo}\,(AB, OX) = 180^\circ - \text{ángulo}\,(BA, OX)$$

$$\text{ángulo}\,(AB, OX) = 180^\circ - \text{ángulo}\,(AB, XO).$$

V. Cuando varias rectas AB, BC, CD, DE, EF (fig. 164) situadas ó no en un mismo plano están colocadas unas á continuacion de otras se llama *resultante* la recta AF que une los estremos de esta línea quebrada y que cierra el contorno.

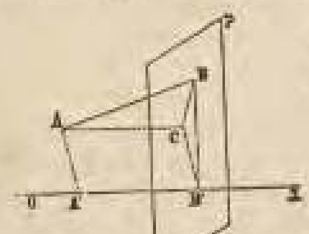


Fig. 162.

406. TEOREMA I. *La proyeccion de una recta* AB *sobre un eje* OX (figura 162) *está representada en magnitud y signo por la longitud absoluta de la recta* AB *multiplicada por el coseno del ángulo que forma* AB *con el eje* OX.

Supongamos primeramente que el ángulo (AB, OX) sea agudo, que las proyecciones positivas se cuenten desde O hácia X, y que sean A′ y B′ las de A y B. Tirando por BB′ un plano P perpendicular á OX, y por el punto A la recta AC paralela á OX y terminada en el plano P, como la línea AA′ es perpendicular á A′B′, y por lo tanto paralela al plano P, resulta que $AC = A'B'$. Pero el triángulo rectángulo ABC da

$$AC = AB \cos BAC = AB \cos(AB, OX);$$

luego $$proy\, AB = +A'B' = AC = AB \cos(AB, OX),$$

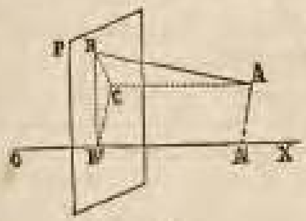


Fig. 163.

que era lo que queríamos demostrar.

Si AB formase con OX (fig. 163) un ángulo obtuso, haciendo las mismas construcciones se tendria

$$A'B' = AC = AB \cos(BA, OX);$$

pero (405, IV)

$$\cos(BA, OX) = \cos[180° - (AB, OX)] = -\cos(AB, OX);$$

luego $$proy\, AB = -A'B' = AB \cos(AB, OX).$$

Queda pues demostrado que en todos los casos $AB \cos(AB, OX)$ representa en magnitud y en signo la proyeccion de AB.

Teorema II. *La suma algebráica de las proyecciones de varias rectas consecutivas sobre un eje OX es igual á la proyeccion de la resultante.*

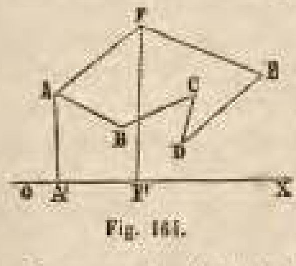


Fig. 164.

Supongamos que un móvil M recorre la línea quebrada ABCDEF (figura 164) en el sentido indicado por las letras, y que otro m marcha sobre la recta AF desde A hácia F.

La proyeccion M′ de M irá desde A′ hasta F′, moviéndose en la direccion OX ó en la XO, segun que los lados que recorra formen un ángulo agudo ú obtuso con la recta OX; pero como M′ parte de A′ y viene á detenerse en F′, es evidente que la suma de los caminos recorridos en el sentido OX debe esceder en A′F′

á la de todos los recorridos en el sentido XO. Por consiguiente A'F' es igual á la suma algebráica de las proyecciones de los diferentes lados de la línea poligonal; y como A'F' es la proyeccion de AF sobre OX, queda demostrado el teorema

COROLARIO I. La proyeccion de un contorno cerrado sobre un eje es cero, si se considera que está recorrido el contorno por un punto en una misma direccion.

En efecto, segun el teorema que acabamos de demostrar, se tiene

$$proy\,\mathrm{AB...F} = proy\,\mathrm{AF}.$$

Pero $$proy\,\mathrm{AF} = -proy\,\mathrm{FA};$$

luego $$proy\,\mathrm{AF} + proy\,\mathrm{AB...F} = proy\,\mathrm{AB...FA} = 0.$$

COROLARIO II. Llamando a, b, c...f las longitudes absolutas de los lados del contorno, y α, β, γ...φ los ángulos que estos lados forman con el eje OX, tendrémos

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + ... + f\cos\varphi = 0.$$

TEOREMA III. *La suma de los cuadrados de las proyecciones de una recta sobre tres ejes rectangulares es igual al cuadrado de esta recta.*

Si OX, OY, OZ (fig. 165) son los tres ejes rectangulares, y tiramos por O una recta OM paralela é igual á la dada, las proyecciones de OM sobre los tres ejes serán iguales á las de la recta dada. Bajo este supuesto, y como es evidente que OM es la diagonal de un paralelepípedo rectángulo cuyas aristas OA, OB, OC son las proyecciones de OM sobre los ejes, se tendrá, en virtud de un teorema de geometría elemental,

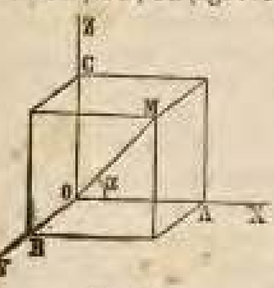


Fig. 165.

$$\overline{\mathrm{OM}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{OB}}^2 + \overline{\mathrm{OC}}^2 \qquad [1],$$

que es lo que deseábamos demostrar.

TEOREMA IV. *La suma de los cuadrados de los cosenos de los án-*

gulos que forma una recta con tres ejes rectangulares es igual á la unidad.

Si representamos (fig. 165) los ángulos MOA, MOB, MOC por α, β, γ se tendrá $OA = OM\cos\alpha$, de donde resulta

$$\cos\alpha = \frac{OA}{OM};$$

por la misma razon serán $\cos\beta = \dfrac{OB}{OM}$,

$$\cos\gamma = \frac{OC}{OM},$$

que elevando al cuadrado y sumando darán

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2}{\overline{OM}^2},$$

la cual en virtud de la igualdad [1] se reduce á

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

y demuestra la verdad del enunciado.

TEOREMA V. *El coseno del ángulo de dos rectas es igual á la suma de los productos de los cosenos de los ángulos que estas rectas forman con tres ejes rectangulares.*

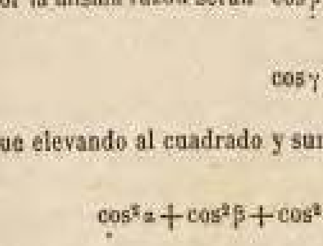


Fig. 166.

Sean OA y OA′ (fig. 166) las rectas dadas; α, β, γ; α', β', γ' los ángulos que forman con tres ejes rectangulares OX, OY, OZ, y V el ángulo (OA, OA′).

Tomando OA por unidad, tirando AP perpendicular al plano XOY, así como PQ perpendicular sobre OX, tendrémos

$$OQ = \cos\alpha, \quad PQ = \cos\beta, \quad AP = \cos\gamma;$$

y si se proyecta el contorno OQPA y su resultante OA sobre OA′, resultará

$$\cos V = OQ\cos\alpha' + PQ\cos\beta' + AP\cos\gamma',$$

ó sea $\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$,

segun deseábamos demostrar.

PROBLEMA. *Conociendo las proyecciones* p, q, r *de una recta sobre tres ejes rectangulares, hallar la longitud de esta recta y los ángulos que su direccion forma con los ejes.*

Sean D la longitud de la recta buscada, y α, β, γ los ángulos que forma con los ejes, y se tendrá en virtud de los teoremas precedentes,

$$\frac{p}{\cos\alpha} = \frac{q}{\cos\beta} = \frac{r}{\cos\gamma} = D,$$

de donde se saca

$$\frac{p^2}{\cos^2\alpha} = \frac{q^2}{\cos^2\beta} = \frac{r^2}{\cos^2\gamma} = \frac{p^2+q^2+r^2}{1} = D^2,$$

y por lo tanto $\qquad D = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$,

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\ \cos\beta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\ \cos\gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

407. Proyecciones de las áreas. — DEFINICIONES. I. La proyeccion de un punto sobre un plano es el pié de la perpendicular bajada desde el punto al plano.

II. La proyeccion de una línea sobre un plano es el lugar de las proyecciones de todos los puntos de esta línea sobre el plano.

OBSERVACION. Como todas las perpendiculares bajadas desde los diferentes puntos de una recta sobre un plano están en otro perpendicular al de proyeccion, se deduce que la proyeccion de una recta sobre un plano es otra recta.

III. La proyeccion de un área plana sobre un plano es el área limitada por la proyeccion del contorno de la proyectada.

El plano sobre el cual se hace la proyeccion recibe el nombre de *plano de proyeccion*.

408. TEOREMA I. *La proyeccion de una recta sobre un plano es igual á la longitud de la recta multiplicada por el coseno del ángulo agudo que la recta forma con el plano.*

La proyeccion de una recta AB sobre un plano P es la misma que resulta de proyectar AB sobre A'B' interseccion del plano P con otro Q llevado por AB perpendicularmente al primero; por consiguiente, será en valor absoluto

$$A'B' = AB \cos(AB, A'B');$$

y como el ángulo (AB, A'B') es por definicion el ángulo de AB con el plano P, el teorema queda demostrado.

Teorema II. *La proyeccion de un área sobre un plano es igual al producto de este área por el coseno del ángulo de los dos planos.*

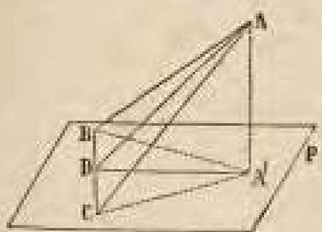


Fig. 167.

Principiarémos por demostrar este teorema por el caso en que se trate de un triángulo:

1.° Suponiendo que el triángulo ABC situado en un plano P' (fig. 167) tenga uno de sus lados en el plano de proyeccion P; que A' sea la proyeccion de A, y que tiremos AD perpendicular á BC, segun el teorema de las tres perpendiculares será A'D perpendicular á BC, y el ángulo ADA' medirá la inclinacion de los dos planos P y P'.

Pero se tiene $\qquad \text{área}\,ABC = \dfrac{BC \times AD}{2},$

$$\text{área}\,A'BC = \frac{BC \times A'D}{2};$$

y como además $\qquad A'D = AD \cos ADA',$

será $\text{área}\,A'BC = \text{área}\,ABC \times \cos ADA' = \text{área}\,ABC \cos(P, P'),$

lo que deseábamos demostrar.

2.° Pasemos ya á considerar que el triángulo esté colocado de un modo cualquiera respecto al plano de proyeccion. Si transportamos este último paralelamente á sí mismo hasta que pase por uno de los vértices B del triángulo, no cambiará en nada ni la proyeccion de este ni el ángulo que los dos planos formen entre si. Sea entonces BE (fig. 168) la interseccion de los planos P y P'; prolonguemos AC hasta E; sea C' la proyeccion del punto C, y segun lo que acabamos de ver, se tendrá

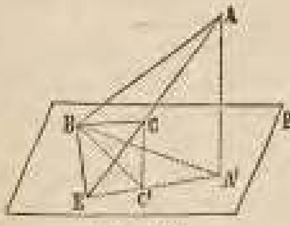


Fig. 168.

$$A'BE = ABE \cos(P, P');$$

$$BC'E = BCE = \cos(P, P');$$

luego

$$A'BE - BC'E = (ABE - BCE)\cos(P, P'),$$

ó
$$A'BC' = ABC \cos(P, P'),$$

conforme deseábamos demostrar.

3.° Sea ABCDE un polígono situado en un plano P, y A'B'C'D'E' su proyeccion sobre el P'. Descomponiendo el polígono propuesto y su proyeccion en triángulos, se tendrá

$$A'B'C' = ABC \cos(P, P'),$$

$$A'C'D' = ACD \cos(P, P'),$$

$$A'D'E' = ADE \cos(P, P'),$$

y sumando
$$A'B'C'D'E' = ABCDE \cos(P, P').$$

4.° Si el área plana que se considera está terminada por una curva se la podrá considerar como el límite de un polígono inscrito; y el teorema demostrado se estenderá tambien á este caso, puesto que es cierto, cualquiera que sea el número de lados del polígono inscrito.

Teorema III. *La suma de los cuadrados de las proyecciones de un área plana sobre tres planos perpendiculares es igual al cuadrado de este área.*

Este teorema es una consecuencia del precedente y del III del número 406; por lo tanto dejamos al lector el cuidado de demostrarlo.

Observacion. En todo lo que precede hemos tomado las proyecciones de las áreas en su valor absoluto; pero algunas teorias de mecánica, sobre todo la de los movimientos de rotacion, conducen á considerar estas proyecciones como positivas ó negativas, y entonces se adopta el siguiente convenio:

Si suponemos tirada una perpendicular al plano P de proyeccion consideraremos como positiva la parte situada á un lado de este plano, como negativa la que se halle en el lado opuesto, y llamarémos á esta perpendicular *eje* del plano P de proyeccion. Elevando hácia un lado determinado del plano Q en que esté el área proyectada A una perpendicular, que llamarémos tambien su eje, el ángulo V que forme el plano Q con el P estará medido por el que forme el eje del plano Q con la parte positiva del eje del plano P. La proyeccion del área plana se representará siempre por $A\cos V$, y será positiva ó negativa segun que el ángulo V sea agudo ú obtuso. Además, si en el eje del plano Q se toma una parte proporcional al área A se verá que $A\cos V$ podrá ser considerado como la proyeccion de esta recta sobre el eje del plano P; de modo que la proyeccion de las áreas está reducida á la de las rectas, y dará lugar á las mismas propiedades.

409. Aplicaciones. La importancia que tienen las proyecciones en la Geometría y Mecánica nos conducen á tratar todavía algunas cuestiones de las mas comunes.

Teorema. *La proyeccion de una recta sobre otra puede obtenerse proyectando la primera sobre tres ejes rectangulares, y haciendo la suma algébrica de las proyecciones de estas sobre la segunda recta.*

Sean A y B las direcciones de dos rectas definidas por los ángulos $\alpha, \beta, \gamma; \lambda, \mu, \nu$ que forman con los ejes fijos; y p, q, r las proyecciones sobre estos ejes de una longitud l tomada sobre la primera recta A, y se tendrá

$$p=l\cos\alpha,\quad q=l\cos\beta,\quad r=l\cos\gamma,$$

y proyectando p, q, r sobre la recta B, resultarán las proyecciones

$$l\cos\alpha\cos\lambda,\quad l\cos\beta\cos\mu,\quad l\cos\gamma\cos\nu,$$

cuya suma $$l(\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu+\cos\gamma\cos\nu)$$

es igual á $$l\cos V,$$

llamando V al ángulo de las dos rectas y teniendo presente (**406**, *teorema V*) que

$$\cos V=\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu+\cos\gamma\cos\nu.$$

Pero como $l\cos V$ es la proyeccion de l sobre B, el teorema está demostrado.

OBSERVACION. Existe un teorema análogo referente á las áreas, y llegaríamos á él reemplazando los ángulos de las rectas por los que formen las normales á los planos de estas áreas.

TEOREMA. *Estando situadas de una manera cualquiera en el espacio varias rectas determinadas de magnitud y direccion existe siempre otra, determinada tambien de magnitud y direccion, tal que su proyeccion sobre un eje cualquiera es igual á la suma de las proyecciones de las rectas dadas sobre el mismo eje.*

Sean $l\,(\alpha, \beta, \gamma)$, $l'\,(\alpha', \beta', \gamma')$..... las longitudes propuestas y los ángulos que forman sus direcciones con relacion á tres ejes fijos, y sea en fin $D\,(\lambda, \mu, \nu)$ una recta cualquiera. Supongamos

$$A = l\cos\alpha + l'\cos\alpha' + \ldots\ldots$$

$$B = l\cos\beta + l'\cos\beta' + \ldots\ldots$$

$$C = l\cos\gamma + l'\cos\gamma' + \ldots\ldots,$$

y segun el teorema precedente, la suma de las proyecciones de las rectas dadas sobre D será

$$A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu,$$

ó $$\sqrt{A^2+B^2+C^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cos\lambda + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cos\mu + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cos\nu\right];$$

y como podemos hacer $A^2 + B^2 + C^2 = R^2$, la expresion anterior se reducirá á

$$R\left[\frac{A}{R}\cos\lambda + \frac{B}{R}\cos\mu + \frac{C}{R}\cos\nu\right] \qquad (1);$$

mas por ser las relaciones $\frac{A}{R}$, $\frac{B}{R}$, $\frac{C}{R}$ menores que la unidad, y la suma de sus cuadrados igual á 1, se las puede considerar como los cosenos de los ángulos que una recta E forma con los ejes; por consiguiente, podrémos suponer

$$\frac{A}{R} = \cos\lambda_1, \quad \frac{B}{R} = \cos\mu_1, \quad \frac{C}{R} = \cos\nu_1,$$

y entonces la espresion (1) se reducirá á

$$R\,(\cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1),$$

ó á

$$R\cos V,$$

siendo V el ángulo de las rectas D y E. Pero $R\cos V$ es la proyeccion sobre la recta D de una longitud determinada R dirigida segun E; luego el teorema está demostrado.

OBSERVACION. Si se transportan las rectas l, l'..... paralelamente á sí mismas de manera que se forme un contorno poligonal, su *resultante*, es decir, la recta que cierra el polígono, no será otra cosa que la recta R.

PROBLEMA. *Hallar el eje sobre el cual la suma algebráica de las proyecciones de varias rectas dadas sea la mayor posible.*

Conservando las mismas notaciones que en el teorema precedente se ve que este problema está reducido á hallar la recta sobre la cual la proyeccion de la R es la mayor posible; pero como la proyeccion de una recta no puede ser mayor que la recta misma, es claro que R ó toda paralela á ella resuelve el problema.

Esta direccion es la misma de la resultante de las rectas consideradas.

OBSERVACIONES. I. La suma de las proyecciones de las rectas sobre todo eje perpendicular á R es nula.

II. Esta suma es la misma sobre todos los ejes que formen el mismo ángulo con la recta R.

III. Se puede establecer la misma proposicion relativamente á las proyecciones de las áreas, y se llegará por el mismo cálculo á determinar lo que se llama en Mecánica el plano del área máxima.

EJERCICIOS. I. TEOREMA. *En todo tetráedro se verifica que el área de una cara cualquiera es igual á la suma de los productos de las otras caras por los cosenos de los ángulos que forman con la primera*: es decir, que designando por a, b, c, d las áreas de las caras del tetráedro propuesto se tendrá

$$a = b\cos(a, b) + c\cos(a, c) + d\cos(a, d).$$

COROLARIO. De aquí se deduce la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2\,(bc\cos(b, c) + bd\cos(b, d) + cd\cos(c, d)).$$

II. Suponiendo que sea P el volúmen de un tetráedro, y i la arista comun á las dos caras a y b, se tendrá

$$P = \frac{2ab\,\mathrm{sen}\,(a, b)}{3i}.$$

CAPÍTULO II.

DE LAS COORDENADAS RECTILÍNEAS.

§ I. — Representacion de un punto.

410. Hemos visto en la Geometría analítica de dos dimensiones cómo se representa un punto situado en un plano; y nos proponemos ahora resolver la misma cuestion respecto á un punto situado de un modo cualquiera en el espacio.

Todo conjunto de construcciones que sirva para encontrar un punto constituirá un sistema de coordenadas y permitirá representar el punto por medio de los elementos variables de estas construcciones, resultando de aquí que hay una infinidad de sistemas de coordenadas. El mas usado es el de las coordenadas rectilíneas que vamos á dar á conocer.

411. **Coordenadas rectilíneas.** — Definiciones. Todo sistema de coordenadas rectilíneas comprende esencialmente tres rectas fijas OX, OY, OZ (fig. 169) no situadas en un mismo plano, que pasan por un mismo punto ú *origen* O, y que se llaman *ejes*, distinguiéndose los unos de los otros por los nombres de ejes de las x, de las y y de las z.

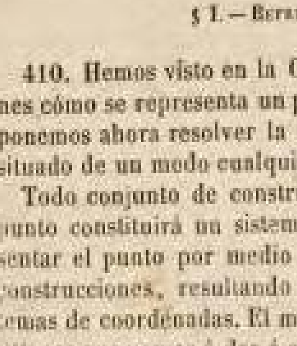


Fig. 169.

Los tres ejes, tomados dos á dos, determinan tres planos XOY, XOZ, YOZ, que se llaman *planos coordenados*, dándose al primero el nombre de plano de las xy, y á los otros dos los de planos de las xz y de las yz.

El sistema de coordenadas se llama *rectangular* cuando cada eje es perpendicular al plano de los otros dos, y en los demas casos *oblícuo*.

412. **Representacion de un punto.** — Si despues de elegir un sistema de ejes tiramos por un punto M del espacio tres planos paralelos á los coordenados cortarán á los ejes OX, OY, OZ respectivamente en los puntos A, B y C, y así tendrémos las distancias OA, OB y OC, que llamarémos las coordenadas del punto M. Así *la coordenada de un punto relativa á un eje es la porcion*

de este eje interceptada entre el plano de los otros dos ejes y un plano paralelo tirado por el punto que se considera.

Tambien se puede considerar á estas coordenadas bajo otro punto de vista. Los tres planos fijos y los otros tres paralelos á estos tirados por el punto M forman un paralelepípedo, en general oblicuo; por lo que si llamamos MP, MQ, MR á las aristas que pasan por el punto M se tendrá

$$MP = OA, \quad MQ = OB, \quad MR = OC;$$

y así puede decirse que *las coordenadas de un punto son tambien las distancias de este punto á tres planos coordenados, estando medida cada distancia paralelamente al eje no situado en el plano de que se trate.*

Observaciones. I. Designarémos en general por x, y y z las coordenadas de un punto M medidas segun el eje sobre que se cuente; por ejemplo, si $OA = 4$, $OB = 3$, $OC = 2$, dirémos que el punto M tiene por coordenadas

$$x = 4, \quad y = 3, \quad z = 2.$$

II. Representarémos muchas veces un punto por sus coordenadas colocadas entre paréntesis; así (x', y', z') designará el punto que tiene por coordenadas

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z'.$$

413. Signos de las coordenadas. — Cuando un punto es dado sus coordenadas están determinadas; y recíprocamente, las coordenadas de un punto determinan este siempre que se sepa además en *qué sentido* deben llevarse estas longitudes á partir del orígen.

En efecto, llevando sobre los tres ejes y en el sentido indicado las longitudes OA, OB, OC respectivamente iguales á las coordenadas del punto, este deberá hallarse sobre el plano paralelo al YOZ tirado por el punto A, puesto que este plano es el lugar de todos los puntos cuya distancia al plano YOZ, contada paralelamente á OX y situada del lado inclinado de este plano, es igual á OA; y como por la misma razon este punto estará sobre los otros dos planos tirados por B y C respectiva y paralelamente á XOZ y á XOY, se hallará en la interseccion de los tres planos.

Por esto se ve que el sentido en que deban contarse sobre cada eje las coordenadas de un punto constituye un elemento esencial para la determinacion de este punto; y para designar claramente este sentido y de una manera conforme al carácter de la lengua algebráica emplearémos los signos + y —; de modo que toda coordenada estará representada por un número afectado de un signo; el número indicará el *valor absoluto* de esta longitud con relacion á una unidad convenida, pero arbitraria; y el signo *el sentido* en que se ha de contar esta longitud en el eje correspondiente á partir del origen.

Las definiciones que hemos dado en el núm. 412 no se refieren mas que al valor absoluto de las coordenadas.

OBSERVACIONES. I. El origen divide á cada uno de los ejes en dos segmentos ilimitados, que se pueden llamar la parte positiva y negativa de este eje: designarémos siempre la primera parte por OX, OY y OZ, y de este modo la simple inspeccion de la figura indicará las convenciones relativas á los signos, sin que se tenga necesidad de advertirlo espresamente.

II. El plano de las xy divide al espacio indefinido en dos regiones, siendo positiva la z de un punto situado en una de estas regiones y negativa cuando está situado en la otra: lo mismo sucede relativamente á los otros planos.

III. Los tres planos coordenados determinan ocho ángulos triédros. Todo punto situado en el ángulo OXYZ tiene sus tres coordenadas positivas, y los situados en el ángulo OXYZ' sus x é y positivas, y la z negativa: para los otros ángulos se deduciria fácilmente el signo de sus coordenadas.

Con objeto de que puedan familiarizarse con las diversas consecuencias de la importante convencion de signos aconsejamos á los discípulos formen ellos mismos la tabla de las combinaciones de los signos que pueden tener las coordenadas de un punto, segun su posicion en uno de los ocho ángulos triédros. Verán, por ejemplo, que *las coordenadas del mismo nombre correspondientes á dos puntos situados en ángulos opuestos son de signos contrarios; que las de dos puntos situados simétricamente con relacion al origen son iguales y de signos contrarios*; que un punto situado en la interseccion de los tres planos bisectores de uno de los ángulos triédros tiene sus coordenadas *iguales en valor absoluto*, etc.

414. PROBLEMA. *Dadas las coordenadas* x', y', z'; x'', y'', z'' *de dos puntos* M' *y* M'' *hallar la distancia que separa á estos dos puntos.*

Si por los puntos M' y M'' se tiran planos paralelos á los coordenados resulta un paralelepípedo que tiene M'M'' por diagonal, y cuyas aristas son los valores absolutos de las diferencias $x''-x'$, $y''-y'$, $z''-z'$.

Cuando los ejes son rectangulares este paralelepípedo es rectángulo, y el cuadrado de la distancia M'M'' es igual á la suma de los cuadrados de las tres aristas contiguas, y llamando δ la distancia M'M'' se tiene

$$\delta^2=(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2,$$

de donde resulta

$$\delta=\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2};$$

y como el segundo miembro conserva el mismo valor aunque cambie de signo una de estas diferencias, la fórmula es general.

415. Cuando los ejes son oblicuos la cuestion se reduce á espresar la diagonal de un paralelepípedo oblicuo en funcion de las aristas y de los ángulos que estas forman entre sí.

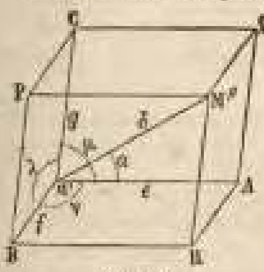


Fig. 170.

Sea en este caso M'BRAQM''PC (figura 170) el paralelepípedo propuesto, y hagamos para abreviar

$$M'A=e, \quad M'B=f, \quad M'C=g.$$

Llamando λ, μ, ν los ángulos que forman entre sí los ejes ó las aristas del paralelepípedo, y α, β, γ los de los ejes con la diagonal M'M'', y proyectando sobre M'M'' la línea poligonal M'ARM'' se tendrá

$$\delta=e\cos\alpha+f\cos\beta+g\cos\gamma,$$

ó

$$\delta^2=e.\delta\cos\alpha+f.\delta\cos\beta+g.\delta\cos\gamma \qquad [1].$$

Pero si se proyecta M'M'' y M'ARM'' sobre M'A se tiene

$$\delta \cos\alpha = e + f\cos\nu + g\cos\mu \qquad [2],$$

y serán de la misma manera

$$\delta \cos\beta = e\cos\nu + f + g\cos\lambda \qquad [3],$$

$$\delta \cos\gamma = e\cos\mu + f\cos\lambda + g \qquad [4],$$

cuyos valores sustituidos en la ecuacion [1] dan

$$\delta^2 = e^2 + f^2 + g^2 + 2fg\cos\lambda + 2eg\cos\mu + 2ef\cos\gamma,$$

ó reemplazando e, f, g por $x''-x'$, $y''-y'$, $z''-z'$, y estrayendo la raiz cuadrada

$$\delta = \sqrt{\begin{matrix}(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2+2(y''-y')(z''-z')\cos\lambda \\ +2(x''-x')(z''-z')\cos\mu+2(x''-x')(y''-y')\cos\nu\end{matrix}} \qquad [5]$$

Esta fórmula es general, porque si $y''-y'$ cambia de signo, el ángulo λ cambia de especie, y por lo tanto $\cos\lambda$ toma un signo contrario al que tenia antes, y cambiando de signo dos factores del producto

$$(y''-y')(z''-z')\cos\lambda$$

el signo del producto queda *esplícitamente* el mismo

EJERCICIOS. I. Probar que existe una relacion entre las líneas trigonométricas de los ángulos que una recta forma con tres ejes oblicuos. Hallar esta relacion y demostrar *à priori* que debe ser de segundo grado.

II. Una recta forma ángulos iguales con cada uno de tres ejes rectangulares; hallar este ángulo. Resolver el mismo problema cuando los ejes son oblicuos.

III. Suponiendo que una recta esté determinada por uno de sus puntos y por su direccion, hallar sobre esta recta un segundo punto situado à una distancia dada del primero.

IV. Tres ejes son rectangulares cuando la relacion

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

se verifica para tres rectas distintas con relacion à estos ejes

§ II. — Representacion de las superficies y de las líneas.

416. Significacion de las ecuaciones aisladas que tengan una, dos ó tres variables. — Acabamos de ver que un punto M está determinado cuando se conocen sus coordenadas, ó lo que viene á ser lo mismo, cuando se dan las tres ecuaciones

$$x=a,\quad y=b,\quad z=c,$$

representando a, b, c números conocidos; luego tres ecuaciones distintas entre las tres variables x, y, z determinarán tantos puntos como soluciones comunes tengan estas ecuaciones.

Pero si no se dan mas que una ó dos coordenadas, ó lo que es lo mismo, una ó dos ecuaciones entre las coordenadas, habrá una infinidad de puntos que satisfagan las mismas condiciones, y en tal caso la reunion de estos puntos formará un lugar geométrico, cuya naturaleza vamos á determinar.

417. 1.° Supongamos que se tiene la ecuacion

$$z=c \qquad [1].$$

Todos los puntos cuya distancia al plano xy contada paralelamente al eje de las z sea algebráicamente igual á c satisfarán á esta condicion; y por consiguiente el lugar geométrico de todos ellos será un plano ACB (fig. 171) paralelo al XOY, y que cortará al eje de las z en un punto C colocado á una distancia OC del orígen igual en valor absoluto á c, y medida hácia el lado que indique el signo de esta cantidad.

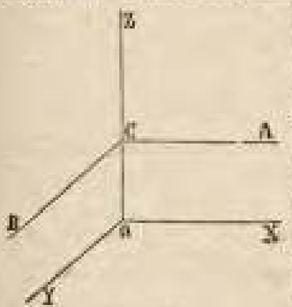


Fig. 171.

Si la ecuacion es

$$f(z)=0 \qquad [2],$$

se verá resolviéndola que equivale á varias ecuaciones

$$z=c,\quad z=c',\quad z=c''\ldots,$$

análogas á la ecuacion [1]; por consecuencia

Toda ecuacion que no contenga mas que una variable representa uno ó varios planos paralelos al de los ejes cuyas coordenadas no entran en la ecuacion.

OBSERVACIONES. I. $z=0$ representa el plano de las xy; $y=0$ el de las xz; $x=0$ el de las yz.

II. La ecuacion (2) puede no tener mas que raices imaginarias, en cuyo caso no representa nada, lo que se puede espresar diciendo que representa planos *imaginarios*.

418. 2.° Sea la ecuacion dada

$$f(x, y)=0 \qquad [3].$$

Si C (fig. 172) es la curva situada en el plano xy referida á los ejes OX, OY que tenga por ecuacion $f(x, y)=0$; y D uno de sus puntos; tirando DE paralela á OZ, todos los puntos de DE tendrán la misma coordenada x y la misma y que el punto D, y por lo tanto estas satisfarán á la ecuacion (3), que no contiene la z; por lo tanto el lugar geométrico que representa esta ecuacion se obtendrá haciendo girar una paralela al eje de las z, de manera que encuentre siempre á la curva C; luego

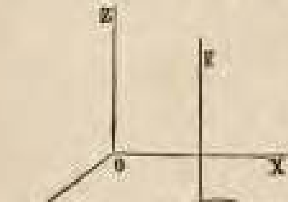


Fig. 172.

Una ecuacion con dos variables representa una superficie cilíndrica engendrada por una recta paralela al eje cuya variable no entra en la ecuacion.

Si $f(x, y)$ es de primer grado, la curva C se reduce á una recta, y por lo tanto el cilindro á un plano. Así pues debemos decir que

Toda ecuacion de primer grado con dos variables representa un plano paralelo al eje cuya variable no entra en la ecuacion.

EJEMPLO. 1.° La ecuacion $\quad \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$

representa un plano paralelo al eje de las z, que corta al de las xy segun una recta que encuentra al eje de las x á tres unidades de distancia, y al de las y á dos del punto O, y al plano de las yz segun una recta que, referida á los ejes OZ y OY, está representada por $y=2$.

2.° La ecuacion

$$5y=3x$$

representa un plano que pasa por el eje de las z.

RECÍPROCAMENTE: *toda superficie cilíndrica cuyas generatrices son paralelas á uno de los ejes, al de las* z *por ejemplo, está representada por una ecuacion que no contiene mas variables que* x *é* y; porque es evidente que las coordenadas de todos sus puntos satisfacen á la ecuacion que representa su traza sobre el plano de las xy.

419. 3.° Supongamos, por último, que se tenga la ecuacion

$$f(x, y, z)=0 \qquad [4].$$

Resolviéndola con relacion á z, se obtendrá otra

$$z=\varphi(x, y) \qquad [5],$$

en la que dando á z un valor determinado h, todos los puntos del espacio que satisfagan con sus coordenadas á la ecuacion

$$\varphi(x, y)=h \qquad [6]$$

estarán á la distancia h del plano de las xy, y formarán por lo general una curva que se proyectará sobre este en su verdadero tamaño; luego la ecuacion [6] representará esta proyeccion. Dando á z valores continuos, es decir, haciendo que z varie de una manera continua, se tendrá una curva que tambien variará de un modo continuo, y que por consiguiente engendrará una superficie que estará representada por la ecuacion [5].

Asi es que *toda ecuacion con tres variables representa una superficie.*

Debemos añadir que si al resolver la ecuacion [4] resultasen varios valores de z

$$z=\varphi(x, y), \quad z=\psi(x, y)\ldots\ldots,$$

la superficie se compondria de tantas *hojas* como valores tuviera z.

RECÍPROCAMENTE, *toda superficie está representada por una ecuacion que contiene en general tres variables;* porque escepto en el caso de una superficie cilíndrica paralela á uno de los ejes, la z de un punto estará determinada cuando se den las otras dos variables; luego z será una funcion de x y de y, y la superficie podrá ser representada por

$$z=\varphi(x,y)$$

ó lo que viene á ser lo mismo, por

$$f(x,y,z)=0.$$

420. Significacion de las ecuaciones simultáneas. — Si cada una de las dos ecuaciones

$$f(x,y,z)=0 \qquad [1],$$

$$\varphi(x,y,z)=0 \qquad [2],$$

representa una superficie, las dos reunidas representarán todos los puntos comunes á estas dos superficies, es decir, una línea.

Recíprocamente: como toda línea se puede considerar la interseccion de dos superficies se la podrá representar de una infinidad de maneras por dos ecuaciones simultáneas.

EJEMPLOS. 1.º Las ecuaciones $z=0$,

$$ax+by=c$$

representan, la primera el plano de las xy, la segunda un plano paralelo al eje de las z (**417**, 2.º), y las dos reunidas una recta situada en el plano de las xy.

2.º Las $z=\alpha$,

$$ax+by=c$$

representan la interseccion de un plano paralelo al de las xy con otro paralelo al eje de las z; es decir, una recta paralela al plano de las xy.

3.º $z=\alpha$

representa un plano paralelo al de las xy;

$$(x-x')^2+(y-y')^2=R^2$$

un cilindro de base circular, cuya generatriz es paralela al eje de las z, y las dos juntas una circunferencia de círculo paralela al plano de las xy.

Observaciones. I. Si $f(x, y, z) = 0$ es la ecuacion de una superficie,

$$f(x, y, 0) = 0$$

será la de la interseccion de esta superficie y del plano xy referida á estos ejes, ó en otros términos, representará la *traza* de la superficie considerada sobre el plano de las xy.

En general, $$f(x, y, \alpha) = 0$$

será la ecuacion de la interseccion del plano $z = \alpha$ y de la superficie representada por

$$f(x, y, z) = 0.$$

II. Entre la infinidad de superficies que se puede hacer pasar por una línea dada será casi siempre lo mas ventajoso elegir dos cilíndricas, paralela cada una de ellas á uno de los ejes, y entonces se representará la línea por dos ecuaciones con dos variables.

Además, si se da una línea por dos ecuaciones conteniendo las tres variables, eliminando sucesivamente una de ellas se obtendrá las ecuaciones de dos cilindros que pasarán por la línea considerada, y cuyas generatrices serán respectivamente paralelas á dos de los ejes coordenados.

Mas generalmente, toda combinacion de dos ecuaciones de la línea podrá reemplazar á una de ellas.

421. Lo mismo que dos ecuaciones representan la interseccion de dos superficies, tres ecuaciones representan la interseccion de tres superficies, es decir, uno ó varios puntos, y volvemos así á una nocion establecida al principio de este capítulo.

La interseccion de una línea con una superficie se obtendrá considerando como simultáneas las ecuaciones de la línea y de la superficie.

422. Aplicaciones. Para aclarar las ideas generales que preceden vamos á aplicarlas en algunos ejemplos.

Ecuaciones de la línea recta. —A no ser que una línea recta sea paralela al plano xy se podrá siempre imaginar dos planos que la contengan; el uno paralelo al eje de las y, y el otro al de las x, y que tendrán respectivamente por ecuaciones (417, II)

$$\left.\begin{array}{l} x=az+p \\ y=bz+q \end{array}\right\} \qquad [1],$$

y estas serán las de la recta considerada.

Si la recta fuese paralela al plano de las xy, los dos planos de que acabamos de hablar se confundirían en uno solo representado por una ecuacion de la forma

$$z=\alpha;$$

pero tirando otro paralelo al eje de las z se tendría una segunda ecuacion

$$ax+by=c,$$

que reunida á la primera determinaría completamente la posicion de la recta.

Por consiguiente, *toda recta se puede representar por dos ecuaciones con una ó dos variables; y* RECÍPROCAMENTE, *dos ecuaciones con una ó dos variables representan una recta*, porque sabemos que semejantes ecuaciones representan siempre planos, y que por lo tanto su reunion espresa la interseccion de los dos planos, es decir, una línea recta.

Mas generalmente; *dos ecuaciones de primer grado con tres variables* representan una recta, porque eliminando sucesivamente x é y entre ellas se llega á dos ecuaciones que no contiene cada una mas que dos variables.

423. Las mas veces pondrémos las ecuaciones de una recta bajo la forma

$$\left.\begin{array}{l} x=az+p \\ y=bz+q \end{array}\right\} \qquad [1],$$

y es importante fijar bien la significacion de las constantes que entran en ellas.

Pero haciendo $z=0$ se tiene

$$x=p\,,\quad y=q\,,$$

lo que nos dice que estas constantes son las coordenadas del punto en que la recta corta al plano de las xy. La ecuacion

$$x=az+p$$

representa la proyeccion de la recta sobre el plano de las xz hecha paralelamente al eje de las y, y la

$$y=bz+q$$

la proyeccion sobre el plano de las yz hecha paralelamente al eje de las x; lo que manifiesta la significacion de las constantes a y b, que son los coeficientes angulares de las proyecciones de la recta sobre los planos de las xz y de las yz.

Para obtener la proyeccion de la recta sobre el plano xy bastará eliminar z entre las dos ecuaciones (1), lo que dará

$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}.$$

124. Ecuacion del plano. — Sean OD $=\delta$ (fig. 173) la perpendicular bajada desde el orígen sobre el plano; α, β, γ los ángulos formados por OD con los ejes; y M un punto del plano: tirando MP paralela á OZ y terminada en el plano XOY, y PQ paralela á OY terminada en OX, tendrémos

Fig. 173.

$$OQ=x,\quad PQ=y,\quad MP=z;$$

y si proyectamos sobre OD la línea poligonal OQPMD por ser cero la proyeccion de MD sobre OD á causa de su perpendicularidad, se verificará

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\delta;$$

y como esta relacion tiene lugar entre las coordenadas de un punto cualquiera del plano, le representa; luego *la ecuacion de un plano es de primer grado*.

Recíprocamente, *toda ecuacion de primer grado representa un plano*. En efecto, sea

$$Ax + By + Cz = D \qquad [S]$$

una ecuacion de primer grado; tomemos dos puntos sobre la superficie que determina, y unámoslos por una recta: esta línea podrá representarse por las dos ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{array}\right\} \qquad [D];$$

y segun nuestra misma hipótesis las ecuaciones [S] y [D] quedarán satisfechas por dos sistemas de valores de x, y y z. Pero como ya sabemos que tres ecuaciones de primer grado que admitan dos soluciones comunes tienen iguales todas las demás, se deduce que todo punto situado sobre la recta [D] está sobre la superficie [S]; luego esta superficie es un plano, puesto que goza de la propiedad de contener entera toda recta tirada por dos de sus puntos.

425. Ecuacion de la esfera. — Si (a, b, c) es el centro y R el radio, y tomamos un sistema cualquiera de ejes, la ecuacion

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + 2(y-b)(z-c)\cos\lambda$$
$$+ 2(x-a)(z-c)\cos\mu + 2(x-a)(y-b)\cos\nu = R^2 \qquad (1)$$

representará la superficie esférica, porque espresa que la distancia de un punto cualquiera (x, y, z) de la superficie al centro (a, b, c) es constante é igual á R (415).

Cuando sean rectangulares los ejes serán

$$\cos\lambda = 0, \quad \cos\mu = 0, \quad \cos\nu = 0,$$

y se reducirá la ecuacion á

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Si además tomamos el centro por origen, es decir, si

$$a=0, \quad b=0, \quad c=0,$$

la ecuacion toma la forma mas sencilla

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Esta última es la mas cómoda para estudiar analíticamente las propiedades de la esfera.

Como esta ecuacion no varía cuando se cambia el signo de una de las coordenadas, se deduce que la superficie representada es simétrica con relacion á cada uno de los tres planos coordenados.

Cuando se cambia á la vez x en $-x$, y en $-y$ y z en $-z$, la ecuacion queda la misma; luego los puntos de la superficie son simétricos de dos en dos con relacion al origen, ó en otros términos, el origen divide en dos partes iguales todas las rectas que pasando por él terminan en la superficie.

Dando á z un valor constante α, la ecuacion que se obtiene

$$x^2+y^2=R^2-\alpha^2 \qquad [2]$$

representa la proyeccion sobre el plano xy de la interseccion del $z=\alpha$ con la superficie; y como dicha interseccion es paralela al plano xy, se proyecta en su verdadera magnitud, y resulta que la interseccion de la superficie con un plano paralelo á uno de los coordenados es un círculo.

La ecuacion [2] es imposible cuando se supone que $\alpha^2>R^2$, es decir, $\alpha>R$ ó $<-R$, de donde se deduce que toda la superficie está comprendida entre dos planos paralelos al de las xy tirados á un lado y otro de este plano y á una distancia igual á R.

Estos ejemplos bastan para demostrar que cuando se conoce la definicion de una superficie se puede obtener su ecuacion; ó inversamente que una vez conocida esta se pueden deducir de ella sus propiedades; que es el solo objeto que nos proponiamos en este instante.

426. **Representacion geométrica de las funciones de dos variables.** — Si se considera la funcion propuesta y sus dos variables como las coordenadas de un punto, se obtendrá una superficie, cuya forma nos dará una idea clara de los diferentes estados

por los cuales pasa la funcion; sin embargo, como la ejecucion de una superficie en relieve es mas difícil que el trazado de una curva se comprende que la representacion de las funciones de dos variables sea menos frecuente que la de las funciones de una sola variable: así es que no se hace generalmente la construccion, y sirve únicamente para concebir bien ciertas leyes complicadas.

Algunas veces se representa la funcion por una distancia contada á partir de un cierto orígen: en este caso se asemejan las dos variables a la x y á la y del estremo de esta distancia; y en cuanto á la tercer coordenada será una consecuencia de las otras dos, porque de las dos relaciones

$$R=f(x,y), \quad R^2=x^2+y^2+z^2$$

se podrá sacar por la eliminacion de R un valor de z en funcion de x y de y. El lugar de los estremos de la recta R representará la funcion dada; y si la superficie que se obtiene de esta manera es conocida por los geómetras y ha sido estudiada detalladamente, cada una de las propiedades que se conozca dará sin cálculo y de una manera intuitiva una propiedad correspondiente á la funcion. Vamos á dar un ejemplo de esto.

Las fuerzas elásticas aplicadas en un punto de un cuerpo sólido, y que obran sobre los diferentes elementos planos tirados por este punto, están sujetos á una ley muy sencilla. Si F y F′ son dos de estas fuerzas, y N y N′ las normales á los planos sobre que obran, la proyeccion de F sobre N′ debe ser igual á la de F′ sobre N. Esta ley permite, como vamos á ver, la determinacion de todas las fuerzas elásticas en número infinito, que están aplicadas en un mismo punto, cuando se conocen tres de entre ellas y los planos sobre que obran.

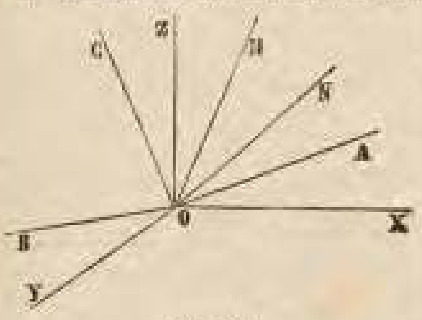


Fig. 171

En efecto, supongamos que $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ (fig. 171) representen las magnitudes y direcciones de tres fuerzas elásticas que obran sobre tres planos rectangulares YOZ, XOZ, XOY que tomarémos por coordenadas; y llamemos $\left.\begin{matrix} a' & a'' & a''' \\ b''' & b' & b'' \\ c'' & c''' & c' \end{matrix}\right\}$ las proyecciones de las rectas $\left\{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right.$

sobre los ejes de las x, y, z,

y e, f, g,

los cosenos de los ángulos que la recta ON forma con los ejes; y suponiendo que sean OM una cualquiera de las fuerzas, y ON la normal al plano sobre que obra, propongámonos hallar el lugar de los puntos M.

La proyeccion de OA sobre ON es igual á la suma de las de a', a'', a''' sobre la misma ON; y así, teniendo presente la ley admitida, se hallará

$$x = a'e + a''f + a'''g \qquad [1],$$

y de la misma manera

$$y = b'''e + b'f + b''g \qquad [2],$$

$$z = c''e + c'''f + c'g \qquad [3].$$

Pero en virtud de un teorema conocido, se tiene

$$e^2 + f^2 + g^2 = 1 \qquad [4],$$

y eliminando e, f, g entre estas cuatro ecuaciones, hallarémos la relacion buscada entre x, y y z, ó sea la ecuacion de la superficie.

Para hacer la eliminacion, empezarémos por resolver las tres primeras, lo que nos dará

$$\frac{e}{P} = \frac{f}{Q} = \frac{g}{R} = \frac{1}{D} \qquad [5],$$

haciendo para abreviar

$$D = a'b'c' + a''b''c'' + a'''b'''c''' - a'b''c''' - a''b'''c' - a'''b'c'',$$

$$P = (b'c' - b''c''')x + (a'''c''' - a''c')y + (a''b'' - a'''b')z$$

$$Q = (b''c'' - b'''c')x + (a'c' - a'''c'')y + (a'''b''' - a'b'')z$$

$$R = (b'''c''' - b'c'')x + (a''c'' - a'c''')y + (a'b' - a''b''')z.$$

De la [5] se saca $\dfrac{e^2}{P^2} = \dfrac{f^2}{Q^2} = \dfrac{g^2}{R^2} = \dfrac{e^2+f^2+g^2}{P^2+Q^2+R^2} = \dfrac{1}{D^2}$,

ó teniendo en cuenta la ecuacion [4],

$$P^2 + Q^2 + R^2 = D^2,$$

que es la ecuacion buscada. Desarrollando P^2, Q^2, R^2 se ve que es de segundo grado y que representa, como verémos mas tarde, una superficie llamada elipsóide. La ecuacion se simplifica mucho cuando se supone que las fuerzas a, b, c están dirigidas segun los ejes, pues se reduce entonces à

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2,$$

ó

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (*).$$

(*) Véase la obra notable publicada por Mr. Lamé: *Lecciones sobre la teoría matemática de la elasticidad de los cuerpos sólidos.*

CAPÍTULO III.

TRANSFORMACION DE LAS COORDENADAS.

427. Utilidad de la transformacion de las coordenadas. — La ecuacion de una superficie depende del sistema de ejes á que se halle referida, y es mas ó menos sencilla segun la eleccion de estos ejes. Así es que la esfera tiene por ecuacion en el caso mas general

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+2(y-b)(z-c)\cos\lambda$$

$$+2(z-c)(x-a)\cos\mu+2(x-a)(y-b)\cos\nu=R^2,$$

pero está representada simplemente por

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

cuando se toman ejes rectangulares y se coloca el origen en el centro.

La ecuacion del plano es

$$Ax+By+Cz+D=0$$

en un sistema cualquiera; pero se reduce á

$$z=a$$

cuando este plano es paralelo al de las xy; y aun se reduce á la forma mas sencilla

$$z=0$$

si los ejes de las x y de las y se toman en el plano propuesto.

Una línea que está determinada por la interseccion de dos superficies quedará representada por dos ecuaciones mas ó menos simples, segun el sistema de ejes que se haya elegido.

Estos ejemplos bastan para demostrar que puede ser muy ventajoso sustituir la ecuacion de una superficie referida á ciertos ejes por otra de la misma superficie referida á otros ejes. El problema se reduce evidentemente á espresar las coordenadas de un punto considerado en el antiguo sistema en funcion de sus coordenadas en el nuevo, y sustituir estos valores en la ecuacion propuesta.

Para mas claridad supondrémos que no se cambian de una vez todos los elementos del sistema, sino que primero lo hace el origen, permaneciendo los ejes en la misma direccion, y que despues conservando el nuevo origen se hace variar solamente la direccion de los ejes.

428. Primera transformacion. Cambio del origen.—Sean O y O' (fig. 175) los dos orígenes; x, y, z; x', y', z' las coordenadas de un punto M en los dos sistemas; y α, β, γ las del punto O' con relacion á los primitivos ejes.

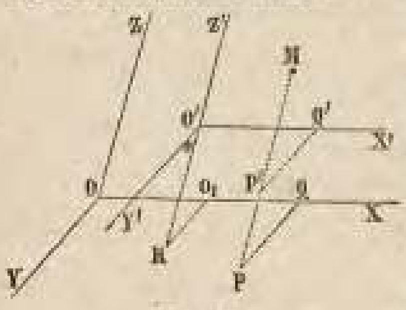


Fig. 175.

Como se puede considerar que x y x' son las abscisas de un punto Q situado sobre OX y referido á los dos orígenes, que son el primitivo O y el O_1 interseccion del plano Y'O'Z' y del eje OX, cuyo punto tiene α por abscisa con relacion al punto O, se verificará, en virtud de la fórmula hallada para cambiar de orígen sobre una recta, $x=x'+\alpha$, cualquiera que sea además la magnitud y el signo de α. Los valores de y y z se obtendrán por una consideracion análoga; y así se pasará de un sistema á otro paralelo por medio de las fórmulas

$$\left.\begin{array}{l} x=x'+\alpha \\ y=y'+\beta \\ z=z'+\gamma \end{array}\right\} \qquad [O].$$

Ejemplo. Si la ecuacion dada es

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z=3,$$

y trasladamos el origen al punto cuyas coordenadas sean

$$\alpha=2,\quad \beta=1,\quad \gamma=1,$$

será necesario hacer $x=x'+2$, $y=y'+1$, $z=z'+1$,

y sustituyendo estos valores en la ecuacion se tendrá

$$x'^2+y'^2+z'^2=9,$$

que es la de una esfera cuyo centro está en el nuevo órigen, y cuyo radio es de tres unidades.

429. Como las ecuaciones [O] encierran tres constantes α, β, γ, cuando estas no sean conocidas se las puede determinar de manera que la ecuacion transformada satisfaga á ciertas condiciones señaladas anteriormente, como faltarle ciertos términos ú ofrecer entre sus coeficientes algunas relaciones dadas.

Ejemplo. Se pide el punto en que se deba colocar el origen para que desaparezcan los términos de primer grado de la ecuacion

$$x^2+y^2+z^2-8x-6y-4z=33.$$

Sustituyendo los valores [O], la ecuacion se transforma en

$$x'^2+y'^2+z'^2+2(\alpha-4)x'+2(\beta-3)y'+2(\gamma-2)z'+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=33,$$

y se ve que los términos de primer grado desaparecen tomando $\alpha=4$, $\beta=3$, $\gamma=2$ y entonces la ecuacion se reduce á

$$x'^2+y'^2+z'^2=4,$$

que representa una esfera.

430. Segunda transformacion. Cambiar la direccion de los ejes conservando el mismo origen. — Subdividirémos este caso en otros varios, pero darémos antes á conocer algunas notaciones comunes.

Notaciones. Los ejes primitivos estarán siempre representados por OX, OY, OZ, y las partes positivas de los nuevos por OX', OY', OZ'. El ángulo de dos ejes, ó segun nuestro convenio el de las partes positivas de los dos ejes, será designado por las variables relativas á estos ejes: así (x', x) designará el ángulo que el eje de las x' forme con el de las x. Harémos además con objeto de simplificar los cálculos

$$a=\cos(x', x),\quad a'=\cos(x', y),\quad a''=\cos(x', z);$$

$$b=\cos(y', x),\quad b'=\cos(y', y),\quad b''=\cos(y', z);$$

$$c=\cos(z', x),\quad c'=\cos(z', y),\quad c''=\cos(z', z).$$

1.° *Pasar de un sistema de ejes rectangulares á otro cualquiera.*

Si se proyecta sobre el eje OX (fig. 176) la recta OM se obtendrá el mismo resultado que proyectando el contorno OQ'P'M polígono de las coordenadas del punto M en el nuevo sistema; pero la proyeccion de OM sobre OX es x, y las de los tres lados del polígono OQ'P'M son $x'\cos(x', x)$, $y'\cos(y', x)$, $z'\cos(z' x)$, ó ax', by', cz'; luego se tendrá

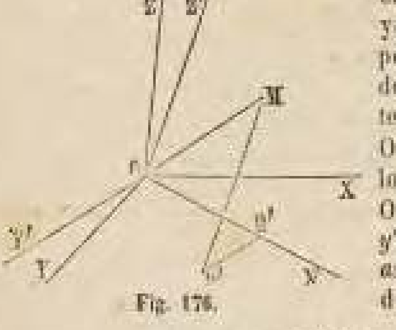


Fig. 176.

y del mismo modo
$$\left.\begin{aligned} x&=ax'+by'+cz' \\ y&=a'x'+b'y'+c'z' \\ z&=a''x'+b''y'+c''z' \end{aligned}\right\} \qquad [R, C],$$

que son las fórmulas pedidas. Estas son generales, porque si la abscisa x' fuese negativa en lugar de ser positiva, como se supone en la figura, entonces estaria recorrida en sentido opuesto á las x positivas, y tendria por proyeccion su valor absoluto $-x'$ multiplicado por el coseno del ángulo que las x' *negativas* forman con las x positivas, es decir, por $-\cos(x', x)$; pero $-x'$ multiplicado por $-\cos(x', x)$ da $x'\cos(x', x)$ ó ax'.

Observacion. Estas fórmulas se simplifican considerablemente cuando no se cambia mas que uno de los ejes, el de las x por ejemplo; porque entonces se tiene

$$b=\cos(y', x)=0, \quad b'=\cos(y', y)=1, \quad b''=\cos(y', z)=0,$$

$$c=\cos(z', x)=0, \quad c'=\cos(z', y)=0, \quad c''=\cos(z', z)=1,$$

y las fórmulas se convierten en

$$x=ax',$$

$$y=a'x'+y',$$

$$z=a''x'+z'.$$

Ejemplo. La ecuacion

$$x^2+3y^2-4xz-yz-4xy=20$$

representa una superficie referida á ejes rectangulares, y se quiere referirla á otros ejes determinados por los valores siguientes:

$$a=\text{[illegible]},\quad a'=\text{[illegible]},\quad a''=\text{[illegible]},$$

$$b=\text{[illegible]},\quad b'=\text{[illegible]},\quad b''=\text{[illegible]},$$

$$c=\text{[illegible]},\quad c'=\text{[illegible]},\quad c''=\text{[illegible]}.$$

Se observará que los tres cosenos situados en una misma línea, y que representan los ángulos que una misma recta forma con tres ejes rectangulares, son tales que la suma de sus cuadrados es igual á 1. Bajo este supuesto será necesario hacer uso de las fórmulas de transformacion

$$x=\text{[illegible]}\,x'+\text{[illegible]}\,y'+\text{[illegible]}\,z'$$

$$y=\text{[illegible]}\,x'+\text{[illegible]}\,y'+\text{[illegible]}\,z',$$

$$z=\text{[illegible]}\,x'+\text{[illegible]}\,y'+\text{[illegible]}\,z';$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion de la superficie, se hallará

$$x'^2+\text{[illegible]}\,y'^2+z'^2+\text{[illegible]}\,y'z'+\text{[illegible]}\,x'z'+\text{[illegible]}\,x'y'+20=0.$$

431. 2.° *Pasar de un sistema de ejes rectangulares á otro de la misma especie.* Las fórmulas son todavía

$$\left.\begin{aligned} x&=ax'+by'+cz'\\ y&=a'x'+b'y'+c'z'\\ z&=a''x'+b''y'+c''z' \end{aligned}\right\}\qquad [R, R'];$$

pero hay que tener además en cuenta las relaciones

$$\left.\begin{aligned} a^2+a'^2+a''^2&=1\\ b^2+b'^2+b''^2&=1\\ c^2+c'^2+c''^2&=1 \end{aligned}\right\}\qquad [1],$$

que espresan que los primeros ejes son rectangulares, y las siguientes nacidas de que el coseno del ángulo formado por dos ejes del segundo sistema es nulo

$$\left.\begin{aligned} ab+a'b'+a''b''&=0\\ ac+a'c'+a''c''&=0\\ bc+b'c'+b''c''&=0 \end{aligned}\right\}\qquad [2];$$

de modo que existen seis relaciones entre los nueve cosenos

a, a'......, etc.: por lo tanto, no hay mas que tres arbitrarias, lo que tambien se puede demostrar *á priori*. En efecto, el eje de las x' está determinado por los ángulos (x', x) y (x', y) que forma con dos de los ejes primitivos; y debiendo hallarse el eje de las y en un plano perpendicular al de las x', bastará para obtenerle conocer el ángulo (y', x) que forma con el eje de las x; y en fin estando los dos primeros ejes determinados, el tercero lo está completamente, pues debe ser perpendicular al plano de los dos primeros; de modo que no se puede sujetar mas que á tres condiciones distintas el nuevo sistema.

OBSERVACIONES. I. Para pasar del nuevo sistema al antiguo se observará que a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' son los cosenos de los ángulos que los ejes antiguos forman con los nuevos, y que por lo tanto se tendrá

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + a'y + a''z \\ y' &= bx + b'y + b''z \\ z' &= cx + c'y + c''z \end{aligned}\right\} \qquad [R', R],$$

fórmulas que llevan consigo las ecuaciones de condicion

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

$$\left.\begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0 \\ aa'' + bb'' + cc'' &= 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [4].$$

II. Como tres de las nueve constantes a, a', etc., son arbitrarias, las ecuaciones [3] y [4] no pueden formar un sistema distinto del de las [1] y [2], sino que deben ser una consecuencia de este último; y en efecto nos podemos convencer de ello por las transformaciones siguientes:

Elevando al cuadrado las ecuaciones [R, R'], y teniendo en cuenta las ecuaciones [1] y [2], se hallará

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Haciendo lo mismo con las ecuaciones [R', R], se tendrá

$$x'^2+y'^2+z'^2=\left\{\begin{array}{l}(a^2+b^2+c^2)\,x^2+2\,(a'a''+b'b''+c'c'')\,yz\\+(a'^2+b'^2+c'^2)\,y^2+2\,(aa''+bb''+cc'')\,xz\\+(a''^2+b''^2+c''^2)\,z^2+2\,(aa'+bb'+cc')\,xy;\end{array}\right.$$

pero debiendo ser el segundo miembro igual á $x^2+y^2+z^2$, cualquiera que sean las indeterminadas x, y, z, se ve que para que esto se verifique necesitan verificarse al mismo tiempo las ecuaciones [3] y [4].

432 3.° *Pasar de un sistema cualquiera de ejes á otro.* Tiremos las rectas ON, ON', ON" respectivamente perpendiculares á los planos YOZ, XOZ, XOY que esté cada una situada hácia el lado positivo del eje que no se halle en este plano; y designemos por (N, x), (N, x'), etc., los ángulos que estas rectas forman con las partes positivas de los ejes considerados.

Proyectando sobre ON los polígonos de las coordenadas OQPM, OQ'P'M, que tienen los mismos estremos, se hallará la misma proyeccion; pero como y y z son perpendiculares á ON, la proyeccion del primer contorno se reducirá á $x\cos(N, x)$, y se tendrá

$$\left.\begin{array}{l}x\cos(N, x)=x'\cos(N, x')+y'\cos(N, y')+z'\cos(N, z'),\\ \text{y del mismo modo}\\ y\cos(N', y)=x'\cos(N', x')+y'\cos(N', y')+z'\cos(N', z')\\ z\cos(N'', z)=x'\cos(N'', x')+y'\cos(N'', y')+z'\cos(N'', z')\end{array}\right\}\ [\mathrm{C}, \mathrm{C}'].$$

Estas fórmulas se emplean muy poco, porque son muy complicadas. Se verá fácilmente que comprenden las fórmulas [R, C] y [R, R'].

433. **Transformacion general.** — Para cambiar á la vez el origen y la direccion de los ejes será necesario combinar las fórmulas [O] y [C, C'], con lo que se tendrá

$$\left.\begin{array}{l}x=\alpha+ax'+by'+cz'\\ y=\beta+a'x'+b'y'+c'z'\\ z=\gamma+a''x'+b''y'+c''z'\end{array}\right\}\qquad [\mathrm{G}],$$

en las cuales $\quad a=\dfrac{\cos(N, x')}{\cos(N, x)},\quad b=\dfrac{\cos(N, y')}{\cos(N, x)},$ etc.

OBSERVACIONES. I. Como los valores de x, y, z sacados de las ecuaciones (G) son de primer grado en x', y', z', sustituyéndolos en otra no pueden elevar su grado; pero tampoco puede rebajarlo, porque entonces al volver del nuevo sistema de ejes al antiguo tendria que elevarse. Esto hace ver que el grado de una ecuacion es un carácter permanente de la superficie que representa; es decir, un carácter que subsiste cualquiera que sea el sistema de ejes adoptados. Se le puede, pues, tomar por fundamento de una clasificacion de las superficies algebráicas, análoga á la que hicimos de las líneas en la *Geometría analítica de dos dimensiones*. Por esto dirémos que una superficie algebráica es del grado m ó del órden m cuando la ecuacion que la representa sea del grado m.

II. Para hallar la interseccion de una recta con una superficie del grado m es necesario combinar dos ecuaciones de primer grado con una del grado m; pero el sistema que resulta no puede admitir mas que m soluciones; luego:

Una línea recta no puede encontrar á una superficie del grado m en mas de m puntos.

III. Para tener la interseccion de una superficie del órden m con un plano bastará tomar este plano por el de las $x'y'$, y hacer $z'=0$ en la ecuacion transformada; y como esta ecuacion será tambien del grado m:

La interseccion de una superficie del órden m con un plano es una curva que no puede pasar del órden m.

De aquí resulta que si la interseccion de dos superficies es plana no podrá ser de un órden superior al de la superficie cuya ecuacion tenga el grado menos elevado.

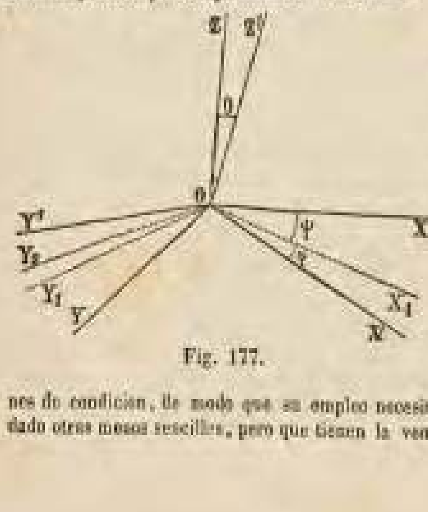


Fig. 177.

434. Fórmulas de Euler.—Las fórmulas (R, R') tienen el inconveniente de encerrar nueve constantes, entre las cuales existen seis ecuaciones de condicion, de modo que su empleo necesita eliminaciones penosas. Euler ha dado otras menos sencillas, pero que tienen la ventaja de no contener mas que tres constantes, número suficiente para fijar la posicion del segundo sistema con relacion al primero.

Estas constantes son :

1.° El ángulo ψ que la traza OX_1 (fig. 177) del plano $X'OY'$ sobre el plano XOY forma con el eje de las X ; 2.° el ángulo θ de los planos XOY y $X'OY'$ que está determinado por las partes positivas de las normales OZ, OZ' á estos planos ; y 3.° el φ de OX_1 con la parte positiva del eje de las x'.

Bajo este supuesto se pasará del sistema propuesto al nuevo por tres cambios sucesivos que, teniendo comun con el sistema precedente un eje y el plano opuesto, no exigirán mas que las fórmulas correspondientes al cambio de *ejes situados en el mismo* plano.

1.° Se hace que los dos ejes OX, OY giren en su plano hasta formar un ángulo igual á ψ, y se obtiene el sistema OX_1, OY_1. Si x_1, y_1 y z son las coordenadas de un punto en este nuevo sistema, se tendrá entre x_1, y_1, y x é y las relaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \cos\psi - y_1 \operatorname{sen}\psi \\ y &= x_1 \operatorname{sen}\psi + y_1 \cos\psi \end{aligned}\right\} \qquad [1].$$

2.° Se hará girar en su plano á los dos ejes OY_1 y OZ, hasta que formen un ángulo igual á θ, lo que hará tomar al eje OZ la posicion OZ' y al OY_1 la OY_2, se pasará de las coordenadas x_1, y_1, z del sistema precedente á las x_1, y_2, z' del nuevo por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_2 \cos\theta - z' \operatorname{sen}\theta \\ z &= y_2 \operatorname{sen}\theta + z' \cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad [2].$$

3.° Haciendo formar en su plano un ángulo φ á los dos ejes OY_2 y OX_1 quedará OX_1 en OX' y OY_2 en OY', y las fórmulas de transformacion serán

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x' \cos\varphi - y' \operatorname{sen}\varphi \\ y_2 &= x' \operatorname{sen}\varphi + y' \cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad [3].$$

La eliminacion de x_1, y_1, y_2 entre las ecuaciones [1], [2], [3] dará las fórmulas siguientes, que son las de Euler :

$$\left.\begin{aligned} x &= x'(\cos\psi\cos\varphi - \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta) \\ &\quad + y'(-\cos\psi\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\psi\cos\varphi\cos\theta) \\ &\quad + z'\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi \\ y &= x'(\operatorname{sen}\psi\cos\varphi + \cos\psi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta) \\ &\quad + y'(-\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta) \\ &\quad - z'\operatorname{sen}\theta\cos\psi \\ z &= x'\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + y'\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + z'\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad [4].$$

La comparacion de estas fórmulas con las (R, R') permite espresar los nueve cosenos en funcion de las líneas trigonométricas de los ángulos auxiliares ; pues se tendrá

$$
\begin{aligned}
a &= \cos\psi\cos\varphi - \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\
b &= -\cos\psi\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\psi\cos\varphi\cos\theta \\
c &= \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi \\
a' &= \operatorname{sen}\psi\cos\varphi + \cos\psi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\
b' &= -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta \\
c' &= -\operatorname{sen}\theta\cos\psi \\
a'' &= \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\
b'' &= \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\
c'' &= \cos\theta.
\end{aligned}
$$

OBSERVACIONES. I. Se puede pasar del valor de a al de b, de a' á b' y de a'' á b'', cambiando φ en $\varphi + \frac{\pi}{2}$; del de b á c, de b' á c', de b'' á c'', haciendo $\varphi = 0$ y cambiando θ en $\theta + \frac{\pi}{2}$; de a á a' cambiando ψ en $\frac{\pi}{2} - \psi$ y φ en $\pi + \varphi$, y de a' á a'' haciendo $\varphi = 0$ y cambiando θ en $\frac{\pi}{2} - \theta$.

II. Los ángulos θ, φ, ψ se determinan en funcion de algunos cosenos por las fórmulas siguientes, que merecen ser notadas

$$\cos\theta = c'', \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{a''}{b''}, \quad \operatorname{tang}\psi = -\frac{c}{c'}.$$

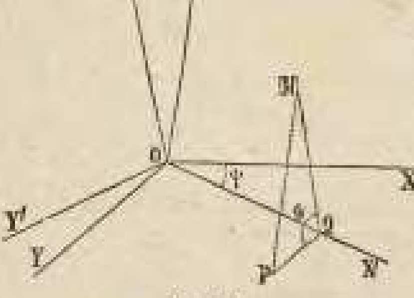


Fig. 178

435. Fórmulas para las secciones planas. — Las fórmulas de Euler pueden servir para hallar la seccion hecha por un plano en una superficie; pues conservando las mismas notaciones basta con tomar OX_1 (fig. 177) por eje de las x, y por el de las y una perpendicular á OX_1 tirada en el plano secante, y hacer en las fórmulas [E],

$$\varphi = 0, \quad z' = 0.$$

Pero se puede hacer directamente de la manera que sigue:

Sean $M(x, y, z)$ (fig. 178) un punto de la seccion considerada, y OX' la traza del plano secante sobre el XOY, y además

$$MP=z, \quad MQ=y', \quad PQ=y'', \quad OQ=x'; \quad PQM=\theta, \; XOX'=\psi.$$

Las coordenadas del punto P son x é y, y serán x' é y'' si se hace girar al sistema de los ejes OX y OY un ángulo ψ. Segun esto se tendrá

$$x=x'\cos\psi-y''\operatorname{sen}\psi,$$

$$y=x'\operatorname{sen}\psi+y''\cos\psi;$$

mas como el triángulo MPQ da

$$y''=y'\cos\theta, \quad z=y'\operatorname{sen}\theta,$$

las fórmulas buscadas serán

$$\left.\begin{array}{l} x=x'\cos\psi-y'\operatorname{sen}\psi\cos\theta \\ y=x'\operatorname{sen}\psi+y'\cos\psi\cos\theta \\ z=y'\operatorname{sen}\theta \end{array}\right\} \qquad (SP).$$

Observacion. Se ha supuesto que el plano secante pasa por el orígen, condicion que se puede siempre satisfacer trasladando el orígen á este plano.

Ejemplos. I. Si la superficie tiene por ecuacion en coordenadas rectangulares

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1,$$

y se toma un plano secante inclinado 30° sobre el de las xy, y cuya traza sobre este forme con OX un ángulo de 45°, se tendrá

$$\operatorname{sen}\psi=\cos\psi=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}; \quad \operatorname{sen}\theta=\tfrac{1}{2}, \quad \cos\theta=\tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

y las fórmulas de transformacion serán para este caso

$$x=\tfrac{1}{2}x'\sqrt{2}-\tfrac{1}{4}y'\sqrt{6}$$

$$y=\tfrac{1}{2}x'\sqrt{2}+\tfrac{1}{4}y'\sqrt{6}$$

$$z=\tfrac{1}{2}y'.$$

La sustitucion de estos valores conduce á la ecuacion

$$x'^2+\frac{13}{16}y'^2=1,$$

que representa una elipse.

II. Se quiere saber si la superficie representada por la ecuacion

$$\left(\frac{x}{1}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^2=1$$

puede ser cortada segun un círculo por un plano tirado por el orígen.

Sustituyendo en esta ecuacion los valores de x, y, z dados por las fórmulas (SP), se tendrá

$$x'^2\left(\cos^2\psi+\frac{\operatorname{sen}^2\psi}{9}\right)+y'^2\left(\operatorname{sen}^2\psi\cos^2\theta+\frac{\cos^2\psi\cos^2\theta}{9}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{4}\right)$$

$$-\tfrac{16}{9}x'y'\operatorname{sen}\psi\cos\psi\cos\theta=1.$$

Pero ahora es necesario que el término en $x'y'$ desaparezca, lo que se puede hacer suponiendo que una de las tres espresiones

$$\operatorname{sen}\psi,\quad \cos\psi,\quad \cos\theta$$

sea cero. Si se supone $\operatorname{sen}\psi=0$, el coeficiente de x'^2 es la unidad; y como el de y'^2 debe serle igual, se tendrá

$$\frac{\cos^2\theta}{9}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{4}=1,$$

de donde se saca $-5\cos^2\theta=27$, ecuacion absurda. Se vería de la misma manera que no se puede suponer $\cos\psi=0$. Pero suponiendo $\cos\theta=0$ los coeficientes de los cuadrados resultan iguales haciendo

$$\cos^2\psi+\frac{\operatorname{sen}^2\psi}{9}=\frac{1}{4},$$

lo que da

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2\psi=\frac{5}{32}\\ \operatorname{sen}^2\psi=\frac{27}{32}\end{array}\right\},\quad \text{de donde}\quad \operatorname{tang}^2\psi=\tfrac{27}{5},\quad \operatorname{tang}\psi=\pm\sqrt{\tfrac{27}{5}}.$$

Vemos, pues, que hay dos planos que pasan por el eje de las z igualmente inclinados sobre el XOZ que cortan á la superficie segun círculos. Estos dos círculos son iguales y su radio lo es á la unidad de longitud.

CAPÍTULO IV.

DE LA LÍNEA RECTA Y DEL PLANO.

§ I. — Problemas sobre las líneas rectas.

436. Consagrarémos este capítulo á la resolucion de algunos de los problemas que se encuentran mas frecuentemente en las aplicaciones, empezando por los que se refieren á las líneas rectas; pero antes estudiarémos todo lo que es concerniente á la posicion de una recta con relacion á los ejes y á los planos coordenados.

437. Ecuaciones de la línea recta. — De aquí en adelante representarémos siempre una línea recta por dos ecuaciones de la forma

$$\left.\begin{array}{l} x=az+p \\ y=bz+q \end{array}\right\} \qquad (1),$$

en que la una (422) representa la proyeccion de la recta sobre el plano de las xz, y la otra su proyeccion sobre el plano de las yz. La proyeccion sobre el plano de las xy se obtiene fácilmente eliminando z entre las dos ecuaciones anteriores, lo que dará

$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}.$$

Algunas veces es mas cómodo escribir las ecuaciones de la recta bajo la forma

$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=z.$$

Las ecuaciones (1) se simplifican cuando las rectas ocupan ciertas posiciones particulares con relacion á los planos coordenados. Así, cuando pasa por el orígen, p y q son nulos, y las ecuaciones (1) se reducen á las siguientes:

$$x=az,$$

$$y=bz,$$

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=z.$$

Si la recta se confunde con el eje de las z tiene por ecuaciones

$$x=0,$$

$$y=0.$$

El lector debe ejercitarse en buscar las ecuaciones de una recta en todas las posiciones que puede ocupar con relacion á los planos coordenados.

Observacion. Las ecuaciones mas generales de la línea recta contienen cuatro constantes arbitrarias; pero como estas constantes están ligadas por dos ecuaciones, resulta que una recta esta determinada analíticamente por dos condiciones.

438. **Trazas de una recta.** — Dadas las ecuaciones de una recta

$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=z$$

se hallarán sus trazas sobre uno cualquiera de los planos coordenados igualando á cero en estas ecuaciones la variable que se refiera al eje no situado en el plano de que se trate. Así, haciendo $z=0$, se tiene

$$x=p, \quad y=q$$

para las coordenadas de la traza de la recta en el plano de las xy. Las trazas sobre los planos de las yz y de las xz se obtendrán haciendo sucesivamente $x=0$ é $y=0$.

439. Problema. *Conociendo las ecuaciones de una recta hallar en coordenadas rectangulares su distancia al orígen.*

Si
$$\left.\begin{array}{l} x=az+p \\ y=bz+q \end{array}\right\} \qquad (1)$$

son las ecuaciones de la recta, y $M(x', y', z')$ uno de sus puntos, tendrémos (414)

$$OM=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2};$$

y como el punto M está sobre la recta, deberá verificarse que

$$x'=az'+p,$$

$$y'=bz'+q,$$

y por lo tanto reemplazando x' é y' por sus valores

$$\mathrm{OM}=\sqrt{(a^2+b^2+1)z'^2+2(ap+bq)z'+p^2+q^2}.$$

Dando á z' un valor cualquiera, esta fórmula hará conocer la distancia del origen al punto de la recta que determine este valor de z'; y se tendrá la distancia δ del origen á la recta ó la longitud de la perpendicular bajada desde aquel á esta, buscando el valor mínimo de OM. Para hallarlo escribirémos

$$\mathrm{OM}^2=\left(\sqrt{a^2+b^2+1}\,.\,z'+\frac{ap+bq}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right)^2+p^2+q^2-\frac{(ap+bq)^2}{a^2+b^2+1}$$

$$=\left(\sqrt{a^2+b^2+1}\,.\,z'+\frac{ap+bq}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right)^2+\frac{p^2+q^2+(bp-aq)^2}{a^2+b^2+1},$$

por la que se ve que el valor mínimo de $\overline{\mathrm{OM}}^2$, se hallará haciendo

$$z'=-\frac{ap+bq}{a^2+b^2+1},$$

de donde $$\delta=\sqrt{\frac{p^2+q^2+(bp-aq)^2}{a^2+b^2+1}}.$$

Podíamos llegar á los mismos resultados igualando á cero la derivada de OM con relacion á z' (110).

440. Problema. *Conociendo las ecuaciones de una recta en coordenadas rectangulares hallar sus distancias á los ejes.*

Sea α la distancia de la recta al eje de las x. Hallándose α situada en el plano que tiene por ecuacion

$$y=bz+q \qquad [1],$$

y que es paralelo al eje de las x, su distancia á este eje será igual á la que separa su proyeccion sobre el plano de las yz del origen; pero esta proyeccion referida á los ejes OY y OZ está representada por la ecuacion (1); luego queda reducida la cuestion á buscar la distancia del origen á esta recta, lo que, segun una fórmula de la primera parte (76), dará

$$\alpha = \frac{q}{\sqrt{b^2+1}}.$$

Se hallará de una manera análoga

$$\beta = \frac{p}{\sqrt{a^2+1}},$$

$$\gamma = \frac{bp-aq}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

441. PROBLEMA. *Conociendo las ecuaciones de una recta en coordenadas rectangulares determinar los ángulos que la recta forma con los ejes coordenados.*

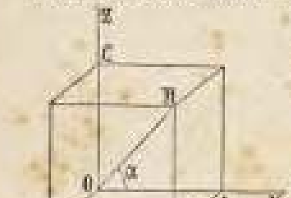


Fig. 179.

Si tiramos por el orígen una paralela OM (fig. 179) á la recta dada reducirémos la cuestion á calcular los ángulos α, β, γ que esta paralela forma con los ejes.

Sean $x=az$, $y=bz$ las ecuaciones de esta paralela, x', y', z' las coordenadas de uno cualquiera M de sus puntos, y se tendrá

$$\cos\alpha = \frac{x'}{\mathrm{OM}} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

y una vez que el punto M está sobre OM se tiene tambien

$$x' = az',$$

$$y' = bz',$$

por lo que sustituyendo estos valores de x' é y' en $\cos\alpha$, y simplificando, resulta

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

Del mismo modo se hallará

$$\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

Tomando el radical con el signo $+$ estas fórmulas harán conocer los ángulos que la porcion de la recta OM situada encima del plano xy forma con las partes positivas de los ejes, y tomándole con el signo $-$ se obtendrán los que la prolongacion de OM forma con las mismas partes positivas de los ejes.

OBSERVACIONES. I. Estas fórmulas verifican la relacion

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

II. Se deduce de ellas

$$a=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\quad b=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma};$$

por lo tanto las ecuaciones de una recta pueden ponerse bajo la forma

$$x=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}z+p,$$

$$y=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}z+q,$$

ó sea
$$\frac{x-p}{\cos\alpha}=\frac{y-q}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma}.$$

442. PROBLEMA. *Dadas las ecuaciones de una recta en coordenadas rectangulares hallar los ángulos que esta recta forma con los planos coordenados.*

Se puede siempre suponer que la recta pasa por el orígen, y en este caso se ve inmediatamente que los ángulos pedidos son los complementos de los que forma con los ejes; luego conservando las mismas notaciones que en el problema precedente, se tendrá

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\ \operatorname{sen}\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\ \operatorname{sen}\gamma=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

443. PROBLEMA. *Hallar las ecuaciones de una recta que pase por un punto dado y sea paralela á una recta dada.*

Busquemos primero las ecuaciones generales de las rectas que pasan por un mismo punto (x', y', z'). Estas han de tener la forma

$$x=az+p,$$

$$y=bz+q,$$

y puesto que pasan por el punto dado debe verificarse que

$$x'=az'+p,$$

$$y'=bz'+q;$$

y si restamos estas ecuaciones de las precedentes, p y q se eliminarán, y se tendrá

$$\left.\begin{aligned}x-x'&=a(z-z')\\ y-y'&=b(z-z')\end{aligned}\right\}\qquad[1],$$

que son las ecuaciones pedidas.

Ahora, para tirar por el punto dado una paralela á la recta

$$\left.\begin{aligned}x&=a'z\\ y&=b'z\end{aligned}\right\}\qquad[2]$$

se observará que las ecuaciones de esta paralela son de la forma [1]; y como se sabe que las proyecciones de dos rectas paralelas sobre un mismo plano lo son tambien, se deduce que $a=a'$, $b=b'$; por lo tanto las ecuaciones pedidas son

$$\left.\begin{aligned}x-x'&=a'(z-z')\\ y-y'&=b'(z-z')\end{aligned}\right\}\qquad[3].$$

OBSERVACION. Llamando α, β, γ los ángulos que la recta [2] forma con los ejes se tendrá (441, OBS. II)

$$a'=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\quad b'=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

y se podrán escribir las ecuaciones [3] bajo la forma muy simétrica

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\cos\beta}=\frac{z-z'}{\cos\gamma}.$$

444. PROBLEMA. *Hallar las ecuaciones de una recta que pase por dos puntos dados* (x', y', z'), (x'', y'', z'').

Puesto que la recta pasa por el primer punto pueden ponerse sus ecuaciones bajo la forma

$$x-x'=a(z-z'),$$

$$y-y'=b(z-z'),$$

y una vez que pasa tambien por el segundo punto se debe tener

$$x''-x'=a(z''-z'),$$

$$y''-y'=b(z''-z')$$

Eliminando ahora a y b por division entre estas ecuaciones y las precedentes se llega á las pedidas

$$x-x'=\frac{x''-x'}{z''-z'}(z-z'),$$

$$y-y'=\frac{y''-y'}{z''-z'}(z-z'),$$

ó
$$\frac{x-x'}{x''-x'}=\frac{y-y'}{y''-y'}=\frac{z-z'}{z''-z'}.$$

OBSERVACION. Se hubieran podido escribir inmediatamente acordándose de lo que se ha dicho en el núm. 70 y notando que la proyeccion de la recta pedida sobre el plano de las xz pasa por los puntos (x', z'), (x'', z''), etc.

445. PROBLEMA. *Determinar el punto de interseccion de dos rectas conocidas por sus ecuaciones.*

Por regla general, cuando dos líneas se cortan, las coordenadas de sus puntos de interseccion verifican á la vez las ecuaciones de estas líneas; y recíprocamente, toda solucion comun á las ecuaciones de dos líneas determina un punto que pertenece á la vez á las dos líneas.

Segun esto, si

$$\left.\begin{aligned} x &= az + p \\ y &= bz + q \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

y

$$\left.\begin{aligned} x &= a'z + p' \\ y &= b'z + q' \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

son las ecuaciones de las dos rectas dadas se tendrá el punto de interseccion pedido resolviendo las ecuaciones (1) y (2) con relacion á x, y y z. Mas para que estas cuatro ecuaciones con tres incógnitas admitan una solucion comun debe existir una cierta relacion entre sus coeficientes, que se hallará eliminando x, y, z entre estas cuatro ecuaciones, y esta relacion espresará la condicion para que las rectas se corten.

Para hacer la eliminacion de x, y, se restará miembro á miembro las ecuaciones (2) de sus correspondientes en (1), y resultará

$$0 = (a - a')z + p - p',$$

$$0 = (b - b')z + q - q',$$

é igualando los valores de z sacados de estas ecuaciones, tendrémos

$$\frac{p - p'}{a - a'} = \frac{q - q'}{b - b'} \qquad (3),$$

que es la relacion que debe existir entre los coeficientes de las ecuaciones (1) y (2), para que las rectas que representan se corten. Admitiendo que esta relacion quede satisfecha se hallará para las coordenadas del punto de interseccion pedido

$$x = \frac{ap' - pa'}{a - a'}, \quad y = \frac{bq' - qb'}{b - b'}, \quad z = \frac{p - p'}{a - a'} = -\frac{q - q'}{b - b'}.$$

OBSERVACION. Cuando las rectas son paralelas se tiene $a = a'$

y $b=b'$, y la relacion [3] se verifica todavía, aunque los valores de las coordenadas del punto de interseccion son infinitos. Como los casos de que las rectas se corten ó sean paralelas son los únicos que pueden ocurrir cuando ambas se hallen en un plano se puede decir que la ecuacion [3] espresa la condicion necesaria para que las rectas representadas por las [1] y [2] estén en un mismo plano.

446. PROBLEMA. *Hallar el ángulo de dos rectas cuyas ecuaciones son conocidas en coordenadas rectangulares.*

Suponiendo que se haya tirado por el orígen dos paralelas á las rectas dadas, el ángulo V de estas dos paralelas será el ángulo pedido. Designemos por α, β, γ; α', β', γ' los ángulos de estas paralelas con los ejes; y si

$$\left.\begin{array}{l} x=az \\ y=bz \end{array}\right\} \text{ y } \left\{\begin{array}{l} x=a'z \\ y=b'z \end{array}\right.$$

son sus ecuaciones, tendrémos (406, TEOR. V)

$$\cos V=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma',$$

y (441) $$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\quad \cos\alpha'=\frac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}},$$

$$\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\quad \cos\beta'=\frac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\quad \cos\gamma'=\frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}.$$

Por lo tanto se tendrá

$$\cos V=\frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{a'^2+b'^2+1}}.$$

Ambos radicales deben tomarse con el signo $+$, si como lo hemos supuesto implícitamente, V designa el ángulo de las dos porciones de paralelas situadas encima del plano de las xy; y con signos diferentes, cuando V designa el ángulo formado por dos porciones de paralelas situadas á diferente lado del plano xy.

OBSERVACIONES. I. Para comprobacion se puede deducir de la fórmula que da $\cos V$ las del núm. 441, que espresan los cosenos de los ángulos que una recta forma con los ejes.

II. Se halla fácilmente

$$\operatorname{sen} V = \frac{\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-ba')^2}}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{a'^2+b'^2+1}}.$$

III. Si para mas simetría se pone las ecuaciones de las rectas bajo la forma

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$

$$\frac{x}{a'}=\frac{y}{b'}=\frac{z}{c'},$$

se hallará

$$\cos V = \frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}},$$

$$\operatorname{sen} V = \frac{\sqrt{(ac'-ca')^2+(bc'-cb')^2+(ab'-ba')^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}.$$

447. Condiciones para que dos rectas sean paralelas ó perpendiculares. — Cuando las dos rectas son paralelas el ángulo V es nulo, y por lo tanto $\cos V = 1$. Así, para que las dos rectas propuestas sean paralelas, se debe tener

$$(aa'+bb'+1)^2=(a^2+b^2+1)(a'^2+b'^2+1),$$

ó bien $$(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-ba')^2=0.$$

Mas para que esta condicion quede satisfecha es necesario y suficiente que se tenga

$$a=a', \quad b=b';$$

luego para que dos rectas sean paralelas es necesario y suficiente que sus proyecciones sobre dos planos coordenados sean paralelas.

Cuando las rectas son perpendiculares se tiene $V=90^\circ$, y por consiguiente $\cos V = 0$; luego para que dos rectas sean perpendiculares es necesario que se tenga

$$aa' + bb' + 1 = 0,$$

ó $$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma' = 0.$$

448. PROBLEMA. *Determinar la distancia de un punto á una recta conocida por sus ecuaciones en coordenadas rectangulares.*

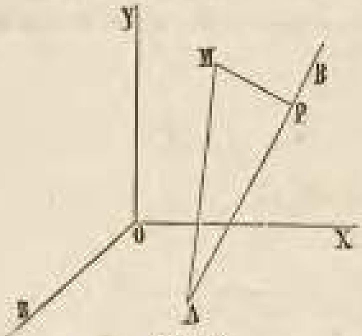


Fig. 180.

Sean $M(x', y', z')$ (fig. 180) el punto dado, y

$$x = az + p$$
$$y = bz + q$$

las ecuaciones de la recta dada AB. Tirando MP perpendicular á AB, uniendo el punto M con el $A(p, q, o)$, que es la traza de AB sobre el plano de las xy, y llamando V el ángulo MAP, tendrémos

$$\overline{MP}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{AP}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{AM}^2 \cos^2 V.$$

Pero siendo AM la distancia de los puntos A y M se tiene

$$\overline{AM}^2 = (x' - p)^2 + (y' - q)^2 + z'^2.$$

Además, puesto que la recta AM pasa por los dos puntos A y M, sus coeficientes angulares serán $\frac{x'-p}{z'}$, $\frac{y'-q}{z'}$; se tendrá (446, obs. III)

$$\cos V = \frac{a(x'-p) + b(y'-q) + z'}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{(x'-p)^2+(y'-q)^2+z'^2}},$$

y por lo tanto haciendo $MP = \delta$ se tendrá

$$\delta = \sqrt{(x'-p)^2 + (y'-q)^2 + z'^2 - \frac{[a(x'-p) + b(y'-q) + z']^2}{a^2+b^2+1}}.$$

ó reduciendo

$$=\sqrt{\frac{(y'-bz'-q)^2+[b(x'-p)-a(y'-q)]^2+(x'-az'-p)^2}{a^2+b^2+1}}.$$

Es muy fácil recordar esta espresion, pues igualando á cero las raices de los tres cuadrados que entran en el numerador debajo del radical resultarian las ecuaciones de las tres proyecciones de la recta, sin mas diferencia que la de estar las coordenadas del punto dado en lugar de las generales.

Usando las fórmulas del núm. 441 hallarémos

$$\delta=\sqrt{(x'-p)^2+(y'-q)^2+z'^2-[(x'-p)\cos\alpha+(y'-q)\cos\beta+z'\cos\gamma]^2}.$$

OBSERVACION. Si el punto dado fuese el origen, x', y' y z' serian nulos, y vendriamos á parar á la fórmula del núm. 439.

EJERCICIOS. I. *Hallar las ecuaciones de una recta conociendo sus distancias al origen y á los ejes.*

II. *Hallar las ecuaciones de una recta que pase por un punto dado y que forme ángulos dados con dos rectas determinadas.*

III. *Hallar las ecuaciones de una recta que pase por un punto dado y que encuentre á otras dos tambien dadas.*

§ II. — PROBLEMAS SOBRE LOS PLANOS.

449. Aunque ya conocemos la ecuacion del plano, como es muy importante adquirir práctica en la investigacion de las ecuaciones que corresponden á las superficies segun la diferente generacion de estas, vamos á buscarla de nuevo, considerando el plano engendrado por una *recta móvil que resbala sobre otra fija permaneciendo siempre paralela á una misma direccion.*

Sean
$$x=az+p,$$
$$y=bz+q$$
las ecuaciones de la recta fija ó *directriz*, y

$$\left.\begin{aligned}x&=a'z+p'\\y&=b'z+q'\end{aligned}\right\}\qquad[1]$$

las que representan á la recta móvil ó *generatriz*. Para que la generatriz conserve la misma direccion durante todo el movimiento es necesario que los valores de a' y b' permanezcan constantes, mientras que los de p' y q' variarán con la posicion de esta recta; y para que la generatriz encuentre siempre á la directriz se necesita que los valores correspondientes de p' y q' verifiquen la relacion (445)

$$\frac{p-p'}{a-a'}=\frac{q-q'}{b-b'} \qquad [2].$$

Ahora bien, todo par de valores de p' y q' que verifique esta relacion puesto en la ecuacion [1] dará las de una posicion particular de la generatriz; luego eliminando p' y q' entre las ecuaciones [1] y [2], se hallará una relacion entre x, y y z que convendrá á todos los puntos de la generatriz, cualquiera que sea su posicion, y que por consecuencia no será otra que la ecuacion del plano buscado.

Haciendo esta eliminacion se halla

$$(b-b')x-(a-a')y+(ab'-ba')z-(b-b')p+(a-a')q=0,$$

que es de primer grado y de la forma

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

como ya habiamos hallado por otro método (424). En cuanto á la recíproca, á saber, que toda ecuacion de primer grado representa un plano es inútil establecerla de nuevo.

450. Trazas de un plano. — Segun lo que se ha dicho (420, OBSERVACION I) cuando se da la ecuacion de un plano

$$Ax+By+Cz+D=0$$

se obtendrán sus trazas sobre los planos coordenados, anulando sucesivamente cada una de las variables de la ecuacion dada. Para hallar la traza de un plano dado sobre cualquiera de los coordenados en particular es necesario anular la variable relativa al eje que no está en este plano: así, haciendo $z=0$, resulta

$$Ax+By+D=0$$

para ecuacion de la traza sobre el plano de las xy; y se obtendrá de la misma manera

$$Ax+Cz+D=0,$$
$$By+Cz+D=0$$

para las respectivas trazas sobre los planos de las xz y de las yz.

451. Coordenadas en el orígen. Otra forma de la ecuacion del plano. — Si en la ecuacion del plano dado

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad [1]$$

se hace á la vez $y=0$ y $z=0$, el valor de x sacado de la

$$Ax+D=0$$

resultante mide la distancia del orígen al punto de interseccion del plano con el eje de las x. Llamando p esta distancia, tendrémos

$$p=-\frac{D}{A};$$

y como tendriamos de la misma manera

$$q=-\frac{D}{B},$$

$$r=-\frac{D}{C},$$

designando q y r las distancias del orígen á los puntos de interseccion del plano dado con los ejes de las y y de las z; poniendo los valores de A, B y C sacados de estas igualdades en la ecuacion [1], y suprimiendo el factor D que será comun á todos los términos, se tendrá

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1.$$

Observacion. Aunque la ecuacion general del plano encierra cuatro coeficientes, como solo tres son arbitrarios porque se puede siempre sin alterarlo dividir sus dos miembros por uno cualquiera de ellos, se deduce que un plano está determinado por tres condiciones.

452. PROBLEMA. *Hallar en coordenadas rectangulares la distancia de un plano al origen.*

Sea $$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0 \qquad [1]$$

la ecuacion del plano dado. Sabemos que las de la perpendicular bajada desde el origen á este plano son de la forma

$$\left.\begin{array}{l} x=az \\ y=bz \end{array}\right\} \qquad [2];$$

mas para que una recta sea perpendicular á un plano es necesario y suficiente que las trazas de este sobre dos de proyeccion sean perpendiculares á las proyecciones de la recta sobre estos mismos; y como las trazas del plano dado sobre los xz é yz son (450)

$$\mathrm{A}x+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0,$$

$$\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0,$$

para que la recta [2] sea perpendicular al plano [1] es necesario que se tenga

$$a=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}, \quad b=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}.$$

Por lo tanto, las ecuaciones de la perpendicular tirada por el origen al plano dado son

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}z \\ y=\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}z \end{array}\right\} \qquad [3],$$

ó $$\frac{x}{\mathrm{A}}=\frac{y}{\mathrm{B}}=\frac{z}{\mathrm{C}}.$$

Si designamos por δ la longitud de la perpendicular pedida y consideramos x, y y z como las coordenadas del pié de esta, tendrémos

$$\delta=\sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

y reemplazando x, y y z por los valores sacados de las ecuaciones [1] y [3], se obtiene

$$\delta = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

cuyo radical se debe tomar siempre con el mismo signo que el numerador.

453. Problema. *Hallar en coordenadas rectangulares los ángulos que un plano forma con los coordenados.*

Estos son iguales á los que la perpendicular bajada desde el orígen sobre el plano dado forma con los ejes.

Si $$Ax+By+Cz+D=0$$

es la ecuacion del plano dado, las de la perpendicular á este plano tirada por el orígen son (452)

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C};$$

luego si se conservan las mismas notaciones que en el núm. 441, se tendrá

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Observacion. Este problema y el precedente pueden resolverse identificando la ecuacion

$$Ax+By+Cz+D=0$$

con la $$\cos\alpha . x+\cos\beta . y+\cos\gamma . z-\delta=0,$$

que tambien puede representar, segun ya hemos visto (424), un plano cualquiera. Se debe, pues, tener

$$\frac{\cos\alpha}{A}=\frac{\cos\beta}{B}=\frac{\cos\gamma}{C}=\frac{-\delta}{D};$$

y como cada una de estas relaciones es igual en virtud de una propiedad conocida á

$$\frac{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \text{ó á} \quad \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

es fácil deducir los valores de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ y δ.

454. Ecuacion general de los planos que pasan por un punto dado. — Como la cuestion se reduce á determinar uno de los coeficientes de la ecuacion general del plano

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad [1]$$

por la condicion de que las coordenadas x', y', z' del punto dado verifiquen la ecuacion del plano, y para esto se tiene la relacion

$$Ax'+By'+Cz'+D=0 \qquad [2];$$

restando la ecuacion [2] de la [1] quedará D eliminada, y la ecuacion resultante

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0 \qquad [3]$$

será la pedida.

Si el punto dado fuese el orígen de las coordenadas x', y' y z' serian nulos, y la ecuacion [3] se reduciria á

$$Ax+By+Cz=0.$$

455. PROBLEMA. *Hallar la ecuacion de un plano que pase por tres puntos dados* (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z''').

Si se espresa que la ecuacion general del plano

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad [1]$$

queda verificada por las coordenadas de los puntos dados, se obtendrá las tres relaciones

$$Ax'+By'+Cz'+D=0,$$
$$Ax''+By''+Cz''+D=0,$$
$$Ax'''+By'''+Cz'''+D=0,$$

de las cuales se puede deducir los valores de las relaciones $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, que designarémos por A′, B′, C′; y llevando en seguida estos valores á la ecuacion (1), se tendrá la

$$A'x+B'y+C'z+1=0,$$

que está perfectamente determinada, y que siendo verificada por las coordenadas de los puntos dados, será la ecuacion pedida. Así, el problema propuesto se reduce á resolver un sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas.

OBSERVACION. Cuando los ejes son rectangulares, el mismo problema se puede resolver de otro modo, que pone en evidencia un teorema muy notable.

Tomando la ecuacion del plano bajo la forma (**424**)

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=\delta,$$

y designando por α, β, γ los ángulos que la perpendicular δ bajada desde el orígen forma con los ejes, si llamamos α el área del triángulo que tiene por vértices los tres puntos dados, y a', a'', a''' las proyecciones de este área sobre los planos de las yz, xz, xy, se tendrá

$$a'=\alpha\cos\alpha,\quad a''=\alpha\cos\beta,\quad a'''=\alpha\cos\gamma,$$

y por lo tanto la ecuacion del plano será

$$a'x+a''y+a'''z=\alpha\delta.$$

Esta es la espresion del teorema: *Toda pirámide es igual á la suma algébrica de otras tres que tienen por vértice comun un punto cualquiera de la base de la primera y por bases los polígonos que resultan proyectando la base de la primera sobre tres planos rectangulares cualesquiera que pasen por el vértice de la pirámide considerada.*

436. PROBLEMA. *Determinar en coordenadas rectangulares el ángulo de dos planos.*

Si concebimos que por el orígen de las coordenadas se haya tirado una perpendicular á cada plano, el ángulo que estas formen es el pedido; y la cuestion queda reducida á hallar el ángulo V de estas dos rectas. Pero si

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

$$A'x+B'y+C'z+D'=0$$

son las ecuaciones de los dos planos dados, las perpendiculares tiradas por el orígen á estos planos serán (452)

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}$$

y

$$\frac{x}{A'}=\frac{y}{B'}=\frac{z}{C'}.$$

Luego el ángulo V de estas rectas, y por lo tanto el pedido, estará dado por la fórmula (446, obs. III)

$$\cos V=\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}};$$

y segun que se tomen los radicales con el mismo signo ó con signo contrario se obtendrá uno ú otro de los dos ángulos adyacentes formados por los dos planos.

457. Condiciones para que dos planos sean perpendiculares ó paralelos. — Repitiendo los razonamientos del núm. 446 se halla que los planos son perpendiculares cuando se tiene

$$AA'+BB'+CC'=0,$$

y que son paralelos si se tiene

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'};$$

es decir, si los coeficientes de las variables son proporcionales; y como esta condicion es la misma que se necesita para que las trazas de los planos dados sobre los de las xz y de las yz sean paralelas, podemos decir, *para que dos planos sean paralelos, es necesario y suficiente que sus trazas sobre dos de proyeccion sean paralelas.*

458. PROBLEMA. *Tirar por un punto dado un plano paralelo a otro determinado.*

Si x', y', z' son las coordenadas del punto y

$$Ax+By+Cz+D=0$$

la ecuacion del plano dado, la del que se busca será de la forma

$$A'(x-x')+B'(y-y')+C'(z-z')=0.$$

Para que esta ecuacion represente un plano paralelo al dado se debe tener (457)

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C};$$

y por lo tanto la ecuacion buscada será

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0.$$

459. PROBLEMA. *Hallar la distancia de un punto á un plano en coordenadas rectangulares.*

Sean (x', y', z') el punto dado, y

$$Ax+By+Cz+D=0$$

la ecuacion del plano. La distancia que hay desde el orígen á este plano tiene por espresion (452,

$$\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Si transportamos el orígen al punto dado sustituyendo x, y y z por $x+x'$, $y+y'$ y $z+z'$, y suponemos

$$D'=Ax'+By'+Cz'+D,$$

la ecuacion del plano será

$$Ax+By+Cz+D'=0,$$

y la distancia del nuevo origen al plano tendrá por espresion

$$\frac{D'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Por consiguiente, llamando δ la distancia pedida se tiene

$$\delta=\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

460. Problema. *Conociendo las ecuaciones de dos planos hallar las proyecciones de su interseccion.*

Se hallará las ecuaciones pedidas (420, obs. II) eliminando sucesivamente cada una de las variables entre las ecuaciones de los planos dados.

Si estos vienen representados por

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

$$A'x+B'y+C'z+D'=0,$$

las ecuaciones de las proyecciones de su interseccion serán

$$(AC'-CA')x+(BC'-CB')y+DC'-CD'=0,$$

$$(BA'-AB')y+(CA'-AC')z+DA'-AD'=0,$$

$$(CB'-BC')z+(AB'-BA')x+DB'-BD'=0.$$

Ejercicios. I. *Hallar la ecuacion de un plano considerándole como el lugar de las perpendiculares levantadas á una recta en uno de sus puntos.*

II. *Hallar la condicion para que una recta sea perpendicular á un plano siendo los ejes oblicuos.*

§ III. — Problemas sobre las líneas rectas y los planos.

461. *Conocidas las ecuaciones de una recta y un plano hallar la interseccion de este con aquella.*

Sean $$\left.\begin{array}{l} x=az+p \\ y=bz+q \end{array}\right\} \qquad (1)$$

las ecuaciones de la recta dada, y

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad [2]$$

la del plano. Debiendo las coordenadas del punto pedido satisfacer á la vez á las ecuaciones de la recta y á la del plano, se la hallará resolviendo [1] y [2] con relacion á x, y, z.

Eliminando x é y resulta

$$(Aa+Bb+C)z+Ap+Bq+D=0 \qquad [3],$$

ecuacion de donde se saca el valor de z, que llevado á las [1], se tiene los de x é y.

462. Condiciones para que una recta sea paralela á un plano. — Cuando la recta es paralela al plano dado, las ecuaciones [1] y [2] deben ser incompatibles, ó lo que viene á ser lo mismo, los valores de x, y y z sacados de estas ecuaciones deben ser infinitos; luego las condiciones para que una recta y un plano sean paralelos son

$$Aa+Bb+C=0,$$

$$Ap+Bq+D\gtrless 0.$$

463. Condiciones para que una recta esté situada en un plano. — Si la recta [1] está situada en el plano [2], toda solucion de [1] debe satisfacer á [2], y por lo tanto el sistema de [1] y [2] será indeterminado; luego las condiciones pedidas son

$$Aa+Bb+C=0,$$

$$Ap+Bq+D=0.$$

Observacion. Puede espresarse muy sencillamente la condicion para que un plano sea paralelo á la recta [1] escribiendo la ecuacion del plano bajo la forma

$$x-az-p=\lambda(y-bz-q)+\mu \qquad [4],$$

y se obtiene la condicion para que el plano contenga á la recta haciendo

$$x-az-p=\lambda(y-bz-q) \qquad [5];$$

porque se ve que ninguna solucion de [4] puede satisfacer á [4], y al contrario, que toda solucion de [1] lo es tambien de [5].

464. PROBLEMA. *Hallar la ecuacion de un plano que pase por un punto y por una recta dados.*

La ecuacion del plano pedido tiene la forma

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad [1];$$

y si (x', y', z') es el punto dado, y

$$\left.\begin{array}{l} x=az+p \\ y=bz+q \end{array}\right\} \qquad [2]$$

las ecuaciones de la recta, se tendrá entre los coeficientes de la ecuacion [1] las tres relaciones

$$Ax'+By'+Cz'+D=0,$$
$$Aa+Bb+C=0,$$
$$Ap+Bq+D=0,$$

que espresan que el punto y la recta se encuentran en el plano buscado (463). Sacando de ellas las relaciones $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ y llevándolas á la fórmula [1] se tendria la ecuacion pedida. Pero es mejor tratar la cuestion del modo siguiente:

Escribiendo la ecuacion del plano buscado bajo la forma

$$x-az-p=\lambda(y-bz-q) \qquad [3],$$

se espresa ya que el plano contiene á la recta [2]; y para espresar que este plano encierra el punto dado, no hay mas que sustituir las coordenadas de este en la ecuacion [3], lo que da

$$x'-az'-p=\lambda(y'-bz'-q),$$

de donde eliminando λ por division resulta

$$\frac{x-az-p}{x'-az'-p}=\frac{y-bz-q}{y'-bz'-q}.$$

465. Problema. *Hallar la ecuacion de un plano que pase por una recta dada D y que sea paralela á otra recta D'.*

Sean
$$\left.\begin{array}{l} x=az+p \\ y=bz+q \end{array}\right\} \text{[D]}, \quad \left.\begin{array}{l} x=a'z+p' \\ y=b'z+q' \end{array}\right\} \quad \text{[D']}$$

las ecuaciones de las rectas dadas: la del plano buscado podrá ponerse bajo la forma (463, obs.)

$$x-az-p=\lambda(y-bz-q),$$

ó
$$x-\lambda y+(\lambda b-a)z+\lambda q-p=0 \quad \text{[P]},$$

que espresa ya que el plano P contiene la recta D. Para que este plano sea paralelo á D' se debe tener (462)

$$a'-\lambda b'+\lambda b-a=0 \quad [1],$$

$$p'-\lambda q'+\lambda q-p \gtrless 0 \quad [2].$$

De la ecuacion [1] se saca

$$\lambda=\frac{a-a'}{b-b'},$$

cuyo valor, sustituido en la desigualdad [2], da

$$p-p'-\frac{a-a'}{b-b'}(q-q')\gtrless 0,$$

ó
$$\frac{a-a'}{b-b'}=\frac{p-p'}{q-q'}+\mu \quad [3],$$

siendo μ una cantidad diferente de 0. Si esta condicion queda satisfecha, la ecuacion pedida será

$$\frac{x-az-p}{a-a'}=\frac{y-bz-q}{b-b'} \quad \text{[P]}.$$

Observaciones. 1. Si la ecuacion [3] da $\mu \gtrless 0$ el problema no admite mas que una solucion.

Si resulta $\mu=0$, la ecuacion [3] indica entonces que las dos rectas están en un mismo plano, y puede suceder que se corten ó que sean paralelas. En el primer caso la ecuacion [1] da un valor determinado de λ, y no hay mas que un solo plano, que es el que pasa por las dos rectas. En el segundo se tiene $a=a'$, $b=b'$, y la ecuacion [1] queda satisfecha por un valor cualquiera de λ, como debia suceder, puesto que entonces todo plano que pasa por D es paralelo á D'.

II. Quitando los denominadores á la ecuacion [P] se obtiene

$$(b-b')x-(a-a')y+(ab'-ba')z=p(b-b')-q(a-a').$$

466. Problema. *Dado un punto* (x', y', z') *bajar desde él una perpendicular á un plano y hallar la longitud de esta perpendicular en coordenadas rectangulares.*

Las ecuaciones de la perpendicular pedida han de tener la forma

$$\left.\begin{array}{l} x-x'=a(z-z') \\ y-y'=b(z-z') \end{array}\right\} \qquad [1];$$

y si

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad [2]$$

es la del plano dado, para que la recta [1] sea perpendicular á este plano se debe tener necesariamente (452)

$$a=\frac{A}{C}, \quad b=\frac{B}{C};$$

por lo tanto, las ecuaciones de la perpendicular que se busca son

$$\left.\begin{array}{l} x-x'=\dfrac{A}{C}(z-z') \\ y-y'=\dfrac{B}{C}(z-z') \end{array}\right\} \qquad [3].$$

Para tener la longitud de la perpendicular es necesario sustituir x, y, z en la fórmula

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

por los valores sacados de las ecuaciones [2] y [3]; pero es mas sencillo calcular los valores de las diferencias $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$.

A este fin se escribe la ecuacion del plano bajo la forma

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')+Ax'+By'+Cz'+D=0,$$

y haciendo el cálculo se vuelve á obtener la fórmula del número 459.

467. Problema. *Tirar por un punto dado (x', y', z') referido á coordenadas rectangulares un plano perpendicular á una recta dada.*

La ecuacion del plano que se pide es de la forma

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0 \qquad [1];$$

y si

$$x=az+p,$$

$$y=bz+q$$

son las de la recta dada, para que el plano sea perpendicular á esta recta es necesario (452) que se tenga

$$a=\frac{A}{C}, \quad b=\frac{B}{C}, \quad \text{ó} \quad A=aC, \quad B=bC.$$

Llevando estos valores á la ecuacion (1), y dividiendo por C se tendrá

$$a(x-x')+b(y-y')+z-z'=0.$$

468. Problema. *Por un punto dado (x', y', z') tirar una perpendicular á una recta dada y determinar el pié y la magnitud de esta perpendicular suponiendo rectangulares las coordenadas.*

Sean

$$\left.\begin{array}{l} x=az+p \\ y=bz+q \end{array}\right\} \qquad [R]$$

las ecuaciones de la recta dada: concibiendo por el punto dado un plano P perpendicular á esta recta, cuyo plano tendrá por ecuacion (467)

$$a(x-x')+b(y-y')+z-z'=0 \qquad [P],$$

su interseccion con la recta R será el pié de la perpendicular pedida, y se hallará esta recta uniendo este punto con el dado.

Para hallar la longitud de la perpendicular es necesario reemplazar en la fórmula

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

x, y, z por las coordenadas del pié de la perpendicular, y se hallará estos valores resolviendo las ecuaciones [R] y [P]; pero es mas sencillo calcular los de $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$.

Para esto se escribe las ecuaciones de la recta bajo la forma

$$x-x'=a(z-z')-x'+az'+p,$$

$$y-y'=b(z-z')-y'+bz'+q,$$

y haciendo el cálculo se vuelve á encontrar las fórmulas del número 448.

469. Problema. *Hallar en coordenadas rectangulares el ángulo que una recta forma con un plano.*

El ángulo pedido V es el complemento de otro α que formen dos rectas tiradas por el orígen, la una paralela á la recta dada y la otra perpendicular al plano dado.

Si
$$x=az,$$
$$y=bz$$

son las ecuaciones de la paralela á la recta dada, y

$$Ax+By+Cz+D=0$$

la del plano dado, la perpendicular á este plano tirada por el orígen estará representada (452) por

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C},$$

y se tendrá por lo tanto (446)

$$\operatorname{sen} V=\cos\alpha=\frac{Aa+Bb+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

cuya fórmula vuelve á dar las condiciones halladas anteriormente para que una recta sea perpendicular ó paralela á un plano.

470. Problema. *Hallar la menor distancia entre dos rectas* R *y* R′ *conocidas por sus ecuaciones en coordenadas rectangulares.*

Tirando por la recta R un plano P paralelo á R′ y por la R′ otro P′ paralelo á R, estos dos planos serán paralelos entre sí y su distancia igual á la que se busca. En virtud de esto, si

$$\left.\begin{array}{l} x = az + p \\ y = bz + q \end{array}\right\} \qquad [R],$$

$$\left.\begin{array}{l} x = a'z + p' \\ y = b'z + q' \end{array}\right\} \qquad [R']$$

son las ecuaciones de las rectas R y R′, las de los planos P y P′ serán (**465**, observacion II)

$$(b-b')x-(a-a')y+(ab'-ba')z=p(b-b')-q(a-a'),$$

$$(b-b')x-(a-a')y+(ab'-ba')z=p'(b-b')-q'(a-a');$$

y designando por δ y δ' las distancias del origen á los planos P y P′, y por Δ la distancia pedida, tendrémos, si los planos P y P′ están situados á un mismo lado del origen, $\Delta=\delta-\delta'$, y (**459**)

$$\delta=\frac{p(b-b')-q(a-a')}{\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-ba')^2}},$$

$$\delta'=\frac{p'(b-b')-q'(a-a')}{\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-ba')^2}};$$

por lo tanto
$$\Delta=\frac{(p-p')(b-b')-(q-q')(a-a')}{\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-ba')^2}}.$$

Si los planos P y P′ estuvieran á diferente lado del origen, lo que será fácil conocer en cada caso particular buscando sus puntos de interseccion con uno de los ejes, por ejemplo, el de las x, entonces será $\Delta=\delta+\delta'$.

En todos los casos el radical debe tomarse con el mismo signo que el numerador para que el valor de Δ sea positivo.

Teniendo presentes las fórmulas de los números **441** y **446**, obs. II, puede ponerse el valor de Δ bajo la forma

$$\Delta=\frac{(p-p')(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\beta')-(q-q')(\cos\alpha\cos\gamma'-\cos\gamma\cos\alpha')}{\operatorname{sen} V},$$

representando por V el ángulo de las dos rectas, y por α, β, γ; α', β', γ' los de estas rectas con los ejes.

OBSERVACIONES. I. Cuando las rectas son paralelas se tiene $a=a'$ y $b=b'$; el valor de Δ se presenta entonces bajo una forma indeterminada, y esta circunstancia proviene de que en tal caso los planos auxiliares P y P' de que nos hemos servido para establecer la fórmula son ellos mismos indeterminados. Para tener en este caso la distancia de las dos rectas es necesario bajar desde un punto cualquiera de la primera una perpendicular á la segunda y calcular la longitud de esta perpendicular.

Se puede tambien hacer que desaparezca esta indeterminacion por medio del artificio siguiente. Tiremos por el punto $(p', q', 0)$, traza de R sobre el plano de las xy una recta E cuyos coeficientes angulares sean $a-\varepsilon$, $b-\varepsilon$, siendo ε una cantidad indeterminada que harémos en seguida converger hácia cero. Reemplazando $a-a'$ y $b-b'$ por ε el valor de Δ se presenta, despues de hechas todas las reducciones, bajo la forma

$$\Delta=\frac{p-q-(p'-q')}{\sqrt{2+(a-b)^2}} \qquad [\Delta'],$$

y como no contiene ε, espresa la distancia de la recta R á la E en todas las posiciones de esta, y por consecuencia cuando ε sea nulo, es decir, cuando E sea paralela á R.

II. Se llegará á las ecuaciones de la perpendicular comun á las dos rectas dadas tirando por R un plano perpendicular á P', y por R' otro perpendicular á P, y buscando la interseccion de ambos.

Desarrollando el cálculo se hallará

$$[(a-a')+b(ab'-ba')](x-p)+[b-b'-a(ab'-ba')](y-q)$$
$$-[b(b-b')+a(a-a')]z=0$$

y

$$[(a-a')+b'(ab'-ba')](x-p')+[b-b'-a'(ab'-ba')](y-q')$$
$$-[b'(b-b')+a'(a-a')]z=0.$$

EJERCICIOS. I. *Tirar por un punto una recta paralela á un plano dado y que encuentre á otra recta tambien dada.*

II. *Tirar por un punto dado un plano paralelo á dos rectas dadas.*

III. *Hallar la ecuacion del plano que divida en dos partes iguales el ángulo de otros dos dados.*

IV. *Demostrar que se encuentran las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero alabeado.*

CAPÍTULO V.

DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON TRES VARIABLES.—SU REDUCCION Á LA FORMA MAS SENCILLA.

471. Forma general de la ecuacion de segundo grado con tres variables.—La ecuacion mas general de segundo grado con tres variables puede ponerse bajo la forma

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y$$
$$+2C''z+F=0 \qquad [1];$$

y como tiene diez términos su discusion inmediata nos llevaría á cálculos muy complicados: por esta razon conviene reducirla á una forma mas sencilla antes de examinar los diversos géneros de superficies que puede representar. Esta reduccion se efectúa de un modo análogo al que seguimos con la ecuacion de segundo grado con dos variables, fundándose en las propiedades del *centro* y de los *planos diametrales*, por lo que vamos á ocuparnos de estas.

§ I.—Del centro.

472. Se dice que un punto es *centro* de una superficie cuando tirando por él una secante cualquiera esta corta á la superficie en puntos que de dos en dos equidistan de aquel.

473. Teorema. *Cuando una superficie tiene por centro el orígen de las coordenadas no se altera su ecuacion cuando se cambia* x, y *y* z *en* $-x$, $-y$ *y* $-z$; y recíprocamente, *si no se altera una ecuacion sustituyendo* $-x$, $-y$ *y* $-z$ *en vez de* x, y *y* z *es prueba de que la superficie que representa tiene por centro el orígen de las coordenadas.*

La demostracion de este teorema es completamente igual á la que dimos en el núm. 126.

Corolario. Cuando se toma por orígen de las coordenadas el centro de una superficie algebráica todos los términos de la ecuacion de esta son de un mismo grado par; y recíprocamente: cuando todos los términos de la ecuacion de una superficie son del mismo grado par esta tiene un centro, que es el orígen de las coordenadas.

474. Coordenadas del centro de las superficies de segundo grado. —Para averiguar si la superficie representada por la ecuacion [1], ó por la mas sencilla

$$f(x, y, z)=0,$$

tiene un centro, verémos si es posible que desaparezcan los términos de primer grado por un simple cambio de la posicion del orígen. Al efecto trasladarémos el orígen al punto (x_1, y_1, z_1), y la ecuacion transformada será despues de suprimidos los acentos de las nuevas variables

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2+2Bzy+2(Ax_1+B'z_1+B''y_1+C)x \\ +A'y^2+2B'zx+2(A'y_1+Bz_1+B''x_1+C')y \\ +A''z^2+2B''xy+2(A''z_1+By_1+B'x_1+C'')z \end{array}\right\}+f(x_1, y_1, z_1)=0;$$

en la que se ve que los valores de x_1, y_1, z_1, capaces de hacer que desaparezcan los términos de primer grado, son los que resultan del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} Ax_1+B'z_1+B''y_1+C=0 \\ A'y_1+Bz_1+B''x_1+C'=0 \\ A''z_1+By_1+B'x_1+C''=0 \end{array}\right\} \qquad (c),$$

que se reduce á

$$f'_x(x, y, z)=0, \quad f'_y(x, y, z)=0, \quad f'_z(x, y, z)=0.$$

Por consiguiente se hallará las coordenadas del centro de una superficie de segundo grado resolviendo un sistema de tres ecuaciones que resultan de igualar á cero las derivadas del primer miembro de la ecuacion de la superficie tomadas con relacion á cada una de las variables.

Resolviendo por el método ordinario las ecuaciones [c] se tiene

$$x=\frac{N}{R}, \quad y=\frac{P}{R}, \quad z=\frac{Q}{R} \qquad [c'],$$

en las que el denominador comun es

$$R=AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B''.$$

La posibilidad de hacer que desaparezcan los términos de primer grado estriba, segun hemos ya visto, en la existencia de un centro colocado en el punto (x_1, y_1, z_1); luego si los valores [c'] son finitos y determinados la superficie tendrá un solo centro; si son indeterminados tendrá una infinidad, y no tendrá alguno si los valores [c'] son infinitos. Antes de examinar estos diversos casos vamos á dar una regla mnemónica para retener la funcion R que desempeña un papel muy importante en esta teoría, como vamos á ver. Escribiendo los coeficientes de los términos de segundo grado en el órden

$$\begin{array}{ccc} A, & A', & A'', \\ B, & B', & B'', \\ B, & B', & B'', \end{array}$$

la funcion R es igual á la suma de los productos de los números contenidos en cada línea vertical, menos la de los productos formados con los números de cada línea horizontal.

475. Superficies que tienen un solo centro. — Cuando $R \gtrless 0$, los valores [c'] serán *finitos y determinados*; las ecuaciones [c] no tendrán mas que una solucion comun, y la superficie admitirá *un centro* y nada mas que uno. Trasportando á este centro el orígen, la ecuacion [1] se reduce á

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + F_1 = 0 \quad [2],$$

suponiendo para abreviar

$$F_1 = f(x_1, y_1, z_1).$$

Esta ecuacion no contiene mas que un solo coeficiente nuevo F_1, cuyo valor puede obtenerse de una manera muy sencilla; porque si se multiplica la primera de las ecuaciones [c] por x_1, la segunda por y_1, la tercera por z_1, y se suman, resulta

$$\left.\begin{array}{r} Ax_1^2 + 2By_1z_1 + Cx_1 \\ +A'y_1^2 + 2B'z_1x_1 + C'y_1 \\ +A''z_1^2 + 2B''x_1y_1 + C''z_1 \end{array}\right\} = 0;$$

y aumentando á los dos miembros $Cx_1+C'y_1+C''z_1$, se tiene

$$f(x_1, y_1, z_1)-F=Cx_1+C'y_1+C''z_1,$$

y por lo tanto

$$F_1=f(x_1, y_1, z_1)=F+Cx_1+C'y_1+C''z_1,$$

valor fácil de calcular. Esto hace ver que el término constante de la nueva ecuacion es igual al término constante de la primera disminuido de la semisuma de los términos de primer grado despues de sustituir en ellos x_1, y_1, z_1, en vez de x, y, z.

EJEMPLO. Sea la ecuacion

$$x^2+3y^2+4z^2+2yz+4zx+6xy-26x-24y-32z-26=0.$$

Las ecuaciones del centro son

$$\begin{aligned} x_1+3y_1+2z_1&=13 \\ 3x_1+3y_1+\ z_1&=12 \\ 2x_1+\ y_1+4z_1&=16, \end{aligned}$$

que admiten una solucion única

$$x_1=1, \quad y_1=2, \quad z_1=3.$$

Luego la superficie admite un centro, cuyas coordenadas están representadas por estos valores

Se tiene en este caso

$$F_1=-26-13.1-12.2-16.3=-111,$$

y la ecuacion de la superficie se reduce á

$$x^2+3y^2+4z^2+2yz+4zx+6xy-111=0.$$

476. Si fuera $F_1=0$, se reduciria la ecuacion á

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=0 \qquad (3),$$

seria homogénea con relacion á las tres variables, y en este caso es fácil ver que representa un cono. En efecto, sean

$$x=az,$$

$$y=bz$$

las ecuaciones de una recta tirada por el origen: estos valores de x y de y sustituidos en la ecuacion [3] dan

$$z^2(Aa^2+A'b^2+A''+2Bb+2B'a+2B''ab)=0,$$

que siempre queda satisfecha, cualquiera que sea z, si se tiene

$$Aa^2+A'b^2+A''+2Bb+2B'a+2B''ab=0 \qquad [4].$$

La superficie contiene pues todas las rectas que pasan por el origen y cuyos coeficientes angulares satisfacen á la relacion [4]: es por lo tanto un cono.

Una superficie cónica es además por su misma definicion una superficie con centro.

Observacion. Si la ecuacion [4] no da mas que valores imaginarios de a para todo valor real de b, la ecuacion [3] no representa en realidad mas que un solo punto; que es el origen nuevo de coordenadas; y se puede decir tambien que la ecuacion representa en este caso un *cono imaginario*.

Se podrá juzgar si la ecuacion representa un cono real ó imaginario viendo si la interseccion de un plano con la superficie es una curva real ó imaginaria. Será ventajoso para esto elegir un plano paralelo á uno de los coordenados.

Ejemplo. Sea la ecuacion

$$x^2+3y^2+4z^2+2yz+4xz+6xy-26x-24y-32z+88=0.$$

La superficie que representa tiene un centro, cuyas coordenadas son $x=1$, $y=2$, $z=3$. Trasladando el origen á este centro se halla

$$x^2+3y^2+4z^2+2yz+4xz+6xy=0.$$

Haciendo $z=1$ se obtiene

$$x^2+3y^2+6xy+2y+4x+4=0,$$

que representa una hipérbola; luego la superficie propuesta es un cono.

477. Superficies que no tienen centro. — Si $R=0$ y uno á lo menos de los numeradores N, P, Q es diferente de cero, uno á lo menos de los valores [c'] será *infinito*, las ecuaciones [c] no tendrán *solucion alguna comun*, y la superficie *no tendrá centro.*

EJEMPLO. Si la ecuacion es

$$x^2+2y^2-8xy+6x-2y+4z-23=0$$

se hallará $z_1=\infty$, lo que indica que no tiene centro; y en efecto, la ecuacion $f'_z=0$ (474) se reduce en este caso á $4=0$, lo que es un absurdo, é indica claramente que no se puede hacer desaparecer el término en z.

478. Superficies que admiten una infinidad de centros. — Cuando se verifican al mismo tiempo

$$R=0, \quad N=0, \quad P=0, \quad Q=0,$$

los valores (c') son *indeterminados* y la superficie admite una *infinidad de centros*; porque las ecuaciones (c) se reducen á dos, y quizás á una sola, y es posible satisfacerlas de una infinidad de maneras.

Antes de ocuparnos de los dos casos que es preciso distinguir observarémos que la interseccion de una superficie de segundo grado con un plano tiene que ser una curva de segundo grado ó alguna de sus variedades; pues las fórmulas de Euler (435), que sirven para hallar la ecuacion de la seccion en su plano, son de primer grado con respecto á las variables. Bajo este supuesto:

1.° Si las ecuaciones (c) se reducen á dos, de modo que la tercera, por ejemplo, sea una consecuencia de las otras dos, todos los centros se hallarán sobre la recta R espresada por estas dos ecuaciones. En este caso cortando la superficie por dos planos P y Q, uno que atraviese la linea de los centros, y otro que la contenga, la primera seccion es una curva de segundo grado C, teniendo por centro el punto de interseccion del plano P con la recta R: es por lo tanto una hipérbola, una elipse ó alguna de sus variedades. La segunda seccion, tambien de segundo grado, tiene una infinidad de centros situados sobre la recta R, y no puede por consecuencia ser mas que el conjunto de dos paralelas á esta recta. Si hacemos girar el plano Q alrededor de la linea de los centros se obtendrá una infinidad de rectas, todas paralelas, que cortarán á la seccion transversal C; luego la superficie representada es un CILINDRO DE BASE ELÍPTICA Ó HIPERBÓLICA, comprendiendo como variedades suyas UNA RECTA ÚNICA Ó DOS PLANOS QUE SE CORTEN.

2.° Cuando las ecuaciones (c') se reducen á una sola, á la primera por ejemplo, la superficie admite una infinidad de centros situados sobre el plano P que representa esta ecuacion.

Si M es un punto cualquiera de esta superficie y se tira por él un plano Q que no sea paralelo al P, cortará á este segun una recta R, y debiendo tener la interseccion de Q con la superficie una infinidad de centros colocados todos en R, no podrá ser otra cosa que el conjunto de dos rectas r y r' paralelas á R situadas á diferente lado del plano P y equidistantes de él, una de las cuales r pasará por el punto M. Al variar el plano Q la recta r que pasa por M, que debe quedar siempre paralela á P, irá engendrando un plano paralelo á P, al paso que r' describirá otro al lado opuesto de P y á la misma distancia que el primero. Por consiguiente la superficie se reduce en este caso al sistema de DOS PLANOS PARALELOS que pueden alguna vez confundirse en uno solo.

EJEMPLOS. I. Sea la ecuacion

$$4x^2+9y^2+97z^2-16xz-54zy-36=0 \qquad (1).$$

Las ecuaciones del centro son, suprimiendo los índices,

$$\left.\begin{aligned} 4x-8z&=0\\ 9y-27z&=0\\ 97z-8x-27y&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (2).$$

Se saca de las dos primeras $\qquad x=2z, \quad y=3z \qquad (2),$

valores que, llevados á la tercera, dan

$$97z-16z-81z=0$$

ó

$$0=0.$$

Además, si se corta la superficie por el plano de las xy se obtiene la curva representada por

$$z=0, \quad 4x^2+9y^2=36 \qquad (3).$$

Luego la superficie es un cilindro de base elíptica. Sus generatrices son paralelas á la recta representada por las ecuaciones (2), y se la puede considerar como teniendo por directriz la elipse representada por las ecuaciones (3).

II. Sea la ecuacion

$$x^2+y^2+9z^2-2xz-4yz-2x+2z+1=0.$$

Las ecuaciones del centro son

$$x-z-1=0,\quad y-2z=0,\quad 5z-x-2y+1=0,$$

de las que la tercera es una consecuencia de las dos primeras. Por consiguiente, la superficie tiene una infinidad de centros en línea recta; y como cortándola por el plano de las xy resulta una seccion

$$(x-1)^2+y^2=0,$$

que representa un punto, debe deducirse que la superficie se reduce á una recta.

III. Si la ecuacion es

$$8x^2+18y^2+2z^2+12yz+8xz+24xy-50x-75y-25z+75=0\ [1],$$

las ecuaciones del centro serán, despues de quitados los índices,

$$\left.\begin{aligned} 8x+12y+4z&=25\\ 12x+18y+6z&=\frac{75}{2}\\ 4x+\ \ 6y+2z&=\frac{25}{2} \end{aligned}\right\}\qquad [C].$$

Como es fácil conocer que la segunda resulta de multiplicar la primera por $\frac{3}{2}$, y que la tercera es el producto de la primera por $\frac{1}{2}$, debe deducirse que la superficie se compone de dos planos paralelos; y con efecto, resolviendo la ecuacion [1] respecto á x, y haciendo todos los cálculos, se hallará

$$x=-\frac{12y+4z-25}{8}\pm\frac{5}{8},$$

luego la ecuacion [1] es el producto de las siguientes

$$8x+12y+4z-30=0,$$

$$8x+12y+4z-20=0,$$

que representan dos planos paralelos.

IV. Aplicando el mismo método á la ecuacion

$$x^2+y^2+z^2+2yz+2xz+2xy-10x-10y-10z+25=0$$

se conoce que representa dos planos que se confunden en uno, y que tienen por ecuacion comun

$$x+y+z=5,$$

pues el primer miembro de la dada es el cuadrado de $(x+y+z-5$

§ II. — Planos diametrales.

479. Superficie diametral. Plano diametral. — Se llama superficie diametral el lugar geométrico de los medios de todas las cuerdas de una superficie paralelas á una misma direccion. Cuando la superficie sea del órden m^{mo} las cuerdas de que hablamos podrán cortarla en m puntos, que combinados de dos en dos, darán un número $\frac{m(m-1)}{2}$ de cuerdas, y por consiguiente otro igual de puntos medios de estas, y por lo tanto la superficie diametral será del grado $\frac{m(m-1)}{2}$. Por regla general el grado de toda superficie diametral será mayor que el de la propuesta; mas cuando $m=2$ la superficie diametral es de primer grado; es decir, un plano, que se llama *plano diametral*.

Se dice que una recta es *conjugada* de un plano diametral cuando es paralela á todas las cuerdas que este divide en dos partes iguales.

480. Cuando se toma un plano diametral por el de las xy, y por eje de las z una recta conjugada con este plano, la sustitucion de $-z$ en vez de $+z$ no debe cambiar la ecuacion de la superficie, lo que exige que los términos en z de esta ecuacion sean, ó todos de grado par, ó todos de grado impar, no debiendo en este último caso existir término independiente de z. Cuando esto suceda el primer miembro de la ecuacion será divisible por z; y por lo tanto siendo esta ecuacion satisfecha por $z=0$ cualesquiera que sean x é y representa el conjunto del plano de las xy y de una superficie de grado par en z; de modo que dividiendo la ecuacion por z no quedarán mas que términos del grado par. Se deduce de aquí que *cuando una superficie admite un plano diametral, si se toma este plano por uno de los coordenados, la ecuacion no contendrá mas que potencias pares de la variable relativa al eje no situado en este plano.*

Recíprocamente; *cuando esta condicion es satisfecha* por la variable z por ejemplo, *el plano de las* xy *es diametral*, puesto que á cada valor de x y de y corresponden dos de z iguales y de signos contrarios.

Observacion. Si la ecuacion contiene un término en z, pero no contiene ningun otro término de grado impar con relacion á esta variable, el plano de las xy no será diametral, pero sí paralelo á uno de esta clase, porque se podrá en general hacer desaparecer el término en z por un simple cambio de orígen sobre el eje de las z.

Ejemplos. I. Las ecuaciones $$4z^2-3x^2y=48$$

$$z^4-3xz^2+4xy+2y=64$$

representan dos superficies que tienen por plano diametral el de las xy, siendo la direccion conjugada la del eje de las z.

II. Las superficies $$3z^2+2y^2+4xy+5z=92$$

$$5x^2+3y^2+7xy+6z=15$$

tienen un plano diametral paralelo al de las xy; pero en la segunda este plano diametral está en el infinito, porque el coeficiente de z^2 es nulo.

481. Planos diametrales conjugados. — Dos planos diametrales son *conjugados* cuando las cuerdas conjugadas con uno de ellos son paralelas al otro.

Cuando se toma dos planos conjugados por los de las xy y de las xz, y por ejes de las y y de las z rectas conjugadas respectivamente con estos planos, la ecuacion no debe contener mas que potencias pares de z y de y. Recíprocamente: si estas condiciones son satisfechas, el plano de las xy y el de las xz serán dos planos diametrales conjugados.

Los planos de las xy y de las xz serán tambien conjugados cuando haciendo girar el eje de las y en el plano de las xy y el de las z en el de las xz se pueda dar á la ecuacion la forma precedente.

Se dice que tres planos diametrales son *conjugados* cuando lo son cada dos de ellos.

Cuando los tres planos coordenados son conjugados la ecuacion de la superficie no debe contener mas que potencias pares de cada una de las variables.

Ejemplos. Los planos de las xy y de las xz son diametrales y conjugados con relacion á las superficies que representan las ecuaciones

$$4x^2+3xz^2-5z^2+3y^2=100$$

$$4x^2-6z^2y^2=25.$$

Los planos coordenados son conjugados relativamente á la superficie que tiene por ecuacion

$$x^2+3y^2+4z^2=25.$$

482. Planos diametrales principales. — Se llama *principal* todo plano diametral perpendicular á las cuerdas que divide en dos partes iguales.

Recíprocamente, las cuerdas conjugadas con un plano principal se llaman *cuerdas principales*.

483. Diámetros, ejes, vértices. — La interseccion de dos planos diametrales se llama *diámetro*, y el diámetro es *principal* cuando es la interseccion de dos planos principales. En este último caso se le llama tambien *eje*.

Se llama *vértice* el punto en que una superficie queda cortada por uno de sus ejes.

Tres diámetros son conjugados cuando están contenidos en planos diametrales conjugados.

484. *En toda superficie de segundo grado las diametrales son planos.*

Aunque la consideracion del grado correspondiente á una superficie diametral nos condujo ya (479) á este resultado lo podemos demostrar tambien del modo siguiente:

Recordemos primero que toda superficie de segundo grado queda cortada por un plano en una curva tambien de segundo grado (433, OBS.). Un diámetro de la seccion resultante tendrá evidentemente todos sus puntos sobre la superficie diametral conjugada con las cuerdas que divide en dos partes iguales.

Ahora sea S una superficie de segundo grado, y S' una de las diametrales de esta. Si por dos puntos cualesquiera tomados sobre S' se tira un plano P paralelo á las cuerdas conjugadas, estos dos puntos pertenecerán al diámetro conjugado con estas cuerdas en la curva de segundo grado que resulta de la interseccion del plano P con la superficie S. Pero este diámetro es una línea recta, y esta recta debe estar toda entera en la superficie diametral; luego esta superficie contiene toda línea recta que pasa por dos de sus puntos, y por lo tanto es un plano.

485. Ecuacion general de los planos diametrales de las superficies de segundo grado. — Hasta ahora no hemos hecho hipótesis alguna sobre la direccion de los ejes, pero en adelante los supondrémos rectangulares; lo que siempre es posible, porque lo es pasar de la ecuacion de una superficie referida á ejes oblicuos á la que lo esté á otros rectangulares, y ya sabemos que este cambio no altera el grado de la ecuacion. Así pues discutirémos sobre la ecuacion

$$\begin{aligned}Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy+2Cx\\+2C'y+2C''z+F=0\qquad (1),\end{aligned}$$

ó mas sencillamente $\quad f(x,y,z)=0,$

que representa una superficie de segundo grado referida desde luego á ejes rectangulares.

486. Planos diametrales conjugados con los ejes. — Es fácil obtener desde luego y con mucha sencillez los planos diametrales conjugados con los ejes. Supongamos, por ejemplo, que se trate del eje de las x: resolviendo la ecuacion con relacion á x se halla

$$x=-\frac{B''y+B'z+C}{A}\pm\sqrt{V},$$

representando por V cierta funcion de y y de z. Esto hace ver que para hallar los puntos de interseccion de una paralela al eje de las x con la superficie propuesta es preciso sumar y restar alternativamente la cantidad $\sqrt{V}$ y la abscisa x del punto en que esta paralela encuentra al plano dado por la ecuacion

$$x=-\frac{B''y+B'z+C}{A}$$

ó $$Ax+B''y+B'z+C=0\qquad (P):$$

luego el plano (P) es el diametral conjugado con el eje de las x.

OBSERVACIONES. I. La ecuacion [P] se reduce en realidad á $f'_x=0$; y por lo tanto los planos diametrales conjugados á los ejes quedan conocidos por medio de las ecuaciones

$$f'_x=0,\quad f'_y=0,\quad f'_z=0.$$

II. Las ecuaciones que han servido para determinar el centro de una superficie de segundo grado no eran otra cosa que las de los tres planos conjugados con los ejes.

III. Como el cálculo que venimos haciendo es independiente de la direccion de los ejes, $f'_x=0$ será la ecuacion del plano diametral conjugado con el eje x, aun cuando las coordenadas sean oblicuas.

IV. Cuando la cantidad V sometida al radical sea un cuadrado perfecto, podrá descomponerse la ecuacion [1] en dos factores de primer grado, y representará dos planos.

487. Plano diametral conjugado con una direccion dada. — Sean

$$x=az \quad é \quad y=bz \qquad [2]$$

las ecuaciones de esta direccion, y (x_1, y_1, z_1) el punto medio de una cuerda paralela á aquella. Trasladando á este punto el origen de las coordenadas, haciendo que los ejes se muevan paralelamente á sí mismos, la ecuacion de la superficie se convertirá en

$$f(x+x_1, y+y_1, z+z_1)=0 \qquad [3],$$

y las de la recta que determina la cuerda que se considera serán precisamente las [2], y dicha recta pasará por el nuevo orígen formando con los nuevos ejes los mismos ángulos que formaba con los antiguos. Eliminando x é y entre las ecuaciones [2] y [3] resultará

$$(Aa^2+A'b^2+A''+2Bb+2B'a+2B''ab)z^2$$
$$+(af'_x(x_1,y_1,z_1)+bf'_y(x_1,y_1,z_1)+f'_z(x_1,y_1,z_1))z+f(x,y,z)=0 \; [4],$$

cuya ecuacion tiene por raices los valores de z correspondientes á los dos estremos de la cuerda que se considera; y como estas raices deben ser iguales y de signo contrario es preciso que se verifique despues de suprimir los índices

$$af'_x + bf'_y + f'_z = 0 \qquad [r].$$

Como esta ecuacion queda satisfecha por las coordenadas del punto medio de una cuerda cualquiera paralela á la direccion dada, representa el plano diametral que se buscaba.

Observacion. La ecuacion $[r]$ queda satisfecha cuando se verifican $f'_x=0$, $f'_y=0$, $f'_z=0$, es decir, sustituyendo en ella las coordenadas del centro. Esto prueba que si la superficie tiene un centro, este debe hallarse en un plano diametral cualquiera; por consiguiente todos los planos diametrales pasan por el centro, lo que por otra parte es evidente.

488. Si

$$l=\cos\lambda, \quad m=\cos\mu, \quad n=\cos\nu$$

son los cosenos de los ángulos que la direccion dada forma con los ejes positivos, las ecuaciones de una recta tirada por el origen paralelamente á la direccion dada serán $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$, y se tendrá $a=\frac{l}{n}$, $b=\frac{m}{n}$, en cuya virtud podrá escribirse la ecuacion $[r]$ bajo la forma muy simétrica

$$lf'_x + mf'_y + nf'_z = 0.$$

Sustituyendo los valores de f'_x, f'_y y f'_z en esta ecuacion resultará

$$(Al+B''m+B'n)x+(B''l+A'm+Bn)y+(B'l+Bm+A''n)z$$
$$+Cl+C'm+C''n=0 \qquad [R].$$

Para acordarse de esta nueva forma se observará que el coeficiente de x es la mitad de la derivada con relacion á x de los términos de segundo grado de $f(x, y, z)$ despues de haber sustituido x por l, y por m y z por n. Una regla análoga dará los coeficientes de y y de z; y en cuanto al término conocido se dirá que es igual á la mitad de la suma de los de primer grado despues de hacer en ellos las mismas sustituciones.

OBSERVACIONES. I. El plano diametral correspondiente á la direccion dada se hallará situado en el infinito cuando se verifiquen simultáneamente

$$Al + B''m + B'n = 0, \quad B''l + A'm + Bn = 0, \quad B'l + Bm + A''n = 0.$$

Pero siendo cero los segundos miembros de estas ecuaciones, y no pudiéndolo ser á la vez los tres cosenos l, m y n, no puede en virtud de la teoría de las ecuaciones de esta forma presentarse esta circunstancia sino en el caso de que el denominador comun de los valores de m, n y l sacados de estas ecuaciones sea igual á cero; y como este denominador no es otro que el R de las coordenadas del centro (474), no puede presentarse la circunstancia de que nos ocupamos mas que en las superficies desprovistas de centro, ó en aquellas que tienen una infinidad de ellos.

II. No hay plano diametral correspondiente á la direccion dada cuando los coeficientes angulares a y b cumplen con la relacion

$$Aa^2 + A'b^2 + A'' + 2Bb + 2B'a + 2B''ab = 0,$$

pues entonces la ecuacion (4) admite una raiz infinita, y no hay cuerdas paralelas á la direccion dada.

489. **Planos y cuerdas principales.** — Para que el plano representado por la ecuacion (R) sea principal es preciso que sea perpendicular á la recta

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n},$$

que es su conjugada; por consiguiente debe verificarse que (452)

$$\frac{Al + B''m + B'n}{l} = \frac{B''l + A'm + Bn}{m} = \frac{B'l + Bm + A''n}{n} \quad [a],$$

que vienen á ser

$$\left.\begin{aligned} (A - s)l + B''m + B'n &= 0 \\ B''l + (A' - s)m + Bn &= 0 \\ B'l + Bm + (A'' - s)n &= 0 \end{aligned}\right\} \quad [A],$$

representando por s el valor comun de estas tres razones; hay además la ecuacion de condicion

$$l^2+m^2+n^2=1 \qquad [x].$$

Pero considerando como incógnitas en las ecuaciones [A] las cantidades l, m, n no serán compatibles dichas ecuaciones por los motivos indicados en la OBSERVACION I del número anterior sino cuando el denominador comun sea igual á cero. Se deberá pues tener

$$(A-s)(A'-s)(A''-s)-(A-s)B^2-(A'-s)B'^2-(A''-s)B''^2$$
$$+2BB'B''=0;$$

es decir
$$s^3-(A+A'+A'')s^2$$
$$+(AA'+AA''+A'A''-B^2-B'^2-B''^2)s+R=0,$$

ó lo que es mas sencillo

$$s^3+Ps^2+Qs+R=0 \qquad [s],$$

haciendo para abreviar

$$P=-(A+A'+A''),$$

$$Q=AA'+AA''+A'A''-B^2-B'^2-B''^2,$$

$$R=AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B''.$$

OBSERVACION. Ya hemos dado una regla mnemónica para acordarse del valor de R, denominador comun de las coordenadas del centro, por medio de la tabla

$$\begin{array}{lll} A, & A', & A'', \\ B, & B', & B'', \\ B, & B', & B''; \end{array}$$

pero esta misma tabla puede servir para acordarse de los otros coeficientes de la ecuacion [s]; porque P es igual á la suma de los números de la primera línea tomada con signo —; Q á la suma de los productos binarios de los números del primer renglon disminuida de los cuadrados de los números del segundo.

490. Como la ecuacion [s] es de tercer grado admite por lo menos una raiz real; y las ecuaciones [A] por lo menos una solucion real; por lo tanto existe á lo menos un plano principal.

Este plano principal podrá estar situado en el infinito, lo que sucederá si la ecuacion [s] tiene una raiz nula; pero esta circunstancia no se presenta mas que si $R=0$, es decir en las superficies desprovistas de centro, ó en las que tienen una infinidad de ellos.

Observacion. Si sacamos los valores de las relaciones $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$ de las ecuaciones [a], y los sustituimos en la [s], se podrá sacar de esta última dos valores de n iguales y de signos contrarios. Pero como las relaciones $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$ están determinadas, es claro que si n cambia de signo, l y m deben cambiar igualmente; luego las dos soluciones obtenidas así corresponden á dos segmentos de una misma direccion y no forman en realidad mas que un solo plano principal.

Demostrarémos mas adelante que la ecuacion [s] tiene sus tres raices reales, de donde resulta que existen siempre tres sistemas de planos principales ó á lo menos de cuerdas principales, y que no existen mas que tres, esceptuando sin embargo los casos de indeterminacion que examinarémos mas tarde.

§ III. — Reduccion de la fórmula de segundo grado con tres variables.

491. Eliminacion de los términos que contienen los productos de las variables. — Puesto que existe á lo menos un sistema de cuerdas principales tomemos el eje de las z paralelo á su direccion; es decir, supongamos $l=0$, $m=0$, $n=1$. Las ecuaciones [a] se reducen entonces á

$$\frac{B}{0}=\frac{B'}{0}=\frac{A''}{1},$$

y por consecuencia se debe tener

$$B=0 \quad B'=0;$$

es decir, que los términos en xz y en yz no deben entrar en la ecuacion de la superficie, que se encuentra así reducida á

$$A_1x^2+A'_1y^2+Nz^2+2B''_1xy+2Gx+2Hy+2Iz+F=0.$$

Pero por un cambio de ejes en el plano de las xy se puede siempre hacer desaparecer xy; y la ecuacion se reduce en definitiva á

$$Lx^2+My^2+Nz^2+2Gx+2Hy+2Iz+F=0 \qquad [2],$$

que representa todavía en coordenadas rectangulares todas las superficies de segundo grado.

492. **Ecuacion de las superficies que tienen un solo centro.** — Si despues de esta transformacion ninguno de los coeficientes de los cuadrados es igual á cero, se podrá hacer desaparecer los términos de primer grado trasladando el orígen al punto cuyas coordenadas son

$$x_1=-\frac{G}{L}, \quad y_1=-\frac{H}{M}, \quad z_1=-\frac{I}{N}.$$

Entonces la superficie tendrá por centro único el punto (x_1, y_1, z_1) y su ecuacion se reducirá á

$$Lx^2+My^2+Nz^2=T \qquad [I].$$

Si fuesen $L=0$ y $G=0$, no existirá el término en x, y se harán desaparecer los términos Hy é Iz, trasladando el orígen al punto $(0, y_1, z_1)$. La ecuacion toma en este caso la forma

$$My^2+Nz^2=T,$$

que está comprendida en la fórmula [I] suponiendo $L=0$, y que representa segun se ve un cilindro de base elíptica ó hiperbólica.

Si se tuviera $L=0$, $G=0$, $M=0$, $H=0$ el término en z desapareceria por un simple cambio de orígen sobre el eje de las z, y la ecuacion se reduciria á

$$Nz^2=T;$$

pero esta última ecuacion, que representa dos planos paralelos situados á igual distancia del xy, está comprendida todavia en la ecuacion [I], haciendo $L=0$, $M=0$.

De modo que la ecuacion [I] comprende todas las superficies que tienen un centro único, ó una infinidad de centros situados, sea en línea recta, sea sobre un mismo plano.

493. Ecuacion de las superficies que no tienen centro. — Si L es igual á cero sin que G lo sea, no será posible hacer que desaparezca el término en x, y la superficie no tendrá centro; pero se podrá eliminar el término conocido, así como los términos en y y en z, trasladando el origen al punto cuyas coordenadas son

$$x_1 = -\frac{F}{2G},$$

$$y_1 = -\frac{H}{M},$$

$$z_1 = -\frac{I}{N};$$

y la ecuacion toma entonces la forma

$$My^2 + Nz^2 = 2Ux \qquad [II].$$

Si fueran al mismo tiempo $L=0$, $M=0$, siendo G y H diferentes de cero, se puede hacer que desaparezca el término en z por un solo cambio de origen sobre el eje de las z; y la ecuacion toma la forma

$$Nz^2 + 2Gx + 2Hy + F = 0.$$

Esta superficie encuentra el plano de las xy segun la recta que tiene por ecuacion

$$2Gx + 2Hy + F = 0;$$

y es claro que si se trasporta el origen á un punto de esta recta, y se la toma por eje de las y, se deberá tener $x=0$ para $z=0$, cualquiera que sea y, lo que exige evidentemente que la ecuacion se reduzca á

$$Nz^2 = 2Ux.$$

Pero esta ecuacion que representa un cilindro de base parabólica está comprendida en la fórmula [II] suponiendo $M=0$.

494. **Resúmen.** — Toda ecuacion de segundo grado con tres variables puede reducirse á una de estas dos formas

$$Lx^2+My^2+Nz^2=T \qquad [I],$$

$$My^2+Nz^2=2Ux \qquad [II].$$

La primera conviene á todas las superficies que tienen un centro ó una infinidad de centros, y la segunda comprende las superficies que no le tienen.

La primera nos da á conocer que los planos actuales de coordenadas son los planos principales, y que la ecuacion (s) tiene entonces sus tres raíces reales. En la segunda el plano de las zx y el de las xy son principales, lo que nos manifiesta que la ecuacion (s) tiene en este caso dos raíces reales; luego la tercera es tambien real; pero como su valor es igual á cero, el plano principal correspondiente está situado en el infinito (490).

Débese concluir de esto que las tres raíces de la ecuacion (s) son reales en todos los casos, y que por lo tanto existen siempre tres planos principales perpendiculares entre sí, y tres sistemas de cuerdas principales tambien perpendiculares entre sí.

Observacion. Se puede establecer la realidad de las tres raíces de la ecuacion (s) por medio de una discusion directa; mas como no deja de ser bastante larga y minuciosa, y no es necesaria para demostrar la posibilidad de reducir la ecuacion de segundo grado con tres variables, hemos creido que se debe omitirla.

495. **Reduccion efectiva de la ecuacion de segundo grado á la forma mas sencilla.** — Lo que precede demuestra claramente la *posibilidad* de reducir la ecuacion propuesta á la forma

$$Lx^2+My^2+Nz^2+2Gx+2Hy+2Iz+F=0 \qquad [2],$$

y por lo tanto á una de las dos formas [I ó II]; pero nos falta indicar cómo se *hará* esta reduccion.

La resolucion de las ecuaciones [A] da en primer lugar para cada valor de s un sistema de valores de l, m, n: se tiene pues tres sistemas l, m, n; l', m', n'; l'', m'', n'', que representan los coeficientes de la direccion de los tres ejes rectangulares á los cuales es necesario referir la superficie para hacer desaparecer los productos de las variables; las fórmulas de transformacion son entonces [431].

$$x = lx' + l'y' + l''z'$$

$$y = mx' + m'y' + m''z'$$

$$z = nx' + n'y' + n''z'.$$

No tomando en esta sustitucion mas que los términos en x'^2 se halla fácilmente

$$L = Al^2 + A'm^2 + A''n^2 + 2Bmn + 2B'nl + 2B''lm.$$

Por otra parte, si se multiplican las ecuaciones [A] respectivamente por l, m, n y se suman, se hallará, teniendo presente la ecuacion [α],

$$Al^2 + A'm^2 + A''n^2 + 2Bmn + 2B'nl + 2B''lm = s;$$

luego L es una raiz de la ecuacion [s], y por lo tanto M y N serán las otras dos raices.

En cuanto á los valores de G, H, I se tendrá

$$G = Cl + C'm + C''n$$

$$H = Cl' + C'm' + C''n'$$

$$I = Cl'' + C'm'' + C''n''.$$

F no ha variado en todas estas transformaciones, puesto que no se ha cambiado el origen.

La reduccion ulterior á una de las dos formas [I] ó [II] no presentará dificultad. Si se trata de una superficie que tenga centro no habrá mas que calcular T, lo que ya sabemos hacer [475]. Cuando la superficie no tenga centro el coeficiente designado por U será la cantidad que hemos llamado G, cambiada de signo, y se calculará sacando de las ecuaciones [A] y [α] los valores de l, m, n, que corresponden á $s = 0$.

Para aclarar cuanto precede convendria poner aquí algunos ejemplos de reduccion de algunas ecuaciones numéricas; mas como aun no conocemos los diferentes géneros de superficies que la ecuacion (I) representa, y por otra parte son muy importantes la reduccion y discusion de las ecuaciones numéricas de segundo grado con tres variables las consagramos un capítulo especial que se hallará mas adelante. (Véase el capítulo VIII).

OBSERVACIONES. I. Se puede tomar para coeficiente de x^2 una cualquiera de las raices de la ecuacion (s); y á pesar de una diversidad aparente se tendrá siempre en el fondo el mismo sistema de ejes. En efecto, si se cambia L en M y M en L será necesario tambien cambiar l, m, n en l', m', n', y recíprocamente; por consecuencia poner H en vez de G y G en vez de H. Así la nueva ecuacion no se diferenciará de la precedente sino en que las letras x é y habrán sido permutadas, lo que se reduce á cambiar la denominacion de dos ejes.

II. Si $A''=0$, $B=0$, $B'=0$, la ecuacion (2) representará un cilindro paralelo al eje de las z; uno de los valores de s será nulo, y los coeficientes de x^2 y de y^2 en la ecuacion transformada serán las raices de la de segundo grado

$$s^2-(A+A')s+AA'-B''^2=0$$

Es fácil asegurarse en efecto de que en la reduccion de la ecuacion de segundo grado *con dos variables* el cálculo de los coeficientes de x^2 y de y^2 se reduce á la resolucion de esta ecuacion (véase la primera parte, núm. 172).

III. Si se calcula la funcion análoga á R de la ecuacion transformada se halla $-$MNL; este valor es precisamente igual á R segun una propiedad bien conocida de las ecuaciones. Así la funcion característica ha conservado su valor en la transformacion. Una circunstancia semejante se verificó en la reduccion de la ecuacion de segundo grado con dos variables.

496. La reduccion de la ecuacion general á la forma (2) puede hacerse á lo menos de una manera; pero se puede preguntar si existen varios sistemas de ejes que satisfagan á las mismas condiciones.

Para responder á esto, tomemos la ecuacion bajo la forma (2), y vamos á ver si es posible cambiar los ejes rectangulares en otros igualmente rectangulares, de tal modo que los productos de las variables que hemos hecho desaparecer no aparezcan de nuevo. Para esto es necesario hacer en las fórmulas [A]

$$A=L, \quad A'=M, \quad A''=N, \quad B=B'=B''=0,$$

y dar á s uno de los tres valores L, M ó N.

Si se hace primero $s=L$ se obtiene

$$\left.\begin{aligned} Ll&=lL \\ Mm&=mL \\ Nn&=nL \end{aligned}\right\} \qquad [A'].$$

La primera ecuacion queda satisfecha por sí misma; las otras dos no lo pueden ser si M y N son diferentes de L, sino por

$$m=\cos\mu=0, \quad n=\cos\nu=0,$$

y por lo tanto $\qquad l=\cos\lambda=1,$

valores que corresponden á los mismos ejes, ó á estos ejes cambiados de sentido.

Se llega á la misma conclusion suponiendo $s=M$ ó $s=N$. Por lo dicho se ve que mientras que las raices de la ecuacion [s] son desiguales no existe mas que un solo sistema de ejes que puedan servir para hacer desaparecer el producto de las variables siempre que se consideren como equivalentes los sistemas que no se diferencien mas que por la denominacion de los ejes ó por el sentido segun el cual se cuentan las coordenadas positivas. No pudiendo hacerse la reduccion á la forma [2] mas que de una manera, la ulterior á una de las dos formas [I] ó [II] no podrá igualmente hacerse mas que de una manera, de modo que no habrá mas que tres planos principales.

Si dos raices de la ecuacion [s] fueran iguales, si por ejemplo se tuviera $L=M$, la segunda de las ecuaciones [A'] seria verificada por todo valor de m; y por consiguiente permaneciendo el mismo el eje de las x, dos rectas perpendiculares entre sí y perpendiculares á este eje podrian tomarse por los de las y y de las z, sin que la forma de la ecuacion [1] cambiase. Pero en este caso toda seccion representada por las ecuaciones

$$z=\alpha, \quad Lx^2+Ly^2+Nz^2+2Gx+2Hy+2Iz+F=$$

es una circunferencia de círculo que tiene su centro sobre la paralela al eje de las z representada por

$$x=-\frac{G}{L}, \quad y=-\frac{H}{L};$$

luego es una superficie de revolucion que tiene por eje esta última recta. Es evidente, en efecto, que en una superficie de revolucion todo plano que pase por el eje es un plano principal.

Si las tres raíces de la ecuacion (s) fuesen iguales las ecuaciones (A') serian idénticas. Un plano cualquiera es entonces paralelo á uno principal, lo que se esplica con facilidad observando que en este caso la superficie representada es una esfera.

Luego entre las superficies de segundo grado no hay mas que las de revolucion que tengan una infinidad de planos principales.

CAPÍTULO VI.

CLASIFICACION DE LAS SUPERFICIES DE SEGUNDO GRADO.

§ I. — Clasificacion de las superficies con centro.

497. Consideraciones generales. — Todas las superficies que tienen centro están comprendidas, como lo hemos visto, en la ecuacion

$$Lx^2+My^2+Nz^2=T \qquad [1].$$

Suponiendo que despues de pasado el término conocido al segundo miembro sea positivo, condicion que se puede siempre satisfacer, no habrá más que examinar los casos siguientes:

1.° Los coeficientes del primer miembro son todos positivos:

2.° Uno solo de los coeficientes del primer miembro es negativo;

3.° Dos de estos coeficientes son negativos.

El caso en que los tres coeficientes sean negativos no debe considerarse, porque es claro que la ecuacion [1] no podria quedar satisfecha por ningun valor real de las variables, y no representaria ninguna superficie.

Toda superficie que tiene centro está comprendida en una de estas tres divisiones: solamente si algun coeficiente es nulo se puede mirar la superficie representada como perteneciendo á dos de estas clases entre las cuales sirve de transicion. Así, cuando $N=0$, la superficie puede ser considerada como un límite comun de aquellas en que N es positivo y de otras para las que N sea negativo. En fin, harémos notar de una vez para siempre que las superficies representadas por la ecuacion [1] son simétricas con relacion á los planos de coordenadas á que están referidas, y por lo tanto de la parte comprendida en el ángulo triédro de los ejes positivos será fácil deducir siempre las cortadas por los otros siete ángulos triédros.

498. Primer caso. Los tres coeficientes del primer miembro son positivos. — Género elipsóide.

Coordenadas en el orígen. Ejes. Ecuacion referida á los ejes. Si en la ecuacion de la superficie se hace $y=0$ y $z=0$, se obtiene $x=\pm\sqrt{\frac{T}{L}}$, cantidad real que representarémos por $\pm a$. La superficie corta, pues, al eje de las x en dos puntos A y A' (figura 181) situados á una distancia a del origen. Se verá de la misma manera que si se supone

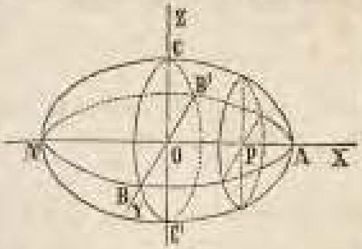


Fig. 181.

$$b=\sqrt{\frac{T}{M}}, \quad c=\sqrt{\frac{T}{N}}$$

la superficie corta al eje de las y en dos puntos B y B' á una distancia b del origen, y al de las z en dos puntos C y C' distantes la cantidad c del mismo.

Los seis puntos que acabamos de determinar son los *vértices* del elipsóide, y las rectas AA'$=2a$, BB'$=2b$, CC'$=2c$ los *ejes* del elipsóide. Para introducir sus longitudes en la ecuacion de la superficie basta reemplazar L, M, N respectivamente por $\frac{T}{a^2}, \frac{T}{b^2}, \frac{T}{c^2}$, y entonces, dividiendo por T, resulta

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad [E],$$

que es lo que se llama ecuacion referida á los ejes.

499. *Secciones principales.* Igualando á cero sucesivamente en [E] cada una de las variables se tendrá las trazas de la superficie sobre cada uno de los planos coordenados, ó lo que se llama las *secciones principales*. Así sus ecuaciones son

$$z=0, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

$$y=0, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

$$x=0, \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Estas tres secciones son elipses: la primera ABA'B' tiene por ejes $2a$ y $2b$; la segunda ACA'C', $2a$ y $2c$; la tercera BCB'C', $2b$ y $2c$. Se las llama *elipses principales*.

500. *Secciones causadas por planos paralelos á los coordenados: límites de la superficie.* Si se corta la superficie por un plano paralelo al de las zy, que pase á la distancia $OP = \alpha$, la seccion resultante tendrá por ecuaciones

$$x = \alpha, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{a^2},$$

que representan una elipse cuyos ejes son proporcionales á b y á c. Esta seccion se reduce a un punto si $\alpha^2 = a^2$, y es imaginaria si $\alpha^2 > a^2$.

Se deduce de aquí que el elipsóide está comprendido todo entero entre dos planos paralelos al de las zy tirados por los puntos A y A'.

Lo mismo puede decirse relativamente á los otros ejes, y se ve que el elipsóide está inscripto en un paralelepípedo rectángulo cuyas aristas son $2a$, $2b$, $2c$.

501. *Seccion por un plano cualquiera.* Cortando el elipsóide por un plano cuya ecuacion sea

$$z = mx + ny + p$$

la proyeccion de la seccion sobre el plano de las xy estará representada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(mx + ny + p)^2}{c^2} = 1.$$

La funcion característica $B^2 - 4AC$ es aquí

$$\frac{m^2n^2}{c^4} - \left(\frac{m^2}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{n^2}{c^2} + \frac{1}{b^2}\right),$$

ó

$$-\frac{m^2}{b^2c^2} - \frac{n^2}{m^2c^2} - \frac{1}{a^2b^2},$$

cantidad siempre negativa; luego esta proyeccion es una elipse. Así, la curva proyectada es de segundo grado, está situada sobre un cilindro de base elíptica y es tambien una elipse.

OBSERVACIONES. I. Cuando $a=b=c$, la ecuacion se reduce á

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

y representa una esfera; luego la esfera es un elipsóide cuyos ejes son iguales.

II. Si $b=a$, todas las secciones paralelas al plano de las xy son *círculos*; y se puede suponer que la superficie está engendrada por la elipse principal ACA'C' que gira alrededor del eje de las z, resultando así un elipsóide de revolucion.

III. Cuando $T=0$, la ecuacion no puede quedar satisfecha mas que por $x=0$, $y=0$ y $z=0$; y como estos valores representan un punto, que es el origen de coordenadas, podemos decir que el punto es una variedad del elipsóide.

IV. Cuando se supone $c=\infty$, la ecuacion del elipsóide se reduce á

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

que representa un cilindro de base elíptica. Esta variedad del género puede obtenerse aumentando indefinidamente uno de los ejes del elipsóide y conservando los otros dos constantes, ó haciéndolos variar segun una ley que les asigne límites finitos.

502. **Segundo caso. Un solo coeficiente negativo.** — GÉNERO HIPERBOLÓIDE DE UNA HOJA. Si se ponen los signos en evidencia la ecuacion se reduce á

$$Lx^2+My^2-Nz^2=T.$$

Coordenadas en el origen. Ejes.

Para $y=0$, $z=0$, se tiene $x=\pm\sqrt{\frac{T}{L}}$;

$x=0$, $z=0$, $y=\pm\sqrt{\frac{T}{M}}$;

$x=0$, $y=0$, $z=\pm\sqrt{\frac{-T}{N}}$.

Los dos primeros valores son reales, é indican que la superficie es encontrada por el eje de las x en dos puntos igualmente distantes del origen, y que lo mismo sucede respecto al eje de las y.

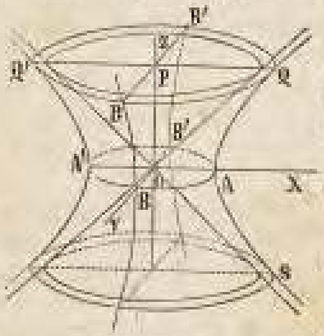


Fig. 182.

Pero siendo imaginarios los dos últimos, el eje de las z no la encuentra; luego no existen mas que cuatro vértices A, A', B, B' (figura 182).

Suponiendo como en el primer caso

$$a=\sqrt{\frac{T}{L}},\ b=\sqrt{\frac{T}{M}},\ c=\sqrt{\frac{T}{N}},$$

dirémos que $2a$, $2b$, $2c$ son los ejes del hiperbolóide, siendo los dos primeros transversos ó reales, y el tercero uno imaginario: introduciendo estas longitudes en la ecuacion de la superficie la transforman en

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad [H_1],$$

que no se diferencia de la ecuacion del elipsóide mas que en el cambio de c^2 en $-c^2$.

503. *Secciones principales.* Estas tienen por ecuaciones

$$x=0,\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$y=0,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$z=0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Las dos primeras QAA'Q', RBB'R', situadas respectivamente en el plano de las yz y en el de las xz, son hipérbolas cuyo eje imaginario coincide en direccion con el de las z. La seccion causada por el plano de las xy es una elipse ABA'B', cuyos ejes coinciden con los reales de la superficie, y se la llama *elipse de garganta.*

504. *Secciones paralelas á las principales.* Dando á z un valor constante γ, se tiene la ecuacion

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{\gamma^2}{c^2},$$

que representa la seccion de la superficie por un plano paralelo al de las xy, y hace ver que dicha seccion es una elipse QRQ'R' siempre real, y tanto mayor, cuanto mas lo sea γ^2. Así el hiperbolóide se compone de dos porciones indefinidas situadas á los dos lados del plano de las xy y que se unen por la elipse de garganta, no formando en realidad mas que una sola hoja ilimitada en los dos sentidos: de aquí su nombre de *hiperbolóide de una hoja.*

Un plano paralelo al de las zy tirado á la distancia α de este da una seccion representada por

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{\alpha^2}{a^2},$$

hipérbola cuyo eje transverso es paralelo al de las y cuando $\alpha^2<a^2$, y paralelo al de las z en el caso contrario. Cuando $\alpha^2=a^2$ la hipérbola se reduce á dos rectas. Las secciones paralelas al plano de las xz darian lugar á observaciones análogas.

Seccion por un plano cualquiera. Un cálculo semejante al que hemos hecho en el primer caso nos dará á conocer que el hiperbolóide de una hoja puede producir en su interseccion con un plano las tres curvas de segundo grado.

505. OBSERVACIONES. I. Si $a=b$, la elipse de garganta se reduce á un círculo, lo mismo que todas las secciones paralelas al plano de las xy. La superficie puede entonces ser engendrada por la revolucion de la hipérbola principal QAS alrededor del eje de las z.

II. Si T$=0$, la ecuacion

$$Lx^2+My^2-Nz^2=0 \qquad (4),$$

homogénea con relacion á las tres variables, representa un cono.

Si se le compara con el hiperbolóide representado por la ecuacion

$$Lx^2+My^2-Nz^2=T \qquad [2]$$

se llega á un resultado muy notable que vamos á dar á conocer.

Cono asimtótico. Si $P(x, y, Z)$ y $p(x, y, z)$ son los puntos en que una paralela al eje de las z corta al cono [1] y al hiperbolóide [2], tendrémos

$$NZ^2=Lx^2+My^2,$$

$$Nz^2=Lx^2+My^2-T,$$

de donde $$N(Z^2-z^2)=T,$$

y por lo tanto $$Z-z=\frac{T}{N(Z+z)}.$$

Pero si suponemos Z y z del mismo signo, lo que equivale á tomar los dos puntos P y p á un mismo lado del plano de las xy, á medida que se alejen del orígen, es decir, á medida que x é y crezcan indefinidamente, $Z+z$ crecerá del mismo modo; y por consiguiente la distancia entre las dos superficies tenderá hácia *cero*, sin llegar á ser jamás nula. Por esta propiedad ha recibido el cono [1] el nombre de *asimtótico* del hiperbolóide [2]. Su ecuacion puede ponerse bajo la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Será de revolucion si $a=b$

III. Cuando $c=\infty$, la ecuacion $[H_1]$ se reduce á

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

y representa un cilindro de base elíptica. Se tendria uno de base hiperbólica suponiendo $b=\infty$, permaneciendo c finito.

IV. Cuando sean al mismo tiempo $b=\infty$, $c=\infty$, la superficie se reduce á dos planos paralelos.

506. **Tercer caso. Dos coeficientes negativos.** — GÉNERO HIPERBOLÓIDE DE DOS HOJAS. Poniendo en evidencia los signos de los coeficientes se ve que la ecuacion es en este caso

$$Lx^2-My^2-Nz^2=T.$$

Ejes; vértices.

$$\text{Para}\quad y=0,\quad z=0,\quad \text{se tiene}\quad x=\pm\sqrt{\frac{T}{L}},$$

$$x=0,\quad z=0,\qquad y=\pm\sqrt{\frac{-T}{M}},$$

$$x=0,\quad y=0,\qquad z=\pm\sqrt{\frac{-T}{N}};$$

luego el eje de las x es el único que encuentra la superficie. Haciendo

$$a=\sqrt{\frac{T}{L}},\quad b=\sqrt{\frac{T}{M}},\quad c=\sqrt{\frac{T}{N}},$$

$2a$, $2b$, $2c$ son los ejes del hiperbolóide; pero como el primero solo es real, la superficie no tiene mas que dos vértices, á saber: los puntos A y A' (figura 183), en que la encuentra el eje de las x.

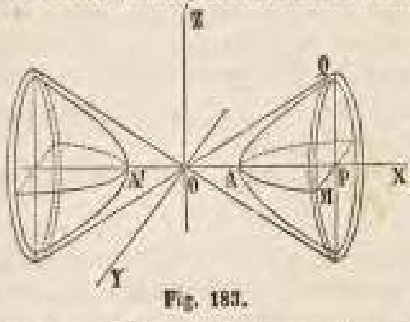


Fig. 183.

Introduciendo las longitudes de los ejes en la ecuacion de la superficie se reduce á la forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (H_2),$$

que no se diferencia de la ecuacion del hiperbolóide de una hoja mas que en el cambio de b^2 en $-b^2$.

507. *Secciones principales.* Estas vienen dadas por las ecuaciones

$$x=0,\quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1;$$

$$y=0,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

$$z=0,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

La primera es una elipse imaginaria, y las otras dos son hipérbolas cuyo eje transverso coincide con el de las x.

508. *Secciones paralelas á las principales. Límites de la superficie.* Una seccion paralela al plano de las zy tiene por ecuaciones

$$x=\alpha,\quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{\alpha^2}{a^2}-1,$$

y es en general una elipse. Pero esta elipse es imaginaria mientras sea $\alpha^2<a^2$, y se reduce á un punto cuando $\alpha^2=a^2$; luego no hay ningun punto de la superficie comprendido entre los dos planos perpendiculares al eje de las x tirados por los puntos A y A'. Pero si se tiene $\alpha^2>a^2$ la seccion es una elipse real que crece con α; luego la superficie se compone de dos hojas infinitas separadas la una de la otra y que se ensanchan cada vez más á medida que se alejan del plano de las zy. Por esta propiedad, y porque dos secciones principales son hipérbolas, se la ha dado el nombre de *hiperbolóide de dos hojas*.

Se verá de la misma manera que las secciones paralelas á los otros dos planos coordenados son hipérbolas.

Las producidas por planos cualesquiera pueden ser una de las tres curvas de segundo grado.

OBSERVACIONES. I. Si $b=c$, toda seccion paralela al plano de las zy es un círculo, y el hiperbolóide es entonces una superficie de revolucion que tiene por eje el de las x.

II. Cuando $T=0$ la ecuacion se reduce á

$$Lx^2+My^2-Nz^2=0,$$

y representa un cono.

III. El cono y el hiperbolóide que tienen respectivamente por ecuacion

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

son dos superficies asimtotas una de la otra. La demostracion es la misma que para el hiperbolóide de una hoja.

IV. El cilindro de base hiperbólica y un sistema de dos planos paralelos son casos particulares del hiperbolóide de dos hojas. El primero se obtiene suponiendo que b ó c son infinitos, y el segundo haciendo á un mismo tiempo b y c infinitos.

509. **Resúmen.** — Las superficies de segundo órden que tienen centro se dividen en tres géneros:

1.° Una superficie enteramente cerrada, EL ELIPSÓIDE, cuya ecuacion mas sencilla es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad [E],$$

y que comprende como variedades *el punto*, *el cilindro de base elíptica y el sistema de dos planos paralelos.*

2.° Una superficie ilimitada en todos sentidos, que no ofrece ninguna solucion de continuidad, EL HIPERBOLÓIDE DE UNA HOJA, cuya ecuacion mas sencilla es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad [H_1],$$

y que comprende como variedades *el cono*, *el cilindro de base elíptica ó hiperbólica y el sistema de dos planos paralelos.*

3.° Una superficie ilimitada en todos sentidos, compuesta de dos partes enteramente separadas una de otra, EL HIPERBOLÓIDE DE DOS HOJAS, cuya ecuacion mas sencilla es

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad [H_2],$$

y que comprende como variedades *el cono*, *el cilindro de base hiperbólica y el sistema de dos planos paralelos.*

§ II. — CLASIFICACION DE LAS SUPERFICIES QUE NO TIENEN CENTRO.

510. Consideraciones generales. — Las superficies que no tienen centro están comprendidas en la ecuacion

$$My^2+Nz^2=2Ux \qquad [II].$$

En esta podemos suponer que M sea siempre positivo, condicion que quedará satisfecha cambiando los signos de los dos miembros, y que el coeficiente U lo sea tambien, porque en el caso de que no lo fuera se le podia hacer cambiando el sentido segun el cual se cuentan las x positivas, lo que no influye mas que en la posicion de la superficie y de ninguna manera en su forma.

Admitido esto, la discusion de la ecuacion no comprende mas que dos casos, segun que los coeficientes del primer miembro sean los dos positivos ó el uno positivo y otro negativo.

511. Primer caso. Dos coeficientes positivos. — PARABOLÓIDE ELÍPTICO.

Eje. Vértice. Estando en el infinito uno de los tres planos principales la superficie no admite mas que un solo eje, que es el de las x; y es claro que este eje no encuentra á la superficie mas que en un punto que es el origen O (fig. 184), y que se llama el *vértice*.

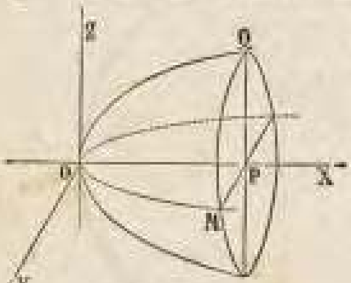


Fig. 184

Secciones principales. Una de ellas está en el infinito, y las otras dos vienen dadas por las ecuaciones

$$z=0, \quad y^2=\frac{2U}{M}x,$$

$$y=0, \quad z^2=\frac{2U}{N}x,$$

que representan dos parábolas. El plano de las zy no encuentra á la superficie mas que en el punto O, porque para $x=0$ la ecuacion únicamente puede ser satisfecha por $y=0$, $z=0$.

Si llamamos $2p$ y $2q$ los parámetros de las dos secciones principales puede ponerse la ecuacion de la superficie bajo la forma

$$\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=x \qquad \text{[PE]}.$$

Seccion paralela al plano de las zy. Una cualquiera de esta clase tiene por ecuacion

$$x=\alpha,\quad \frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=\alpha,$$

que representa una elipse real ó imaginaria, segun que α sea positiva ó negativa; luego la superficie está toda entera á la derecha del plano de las zy, y se estiende indefinidamente hácia las x positivas.

Seccion por un plano cualquiera. Si

$$z=\alpha x+\beta y+\gamma$$

es la ecuacion del plano considerado, la proyeccion de la seccion sobre el plano de las xy está representada por la ecuacion

$$\frac{y^2}{2p}+\frac{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2}{2q}=x.$$

La funcion característica B^2-4AC es en este caso

$$\frac{\alpha^2\beta^2}{q^2}-\frac{\alpha^2}{q}\left(\frac{1}{p}+\frac{\beta^2}{q}\right),$$

ó

$$-\frac{\alpha^2}{pq};$$

luego la seccion es una elipse, á menos que no se tenga $\alpha=0$; es decir, que el plano secante sea paralelo al eje; en este caso la seccion es una parabola.

Así es que ningun plano puede cortar á la superficie que examinamos sino por *elipses* ó *parábolas*; y de aquí el nombre que recibe de *paraboloide elíptico*.

OBSERVACIONES. I. Si $q=\infty$, la ecuacion se reduce á

$$\frac{y^2}{2p}=x,$$

y representa un *cilindro de base parabólica.*

II. Haciendo en la ecuacion $My^2+Nz^2=2Ux$, $U=0$ se reduce á $My^2+Nz^2=0$, que únicamente puede ser verificada por $y=0$, $z=0$; luego representa una *recta*, que no es otra que el eje de las x.

III. Si $p=q$, la ecuacion representa un paraboloide de revolucion.

512. Segundo caso. Dos coeficientes de signos contrarios. — PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO.

Poniendo los signos en evidencia la ecuacion es

$$My^2-Nz^2=2Ux.$$

Eje, vértice. Lo mismo esta superficie que la precedente no tiene mas que un eje, que es el de las x; y un solo vértice, que es el orígen.

Secciones principales. Están dadas por las ecuaciones

$$y=0, \quad -Nz^2=2Ux,$$

$$z=0, \quad My^2=2Ux.$$

Fig. 185.

Son dos parábolas que tienen su vértice en O (fig. 185) y por eje el de las x; pero la una se estiende hácia las x positivas y la otra hácia las negativas.

Designando por $2p$ y $2q$ sus parámetros se podrá dar á la ecuacion de la superficie la forma

$$\frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}=x \quad \text{(PH)}.$$

Secciones paralelas á los planos coordenados. Una seccion paralela al plano zy tiene por ecuacion

$$x=\alpha,\quad \frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}=\alpha;$$

y se ve que es una hipérbola cuyo eje transverso es paralelo al de las y ó al de las z, segun que α es positivo ó negativo; luego la superficie se estiende indefinidamente en el sentido de las x positivas y en el de las negativas. Si $\alpha=0$ la hipérbola se reduce á dos rectas.

Las secciones paralelas á los otros planos coordenados son parábolas iguales á las principales y semejantemente colocadas.

Seccion por un plano cualquiera. Cambiando q en $-q$ en el resultado obtenido para el caso del paraboloide elíptico se encuentra que las secciones planas de la superficie son siempre *hipérbolas* ó *parábolas*, y que este último caso no tiene lugar sino cuando el plano secante es paralelo al eje. De aquí el nombre de *paraboloide hiperbólico*.

Observaciones. I. Si $q=\infty$, la ecuacion se reduce á $\frac{y^2}{2p}=x$, y representa un cilindro de base parabólica.

II. Si en la ecuacion general se tiene $U=0$, la que discutimos se reduce á $My^2-Nz^2=0$, y representa dos planos que se cortan.

III. El paraboloide hiperbólico no puede ser jamás una superficie de revolucion, puesto que ningun plano puede cortarle segun una curva cerrada.

513. **Resúmen.**—Las superficies de segundo órden que no tienen centro se dividen en dos géneros:

1.° Una superficie indefinida en un sentido, el paraboloide elíptico, cuya ecuacion mas sencilla es

$$\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=x \qquad [PE],$$

y que comprende como variedades *la recta y el cilindro de base parabólica*.

2.° Una superficie indefinida en los dos sentidos, el parabo-

LÓIDE HIPERBÓLICO, cuya ecuacion mas sencilla es

$$\frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}=x \qquad [PII],$$

y que comprende como variedades *el sistema de dos planos que se cortan y el cilindro de base parabólica.*

514. Semejanza entre las superficies con centro y las superficies que no tienen centro. — Las superficies que acabamos de clasificar se distinguen por su aspecto de las que hemos estudiado en el primer párrafo, y justifican así las dos grandes divisiones que hemos adoptado. Sin embargo, las superficies que no tienen centro no se diferencian tanto de las que lo tienen que no se pueda pasar de estas á aquellas por modificaciones convenientes, y esto es lo que vamos á hacer ver.

Si tomamos el elipsóide representado por la ecuacion

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

y trasladamos el origen al vértice de la izquierda, la ecuacion vendrá á ser

$$\frac{x^2-2ax+a^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

ó

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{2x}{a},$$

y se la podrá escribir así

$$\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2\frac{b^2}{a}}+\frac{z^2}{2\frac{c^2}{a}}=x.$$

Pero si se hace crecer indefinidamente a, b, c de tal modo que se tenga constantemente

$$\frac{b^2}{a}=p, \quad \frac{c^2}{a}=q,$$

siendo p y q cantidades determinadas, y se hace en seguida $a=\infty$, se tendrá

$$\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=x \qquad \text{[PE]},$$

ecuacion del paraboloide elíptico.

Se podria tambien deducir este paraboloide del hiperboloide de dos hojas trasladando el origen al vértice de la derecha. Por consiguiente:

El paraboloide elíptico [PE] *puede considerarse como un elipsoide cuyo centro esté situado en el infinito sobre el eje de las* x *y del lado de las* x *positivas, ó como un hiperboloide de dos hojas cuyo centro esté situado sobre el mismo eje en el infinito, pero del lado de las* x *negativas.*

El cono asimtótico está en este último caso en el infinito y todas sus generatrices pueden ser consideradas como paralelas al eje.

Si en la ecuacion del hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{[H}_1\text{]}$$

se traslada el origen sobre el eje de las x á la distancia $+a$, y se hace en seguida variar los ejes de manera que $\frac{b^2}{a}$ y $\frac{c^2}{a}$ permanezcan constantes, y que a tienda hácia el infinito, se obtendrá en el límite el paraboloide hiperbólico.

$$\frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}=x \qquad \text{[PH]};$$

así, *el paraboloide hiperbólico* [PH] *puede ser considerado como un hiperboloide de una hoja cuyo centro esté en el infinito sobre el eje de las* x.

De aquí resulta esta conclusion importante: que las propiedades de las superficies que no tienen centro no pueden ser sino casos particulares de las que gozan las superficies que lo tienen. Por ejemplo, de que en una superficie de esta última especie se verifique que *todo plano diametral pase por el centro*, se deduce inmediatamente que en los dos paraboloides *todo plano diametral debe ser paralelo al eje.*

CAPÍTULO VII.

DE LAS SECCIONES PLANAS HECHAS EN LAS SUPERFICIES DE SEGUNDO ORDEN.

§ I. — Nociones sobre la semejanza de las curvas.

515. Se dice que dos curvas AB y A'B' (fig. 186) son semejantes y están semejantemente colocadas cuando se las puede considerar como engendradas por los estremos M y M' de dos radios vectores OM y O'M' que giran alrededor de dos puntos fijos O y O' de manera que en todo el curso de su movimiento permanezcan paralelos y dirigidos en el mismo sentido, y presenten además entre sus magnitudes la relacion constante k.

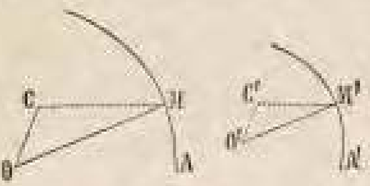


Fig. 185.

Las dos curvas se dirá que son *semejantes é inversamente colocadas*, si, permaneciendo las mismas las otras circunstancias, los radios vectores paralelos OM y O'M' permanecen constantemente dirigidos en sentidos contrarios.

La relacion constante k se llama *relacion de semejanza*.

Se dice que dos curvas son *semejantes de forma*, pero no de posicion, cuando haciendo girar la primera alrededor de un punto se puede hacer que sean semejantes y queden semejantemente colocadas.

Observaciones. I. No suponiendo que las curvas sean planas las definiciones precedentes pueden aplicarse á una reunion cualquiera de puntos sucediéndose sin interrupcion, ó ofreciendo soluciones de continuidad, debiendo ser tambien discontinuo en este último caso el movimiento de los radios vectores OM y O'M'. Pero no tenemos necesidad de considerar la teoría de la semejanza bajo un punto de vista tan general, siendo solo nuestro objeto aplicarla al estudio de las secciones planas hechas en las superficies de segundo órden.

II. Si la curva AB es plana, la A'B' lo será igualmente, y su plano será paralelo al de AB.

516. Los dos puntos O y O' se llaman *puntos homólogos*; pero en dos figuras semejantes existen una infinidad de puntos que juegan el mismo papel y que por esta razon llamamos tambien puntos homólogos.

Tomemos, en efecto, en la primera figura un punto C sobre la curva AB ó fuera; tiremos O'C' paralela á OC dirigida en el mismo sentido y de tal modo que se tenga

$$\frac{O'C'}{OC}=\frac{O'M'}{OM}=k,$$

y unamos C con M y C' con M'. Los dos triángulos OCM, O'C'M' son semejantes, porque tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales, y además es claro que están semejantemente colocados; luego C'M' es paralela á CM, está en el mismo sentido, y además

$$\frac{C'M'}{CM}=k.$$

Se deduce de aquí que las dos curvas pueden considerarse como engendradas por las rectas CM y C'M' que se mueven segun la ley definida anteriormente; por lo tanto C y C' son dos puntos homólogos.

Un punto cualquiera del espacio considerado como ligado á la primera figura tiene su homólogo en la segunda.

517 Se llaman *rectas homólogas* de dos figuras semejantes dos rectas de las cuales la una junta dos puntos de la primera figura, y la otra dos homólogos de la segunda; por ejemplo, las OC y O'C'.

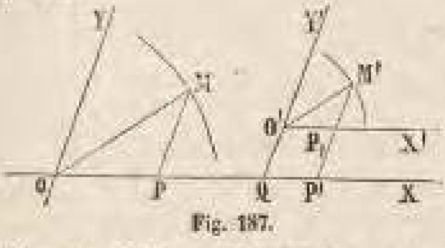


Fig. 187.

518. Condiciones de semejanza de dos curvas planas. — Supongamos primero que las dos curvas estén situadas en el mismo plano y referidas al mismo sistema de ejes; y sean $M(x, y)$ y $M'(x', y')$ (fig. 187) dos puntos homólogos tomados sobre las dos curvas, así como

$$f(x, y)=0 \qquad [1],$$

$$\varphi(x', y')=0 \qquad [2]$$

las ecuaciones de estas curvas. Considerando que el origen de coordenadas esté unido á la primera curva, que O' sea su homólogo en la segunda figura, que $OP=x$, $MP=y$, $OP'=x'$, $M'P'=y'$ sean las coordenadas de los puntos M y M'; $OQ=\alpha$, $O'Q=\beta$ las del punto O'; $O'P_1=x_1$, $M'P_1=y_1$ las coordenadas de M' con relacion al nuevo sistema de ejes paralelos á los antiguos y tirados por el punto O', los triángulos OMP y $O'M'P_1$ que son evidentemente semejantes darán

$$\frac{O'P_1}{OP}=\frac{M'P_1}{MP}=\frac{O'M'}{OM}=k;$$

es decir,
$$\frac{x_1}{x}=\frac{y_1}{y}=k.$$

Pero verificándose que

$$x_1=x'-\alpha,\quad y_1=y'-\beta,$$

será
$$\frac{x'-\alpha}{x}=\frac{y'-\beta}{y}=k,$$

de donde se saca $x'=kx+\alpha$, $y'=ky+\beta$.

Si se sustituyen estos valores en la ecuacion (2) deberá quedar satisfecha, y se tendrá

$$\varphi(kx+\alpha,\ ky+\beta)=0 \qquad (3).$$

Se obtiene así una relacion constante entre las coordenadas (x, y) de un punto de la primera curva, relacion que no puede ser otra que la ecuacion (1) ó está multiplicada por un factor constante.

Segun esto se deberá tener idénticamente

$$\varphi(kx+\alpha,\quad ky+\beta)=\lambda f(x, y),$$

conduciendo la verificacion de esta identidad á varias ecuaciones ordinariamente en mayor número que las incógnitas λ, α, β, k; y eliminando estas cuatro incógnitas se tendrá un cierto número de relaciones entre los coeficientes de las dos ecuaciones; es decir, las condiciones buscadas.

Observaciones. 1. Si las dos curvas propuestas están situadas en planos paralelos será necesario antes de aplicar el método precedente trasportar el plano de la primera curva paralelamente á sí mismo, hasta hacerle coincidir con el de la segunda.

II. Si se piden las condiciones para que dos curvas planas sean *semejantes de forma* solamente, pero no de posicion, será necesario, despues de haberlas llevado al mismo plano, hacer que una de ellas describa un ángulo μ, ó lo que viene á ser lo mismo, hacer girar á los ejes con relacion á la curva el ángulo $-\mu$. Hecho esto, se tratará las ecuaciones de las dos curvas como hemos dicho antes, pero se tendrá cinco incógnitas que determinar en lugar de cuatro, y por consiguiente una condicion menos que en el caso en que se pide que las curvas sean semejantes á la vez de forma y de posicion

519. EJEMPLO. **Condiciones para que dos curvas de segundo grado sean semejantes y estén semejantemente colocadas.**

Si
$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0 \qquad [1]$$
$$A'x^2+B'y^2+2C'xy+2D'x+2E'y+F'=0 \qquad [2]$$

son las ecuaciones de las dos curvas, y se cambia en la segunda x en $kx+\alpha$ é y en $ky+\beta$, se verificará

$$\left.\begin{array}{r} k^2(A'x^2+B'y^2+2C'xy) \\ +2k(A'\alpha+D'+C'\beta)x \\ +2k(B'\beta+C'\alpha+E')y \\ +A'\alpha^2+B'\beta^2+2C'\alpha\beta+2D'\alpha+2E'\beta+F' \end{array}\right\}=0 \qquad [3];$$

y no debiendo diferenciarse esta ecuacion de la [1] mas que por un factor constante λ, se tendrá

$$\left.\begin{array}{r} A'k^2=\lambda A \\ B'k^2=\lambda B \\ C'k^2=\lambda C \\ k(A'\alpha+C'\beta+D')=\lambda D \\ k(B'\beta+C'\alpha+E')=\lambda E \\ A'\alpha^2+B'\beta^2+2C'\alpha\beta+2D'\alpha+2E'\beta+F'=\lambda F \end{array}\right\} \qquad [4].$$

Vemos pues que hay seis ecuaciones y cuatro incógnitas, y que de las tres primeras se saca

$$\frac{\lambda}{k^2}=\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C} \qquad [5];$$

luego se debe tener $$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C} \qquad [6],$$

lo que demuestra este teorema : *Para que dos curvas de segundo grado sean semejantes y estén semejantemente situadas es necesario que los coeficientes de los términos de segundo grado sean proporcionales.*

520. Vamos ahora á demostrar que estas condiciones son suficientes. En efecto, supongámoslas satisfechas, y á fin de simplificar el cálculo imaginemos que se ha multiplicado por $\frac{A}{A'}$ los dos miembros de la ecuacion [2], lo que la reduce á la forma

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2D_1x+2E_1y+F_1=0$$

Las ecuaciones [5] darán por lo tanto $\lambda=k^2$, y las tres últimas de las [4] tomarán la forma

$$A\alpha+C\beta=kD-D_1 \qquad [7],$$

$$B\beta+C\alpha=kE-E_1 \qquad [8],$$

$$A\alpha^2+B\beta^2+2C\alpha\beta+2D_1\alpha+2E_1\beta+F_1=k^2F \qquad [9];$$

y las [7] y [8] darán los valores de α y de β, que sustituidos en la [9] harán conocer la relacion de semejanza k. De aquí se deduce que las condiciones [6] serán *en general* suficientes.

OBSERVACIONES. I. Las ecuaciones [7] y [8] dan $\alpha=\infty$ y $\beta=\infty$ cuando se tiene

$$C^2-AB=0,$$

es decir, en el caso de la parábola ; y las ecuaciones no son entonces compatibles como no se tenga

$$\frac{kD-D_1}{A}=\frac{kE-E_1}{C},$$

de donde se saca el valor de k.

Pero siendo satisfechas estas condiciones, las parábolas son semejantes, cualquiera que sea F_1. Además, como los coeficientes de los términos de segundo grado son los mismos, los ejes de las dos curvas son paralelos. Luego *dos parábolas que tienen sus ejes paralelos son semejantes y están semejantemente colocadas.*

Pero como haciendo girar una parábola se puede siempre hacer de modo que su eje sea paralelo al de otra dada, se puede decir que

Dos parábolas cualesquiera son semejantes.

II. El valor de k^2 sacado de la ecuacion (4) puede ser negativo, y por lo tanto k imaginario. Sin embargo, estando todavía satisfechas las condiciones *analíticas* de la semejanza continuarémos diciendo que las curvas son semejantes. Verémos bien pronto un ejemplo.

521. Condicion para que dos curvas de segundo grado sean semejantes sin estar igualmente colocadas.—Acabamos de tratar el caso de la parábola (**520**, OBS. I); no tenemos por lo tanto mas que ocuparnos de las curvas que tienen centro.

TEOREMA. *Cuando dos curvas de segundo grado con centro son semejantes, sus ejes son proporcionales y recíprocamente.*

Si se hace coincidir en direccion los ejes de las dos curvas estarán *semejantemente colocadas*, y sus ecuaciones deberán ser de la forma

$$Ax^2+By^2=H,$$

$$Ax^2+By^2=H'.$$

Sean a y b las longitudes, reales ó imaginarias, de los ejes de la primera curva, y se tendrá

$$a=\sqrt{\frac{H}{A}},\quad b=\sqrt{\frac{H}{B}},$$

y lo mismo para la segunda curva

$$a'=\sqrt{\frac{H'}{A}},\quad b'=\sqrt{\frac{H'}{B}},$$

de donde

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\sqrt{\frac{H}{H'}}.$$

La recíproca se demostrará tambien fácilmente.

OBSERVACIONES. I. El teorema puede demostrarse tambien de una manera geométrica por la definicion de la semejanza; pero aplicándole el cálculo se llega á una consecuencia digna de notarse. Si la relacion $\sqrt{\frac{H}{H'}}$ es imaginaria, no hay hablando propiamente semejanza en el sentido que hemos dado á esta palabra; pero se puede decir entonces que las curvas son analíticamente semejantes. Un ejemplo de esto se halla en las dos hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{-b^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{-m^2a^2}+\frac{y^2}{m^2b^2}=1,$$

que segun el cálculo tienen $m\sqrt{-1}$ por relacion de semejanza. En efecto, estas dos hipérbolas tienen las mismas asimtotas, pero la una está situada en el ángulo agudo y la otra en el obtuso. De modo que si se busca por el cálculo la distancia del centro á los puntos en que la recta de que acabamos de hablar encuentra á las dos curvas, se hallará una cantidad real para una de estas distancias, y una imaginaria para la otra; pero la relacion de sus *espresiones analíticas* es constante é igual á $m\sqrt{-1}$.

II. Las condiciones de semejanza están satisfechas por las dos ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$$

en que la primera representa una hipérbola, y la segunda sus dos asimtotas. Esto nos conduce á mirar el sistema de dos rectas como semejante á una línea curva. Para hacer esta conclusion menos estraña observemos que si se hace variar proporcionalmente los ejes de una hipérbola, se obtendrá una série de ellas semejantes y que tendrán todas las mismas asimtotas; pero á medida que los ejes se van haciendo menores las hipérbolas tienden cada vez mas á confundirse con sus asimtotas, que son así el límite de una serie de hipérbolas semejantes.

III. Lo que hemos dicho de las curvas cuyos ejes son proporcionales se aplica sin ningun cambio á las curvas que tienen los diámetros conjugados proporcionales y formando ángulos iguales.

522. TEOREMA. *Para que dos curvas* AB, A'B' (fig. 188) *situadas en dos planos paralelos sean semejantes y estén semejantemente situadas es necesario y suficiente que lo sean y estén sus proyecciones* ab, a'b' *sobre un mismo plano.*

Fig. 188.

Si OM y O'M' son dos radios vectores homólogos, y k la relacion de semejanza, tendrémos

$$\frac{O'M'}{OM}=k;$$

y suponiendo que sean om y $o'm'$ las proyecciones ortogonales de OM y de O'M' sobre el plano considerado, como las proyecciones de dos rectas paralelas sobre dos planos paralelos son paralelas se tendrá

$$\text{ángulo}\,(OM, om)=\text{ángulo}\,(O'M', o'm')=\alpha;$$

por lo tanto $\quad om=OM\cos\alpha,\quad o'm'=O'M'\cos\alpha,$

de donde
$$\frac{o'm'}{om}=k;$$

luego las dos curvas ab y $a'b'$ son semejantes.

RECÍPROCAMENTE: *cuando las proyecciones de dos curvas situadas en planos paralelos son semejantes tambien lo son las curvas.* Porque de la relacion

$$\frac{o'm'}{om}=k$$

se deduce
$$\frac{O'M}{OM}=k$$

OBSERVACION. Aunque hemos supuesto que las proyecciones son ortogonales, tiene lugar el teorema cuando las proyecciones son oblicuas; pero dejamos á los lectores el cuidado de demostrar este nuevo teorema, del que es un corolario la recíproca precedente.

§ II. — TEOREMAS RELATIVOS Á LAS SECCIONES PLANAS DE LAS SUPERFICIES DE SEGUNDO ÓRDEN.

523. TEOREMA. *Las secciones causadas por planos paralelos en una superficie de segundo órden son curvas semejantes y semejantemente colocadas.*

Tomando el plano de las xy paralelo á las secciones consideradas, y suponiendo además que los ejes de coordenadas sean paralelos á tres diámetros conjugados, la ecuacion de la superficie será de la forma (491)

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Cx+2C'y+2C''z+F=0,$$

y una cualquiera de las secciones estará representada por dos ecuaciones, tales como

$$z=\alpha,\quad Ax^2+A'y^2+2Cx+2C'y+A''\alpha^2+2C''\alpha+F=0.$$

Pero como en esta última los términos de segundo grado son independientes de la variable α, se ve que las secciones consideradas se proyectan sobre el plano de las xy segun curvas semejantes y semejantemente colocadas, y por lo tanto que las secciones mismas son curvas semejantes y semejantemente colocadas, lo que faltaba demostrar.

OBSERVACION. Nosotros damos aquí á la palabra *semejante* su significacion analítica. Así es que si el hiperbolóide de una hoja está cortado por un plano segun una hipérbola, todas las secciones paralelas serán hipérbolas que tendrán sus asíntotas paralelas; pero estas hipérbolas contenidas primero, por ejemplo, en el ángulo agudo de las asíntotas, se reducirán un poco mas lejos á estas asíntotas mismas, y mas lejos todavía pasarán á estar en el ángulo obtuso.

524. TEOREMA. *Todos los centros de las secciones producidas por planos paralelos en una superficie de segundo órden están situados sobre un diámetro de la superficie.*

Conservando las mismas notaciones, el centro de una de las secciones estará representado por las ecuaciones simultáneas

$$Ax+C=0 \qquad [1],$$

$$A'y+C'=0 \qquad [2],$$

$$z-\alpha=0 \qquad [3].$$

Como las dos primeras no tienen α, se deduce que todos los centros están situados sobre la recta determinada por estas dos ecuaciones; es decir, sobre un diámetro de la superficie, puesto que la ecuacion [1] representa el plano diametral conjugado con el eje de las x, y la [2] el conjugado con el eje de las y.

525. **Generacion de las superficies de segundo órden.**—Si S es una seccion hecha en la superficie propuesta, D un diámetro *transverso* de esta curva, D' su conjugado, y se imagina que la seccion S se mueve paralelamente á sí misma, la recta D engendrará un plano, puesto que pasa por el centro y resbala por consiguiente sobre un diámetro de la superficie; permanecerán siempre por lo tanto sus estremidades sobre una seccion plana S' de la superficie, es decir, sobre una curva de segundo grado. La recta D', siempre paralela á sí misma, conservará una relacion constante con D, y por último, el centro de S se moverá sobre el diámetro de S', que es conjugado con D. Se deduce de esto que

Toda superficie de segundo órden puede ser engendrada por una curva de segundo grado S que se mueva paralelamente á sí misma, de tal modo que uno de sus diámetros D quede siempre inscrito en otra fija del mismo grado, y que el conjugado D' varíe con D en una relacion constante.

Recíprocamente: *Toda curva de segundo grado sujeta á un movimiento de esta naturaleza engendra una superficie de segundo órden.*

En efecto, tomemos por eje de las z la recta que describe el centro de la curva móvil S, y que es un diámetro de la curva fija S'; supongamos además que el eje de las x y el de las y sean paralelos á los dos diámetros conjugados D y D'.

Permaneciendo siempre la curva S semejante á sí misma y paralela al plano de las xy estará representada por dos ecuaciones de la forma

$$\left.\begin{array}{r} Mx^2+Ny^2=T \\ z=\alpha \end{array}\right\} \qquad [G],$$

en las cuales M y N son constantes, y α y T parámetros variables con la posicion del plano de la curva.

Se puede suponer que la curva directriz S' esté colocada en el plano de las zx, de modo que el eje de las x sea uno de sus diámetros; entonces el conjugado será paralelo al de las z, y las ecuaciones de esta curva serán

$$\left.\begin{array}{r} Ax^2+Bz^2+2Cz=D \\ y=0 \end{array}\right\} \qquad [D].$$

Para espresar que las dos curvas se encuentran es necesario eliminar x, y y z entre las ecuaciones [G] y [D], lo que conduce á

$$A\frac{T}{M}+B\alpha^2+2C\alpha=D;$$

y si ahora se eliminan los parámetros variables α y T entre la ecuacion (G) y esta última, se obtendrá una relacion independiente de toda posicion particular de la generatriz, y que representará la superficie engendrada. Se encuentra así

$$Ax^2+\frac{AN}{M}y^2+Bz^2+2Cz=D,$$

ecuacion de una superficie de segundo órden referida á dos planos diametrales conjugados.

Observacion. Lo que acabamos de decir conviene á todas las superficies de segundo órden; pero se puede imaginar una generacion mas sencilla de los dos paraboloides. Hallándose estos comprendidos en la ecuacion

$$My^2+Nz^2=2Ux,$$

y toda seccion paralela al plano de las xy representada por las ecuaciones

$$z=\alpha, \quad My^2=2Ux-N\alpha^2,$$

que se refieren á parábolas iguales cuyos diámetros sean paralelos al eje de las x, pudiendo ser ademas cualesquiera los ejes, *un paraboloide puede ser engendrado por una parábola que se mueva paralelamente á sí misma sin cambiar de magnitud, de manera que uno de sus puntos recorra otra parábola fija cuyo eje sea paralelo al suyo.*

Se demostraria fácilmente la recíproca, á saber: que *toda parábola sujeta á un movimiento de esta especie engendra un paraboloide.*

526. Teorema. *Todo plano corta al hiperbolóide y á su cono asimtótico segun curvas semejantes.*

Si se refiere el hiperbolóide á tres diámetros conjugados, de los que dos sean paralelos al plano secante, la ecuacion de la superficie será

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1 \qquad [H],$$

siendo $2a$, $2b$, $2c$ las longitudes de los diámetros conjugados reales ó imaginarios, y positivo el signo del segundo miembro en el caso del hiperbolóide de una hoja, y negativo en el de dos. La ecuacion del cono asimtótico será en los dos casos

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad [C].$$

Pero dando á una de las tres variables el mismo valor constante en las ecuaciones [H] y [C] las resultantes representan dos curvas semejantes.

Observacion. Dos hiperbolóides del mismo género ó de género diferente, que tienen el mismo cono asimtótico, quedan cortados por un mismo plano segun curvas semejantes.

527. **Secciones circulares.**—Cuando un plano corta una superficie de segundo órden segun un círculo C, todos los paralelos á este la cortarán en círculos C′, C″, C‴, etc., cuyos centros se hallarán sobre un diámetro E de esta superficie. Imaginemos que por la recta E pasa un plano P, perpendicular á los de las secciones, y que corte á los círculos C, C′, C″ segun rectas D, D′, D″, etc. Todas las cuerdas que tiremos perpendiculares á estas

rectas en las secciones consideradas quedarán divididas por ellas en dos partes iguales, y como estas cuerdas son perpendiculares al plano P, se deduce que este es uno principal: se tiene, pues, el teorema siguiente:

Toda seccion circular de una superficie de segundo órden debe estar situada en un plano perpendicular á uno principal.

Llamarémos como Mr. Chasles *planos cíclicos* á los que por su interseccion con una superficie de segundo órden den secciones circulares.

Vamos ahora á pasar revista á las diversas superficies de segundo órden, y buscar si poseen planos cíclicos; y segun el teorema que acabamos de demostrar bastará considerar los planos paralelos á uno de los ejes principales de la superficie.

Sea primero un elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad [E];$$

y supongamos $\qquad a<b<c.$

Hagamos pasar un plano por el eje medio, que es aquí el de las y, y cortará la superficie segun una elipse que tiene por ejes $2b$ y un diámetro $2d$ de la principal representada por

$$y=0, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad [1].$$

Pero variando el diámetro $2d$ entre $2a$ y $2c$ habrá una posicion á la derecha del eje de las z, y otra simétrica á la izquierda, para las cuales se tendrá $2d=2b$, y en donde por lo tanto la seccion será un círculo.

Si θ es el ángulo que el diámetro $2d$ forma con la parte positiva del eje de las x, será tambien el del plano cíclico con el de las xy; y llamando x', z' á las coordenadas de la estremidad de este diámetro se tendrá

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1 \qquad [2],$$

y por ser $\qquad d=b$

$$x'=b\cos\theta, \quad z'=b\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Llevando estos valores á la ecuacion (2) se tendrá

$$\frac{b^2}{a^2}\cos^2\theta+\frac{b^2}{c^2}\text{sen}^2\theta=1=\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta,$$

de donde se saca con facilidad

$$\text{tang}^2\theta=\frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{\frac{b^2}{c^2}-1}=\frac{(a^2-b^2)c^2}{(b^2-c^2)a^2},$$

$$\text{tang}\,\theta=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}},$$

valores reales como se debia esperar.

Se probará fácilmente que un plano tirado por el eje mayor ó por el mas pequeño no puede dar secciones circulares.

Sea ahora un hiperbolóide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{(1)};$$

y supongamos $b>a$. Si hacemos pasar un plano por el mayor de los dos ejes reales, es decir, por el eje de las y, y por un diámetro transverso $2d$ de la hipérbola principal representada por

$$y=0,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

resultará por seccion una elipse que tendrá por ejes $2b$ y $2d$.

Este diámetro $2d$ es igual á $2a$ cuando el plano considerado está confundido con el de las xy, aumenta constantemente á medida que el plano secante se eleva, y acaba por ser igual á $2b$; sigue despues aumentando hasta llegar á ser infinito, pasa del infinito á cero, y habrá una posicion en que vuelva á ser igual á $2b$. Por consiguiente, existen dos planos cíclicos simétricamente colocados con relacion al de las xy, que pasan por el eje de las y.

Llamando θ el ángulo que el plano cíclico forma con el de las xy se hallará como en el caso precedente

$$\text{tang}\,\theta=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2+b^2}},$$

y se verá sin dificultad que ningun plano tirado por el eje de las z ni por el de las x puede ser cíclico.

La ecuacion del hiperbolóide de dos hojas puede ponerse bajo la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (H_2);$$

y resulta de lo que hemos dicho (528, obs.) que las secciones hechas por un mismo plano en las superficies H_1 y H_2 son curvas semejantes, suponiendo que los elementos principales a, b, c tienen los mismos valores en ambas superficies.

Luego la superficie H_2 posee igualmente dos séries de planos cíclicos paralelos á los de H_1. Segun esto, y observando que $2a$ y $2b$ son los ejes imaginarios de H_2, se podrá decir que existen en el hiperbolóide de dos hojas dos séries de planos cíclicos paralelos al mayor de los dos ejes imaginarios.

Considerando los paraboloides como límites de las superficies con centro (514) se hallará que el elíptico tiene dos séries de planos cíclicos perpendiculares al plano de la parábola principal que tenga el menor parámetro, y que el hiperbólico no tiene ninguno, lo que concuerda con la naturaleza de esta superficie, que como sabemos no puede tener por seccion plana una curva cerrada.

En resúmen, todas las superficies de segundo órden, á escepcion del paraboloide hiperbólico, admiten dos séries de planos cíclicos, de donde resulta que se las puede engendrar por el movimiento de traslacion de un círculo que tenga un diámetro constantemente inscripto en una curva de segundo grado.

Observacion. Las dos séries de planos cíclicos son paralelas al eje medio en el elipsóide, al mayor de los reales en el hiperbolóide de una hoja, y al mayor de los imaginarios en el de dos hojas. Todos estos enunciados pueden reducirse á uno solo si se conviene en ordenar los ejes reales ó imaginarios de una superficie con centro segun el órden de magnitud de las inversas de sus cuadrados y en considerar que una cantidad negativa es tanto menor cuanto mayor sea su valor absoluto; de este modo podria decirse que *en las superficies con centro los planos cíclicos son paralelos al eje cuya inversa, elevada al cuadrado, sea media proporcional entre los cuadrados de las inversas de los otros dos.*

§ III. — Secciones rectilíneas del hiperbolóide de una hoja y del parabolóide hiperbólico.

528. El objeto principal de este párrafo es demostrar que el hiperbolóide de una hoja y el parabolóide hiperbólico admiten dos sistemas de generatrices rectilíneas.

529. Generatrices rectilíneas del hiperbolóide de una hoja. — Teorema. *En cada punto del hiperbolóide de una hoja se puede trazar dos rectas.*

La ecuacion
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad [\mathrm{H}_1]$$

del hiperbolóide de una hoja puesta bajo la forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2},$$

ó
$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

hace ver que queda verificada, sea haciendo

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\alpha\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\} \qquad [\alpha],$$

ó bien

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\} \qquad [\beta],$$

cualesquiera que sean los valores que se atribuyan á α y β. Pero mirando α y β como dos parámetros variables, las ecuaciones $[\alpha]$ y $[\beta]$ representan dos sistemas diferentes de líneas rectas situadas en el hiperbolóide H_1.

Yo digo ahora que por cada uno de los puntos (x', y', z') del hiperbolóide pasa una recta del sistema $[\alpha]$ y otra del sistema $[\beta]$.

En efecto, se tiene

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1,$$

ó

$$\left(\frac{x'}{a}+\frac{z'}{c}\right)\left(\frac{x'}{a}-\frac{z'}{c}\right)=\left(1+\frac{y'}{b}\right)\left(1-\frac{y'}{b}\right),$$

y es evidente que tomando por α y β los valores sacados de las relaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{x'}{a}+\frac{z'}{c}&=\alpha\left(1+\frac{y'}{b}\right)\\ \frac{x'}{a}+\frac{z'}{c}&=\beta\left(1-\frac{y'}{b}\right)\end{aligned}\right\}\qquad (1),$$

las [α] y [β] serán las de dos rectas que pasan por el punto dado (x', y', z'). Además, solo existe una recta de cada sistema que pase por el punto dado, porque siendo las ecuaciones [1] de primer grado con relacion á α y β no dan mas que un valor para cada una de las incógnitas, y los valores hallados son los mismos que los que se sacaria de

$$\frac{x'}{a}-\frac{z'}{c}=\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{y'}{b}\right)$$

$$\frac{x'}{a}-\frac{z'}{c}=\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{y'}{b}\right),$$

que son una consecuencia de las ecuaciones [1] y [H_1].

530. TEOREMA. *Dos rectas de un mismo sistema no están en un mismo plano.*

Sean

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\alpha\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}\qquad [\alpha]$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\alpha'\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{\alpha'}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}\qquad [\alpha']$$

las ecuaciones de dos rectas del sistema [α]. Para que estas dos rectas estuviesen en un mismo plano sería preciso que unos mismos valores de x, y, z pudieran verificar sus ecuaciones; pero no siendo compatible cada una de las ecuaciones [α] con la correspondiente de [α′], sino cuando $\alpha = \alpha'$, resulta que las dos rectas propuestas no se hallan en un mismo plano. Se demostraria de la misma manera que dos rectas del sistema [β] no están en un mismo plano.

531. Teorema. *Dos rectas de diferente sistema están siempre en un mismo plano.*

Eliminando x, y y z entre las ecuaciones [β] y [α] se tiene la relacion idéntica

$$\alpha\beta = \beta\alpha;$$

luego las dos rectas que representan están en un mismo plano, lo que demuestra el teorema.

532. Teorema. *Las rectas que las ecuaciones α y β representan son las únicas que se puede trazar en la superficie del hiperbolóide de una hoja.*

En efecto, supongamos que una recta R situada en el hiperbolóide no pertenezca ni al sistema [α] ni al [β]. Concíbase tirada por un punto cualquiera de R otra R′ del sistema [α] (529), y que por cada uno de los puntos de R pasen rectas del sistema [β]; cada una de estas últimas encontrará á R′ (531), y por lo tanto estarán en un mismo plano, lo que es imposible (530).

533. Teorema. *Transportando al centro paralelamente á sí mismas todas las rectas situadas en el hiperbolóide coincidirán con el cono asimtótico.*

Porque las paralelas tiradas por el centro del hiperbolóide á las únicas rectas que se puede trazar sobre esta superficie, y que están representadas por [α] y [β], tienen por ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\alpha\frac{y}{b} \\ &\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{y}{b} \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=-\beta\frac{y}{b} \\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\beta}.\frac{y}{b} \end{array}\right\} \qquad [2],$$

y como eliminando α entre las ecuaciones [α] y [1], ó β entre las [β] y [2] resulta

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

que es la del cono asimtótico (**505**, obs. II), queda demostrada la proposicion.

534. Teorema. *Tres rectas que estén colocadas sobre el hiperbolóide de una hoja nunca pueden ser paralelas á un mismo plano.*

Porque si lo fuesen habria tres generatrices del cono asimtótico que estuviesen en un mismo plano; y esto es imposible porque dicho cono es de segundo grado.

535. Teorema. *El hiperbolóide de una hoja puede ser engendrado por una recta que resbale sobre tres rectas fijas que ni estén situadas de dos en dos en un mismo plano, ni sean paralelas á uno mismo.*

Si R, R', R" son tres rectas del sistema [α] se puede tirar otra del sistema β, y una sola por cada punto de una de aquellas, de R por ejemplo, y cortará á R' y R" (**531**): de este modo las rectas del sistema (β) pueden ser consideradas como las posiciones sucesivas de una recta móvil que resbala sobre las R, R', R" y que engendra por su movimiento el hiperbolóide. A causa de esta propiedad las rectas que las ecuaciones [α] y [β] representan toman tambien el nombre de *generatrices* del hiperbolóide.

536. Teorema. *Recíprocamente, cuando una recta resbala sobre otras tres fijas que ni están situadas de dos en dos en un mismo plano, ni son paralelas á uno mismo, engendra un hiperbolóide de una hoja.*

Sean R, R', R" (fig. 189) las tres rectas dadas no situadas de dos en dos en un plano ni paralelas á uno mismo. Si concebimos por cada una de estas dos planos respectivamente paralelos á las otras dos, estos seis planos formarán un paralelepípedo; y tomando por orígen el centro de este, por ejes rectas paralelas á las dadas, y designando por $2a$, $2b$, $2c$ las longitudes de las aristas del paralelepípedo, las rectas dadas tendrán respectivamente por ecuaciones

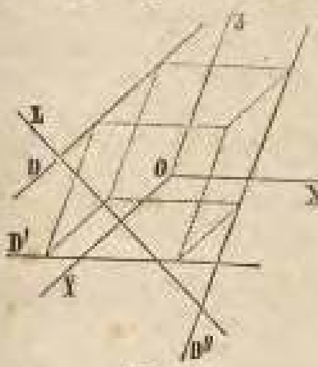


Fig. 189.

$$\left.\begin{array}{l} x=-a \\ z=c \end{array}\right\} [R], \quad \left.\begin{array}{l} y=b \\ z=-c \end{array}\right\} [R'],$$

$$\left.\begin{array}{l} x=a \\ y=-b \end{array}\right\} [R''].$$

Ahora bien; suponiendo que sean

$$\left.\begin{array}{l} x=mz+p \\ y=nz+q \end{array}\right\} \qquad [G]$$

las ecuaciones de la generatriz, para que la recta [G] encuentre á las dadas es necesario que

$$-a=mc+p \qquad [1],$$

$$b=-nc+q \qquad [2],$$

$$\frac{p-a}{m}=\frac{b+q}{n} \qquad [3].$$

Segun esto se tendrá la ecuacion de la superficie pedida eliminando m, n, p y q entre las [G], [1], [2] y [3], lo que dará

$$ayz+bxz+cxy+abc=0,$$

que representa un hiperbolóide de una hoja, puesto que la superficie es de segundo grado con centro único y con generatrices rectilíneas; luego el teorema queda demostrado.

Observacion. El hiperbolóide de dos hojas no admite generatrices rectilíneas. En efecto, observemos primero que una recta que tiene mas de dos puntos comunes con una superficie de segundo órden debe estar toda ella contenida en esta superficie; porque dos ecuaciones de primer grado y una de segundo no pueden quedar satisfechas por mas de dos sistemas de valores, sin tener todas sus soluciones comunes. Por consiguiente, una recta situada en el hiperbolóide de dos hojas no podria estar parte sobre una hoja y parte sobre la otra, puesto que los puntos colocados entre las dos hojas estarian fuera de la superficie: tampoco podria estar toda entera sobre una misma hoja, porque es evidente que una seccion plana hecha en una sola hoja no puede ser mas que una curva cerrada ó una parábola. Luego el hiperbolóide de dos hojas no admite generatrices rectilíneas.

537. Generatrices rectilíneas del parabolóide hiperbólico. — Teorema. *Por cada punto de la superficie de un parabolóide hiperbólico se puede trazar dos rectas.*

La ecuacion

$$\frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}=x, \quad ó \quad \frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x \qquad [PH]$$

del parabolóide hiperbólico puede ponerse bajo la forma

$$\left(\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}\right)=2x,$$

que queda verificada suponiendo

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}&=2\alpha x \\ \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}&=\frac{1}{\alpha} \end{aligned}\right\} \qquad [\alpha].$$

ó por la hipótesis

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}&=\beta \\ \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}&=\frac{2x}{\beta} \end{aligned}\right\} \qquad [\beta].$$

cualesquiera que sean los valores que se dé á α y β. Pero considerando α y β como dos parámetros variables $[\alpha]$ y $[\beta]$ son las ecuaciones de dos sistemas diferentes de rectas situadas en el parabolóide.

Por un punto (x', y', z') del paraboloide pasa una recta de cada sistema, y una sola. En efecto, se tiene por hipótesis

$$\frac{y'^2}{p}-\frac{z'^2}{q}=2x';$$

y es evidente que tomando para α y β los valores sacados de las relaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{y'}{\sqrt{p}}+\frac{z'}{\sqrt{q}}&=2\alpha x'\\ \frac{y'}{\sqrt{p}}+\frac{z'}{\sqrt{q}}&=\beta\end{aligned}\right\}\qquad [1],$$

serán $[\alpha]$ y $[\beta]$ dos rectas que pasen por el punto dado.

Además, no existen otras rectas que pasen por los puntos (x', y', z'), porque α y β son de primer grado en las ecuaciones [1], y los valores de las incógnitas sacados de las relaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{y'}{\sqrt{p}}-\frac{z'}{\sqrt{q}}&=\frac{1}{\alpha}\\ \frac{y'}{\sqrt{p}}-\frac{z'}{\sqrt{q}}&=2\gamma x'\end{aligned}\right\}$$

son los mismos que los sacados de [1], puesto que estas relaciones son una consecuencia de las ecuaciones [PH] y [1].

538. Teorema. *Dos rectas de un mismo sistema no están en un mismo plano.*

En efecto, considerando las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}&=2\alpha x\\ \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}&=\frac{1}{\alpha}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}&=2\alpha' x\\ \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}&=\frac{1}{\alpha'}\end{aligned}\right\}$$

de dos rectas del sistema [α], se ve que la primera y tercera no pueden quedar satisfechas por un mismo sistema de valores de x, y y z, sino cuando $\alpha=\alpha'$, y lo mismo sucede á la segunda y cuarta; luego las dos rectas de que se trata no se hallan en un mismo plano.

Para las rectas del sistema β se seguiria la misma demostracion.

539. TEOREMA. *Dos rectas de distinto sistema están siempre en el mismo plano.*

Eliminando x, y, z entre las ecuaciones [α] y [β] se llega a la identidad

$$\alpha\beta=\beta\alpha,$$

que prueba que dos rectas cualesquiera representadas por estas ecuaciones se hallan en un mismo plano.

540. TEOREMA. *Las rectas que las ecuaciones* [α] *y* [β] *representan son las mismas que se puede trazar en la superficie del paraboloide hiperbólico.*

La demostracion es la misma que en el núm. **532.**

OBSERVACION. El paraboloide elíptico no admite generatrices rectilíneas. Se demuestra del mismo modo que en el núm. 536

541. TEOREMA. *Todas las rectas de un mismo sistema son paralelas á un plano.*

Fijémonos en las del sistema α representadas por

$$\left.\begin{aligned}\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}&=2\alpha x\\ \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}&=\frac{1}{\alpha}\end{aligned}\right\},$$

y como sus proyecciones sobre el plano de las yz son paralelas, tambien lo serán sus planos proyectantes, y por lo tanto las rectas proyectadas serán igualmente paralelas á un mismo plano.

Se demostraria del mismo modo que las del sistema [β] son paralelas á un plano.

542. TEOREMA. *Se puede engendrar el paraboloide hiperbólico* *por una recta que se mueva apoyándose constantemente sobre otras tres paralelas á un mismo plano; y tambien por una recta que resbale sobre otras dos fijas conservándose en todo el movimiento paralela á un mismo plano.*

1.° Suponiendo que R, R′, R″ sean tres rectas de un mismo sistema, del (α) por ejemplo, se podrá tirar por cada punto de una de ellas otra del sistema (β) que corte á las otras dos; y de este modo puede considerarse que las del (β) son posiciones sucesivas de una misma que en todo su movimiento corta á R, R′, R″. Por consiguiente, puede mirarse el paraboloide hiperbólico como engendrado por el movimiento de una recta que va resbalando sobre otras tres fijas y paralelas á un mismo plano.

2.° Considerando dos rectas R y R′ del sistema (α), y que por cada punto de R pase otra del sistema (β), estas cortarán á R′ y además serán paralelas á un mismo plano (**541**). Luego tambien se puede considerar que el paraboloide hiperbólico se engendra por una recta que resbala sobre otras dos fijas y se conserva durante el movimiento paralela á un plano.

543. RECÍPROCAMENTE: 1.° *Cuando una recta resbala sobre tres fijas y paralelas á un mismo plano engendra un paraboloide hiperbólico; 2.° queda engendrada la misma superficie cuando una recta se mueve paralelamente á un plano resbalando sobre otras dos fijas.*

1.° Si R, R′, R″ son las tres rectas dadas paralelas á un mismo plano, y tomamos una de ellas, por ejemplo la R, por eje de las x; por el de las z una recta que corte á aquellas; y por el de las y una paralela á R′; la R″ será por hipótesis paralela al plano de las xy, y las rectas dadas tendrán por ecuaciones

$$\left.\begin{matrix} y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} (\mathrm{R}), \quad \left.\begin{matrix} x=0 \\ z=h \end{matrix}\right\} (\mathrm{R}'), \quad \left.\begin{matrix} y=ax \\ z=k \end{matrix}\right\} (\mathrm{R}'').$$

Ahora bien; suponiendo que

$$\left.\begin{matrix} x=mz+p \\ y=nz+q \end{matrix}\right\} \qquad (\mathrm{G})$$

sean las ecuaciones de la generatriz, sera preciso para que esta se apoye constantemente sobre las dadas, que sean

$$q=0, \quad mh+p=0, \quad a(mk+p)=nk+q.$$

Eliminando p, q, m y n entre estas ecuaciones y las [G] se tendrá la ecuacion de la superficie pedida; á saber:

$$kyz-a(k-h)xz-khy=0;$$

y como esta superficie es de segundo grado sin centro, tiene que ser un paraboloide hiperbólico, porque el elíptico no admite generatrices rectilíneas.

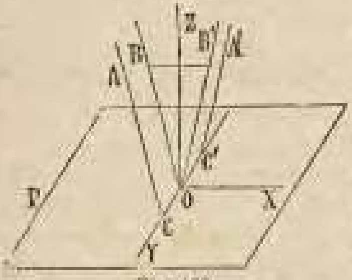


Fig. 190.

2.° Sean P el plano director, y AC, A'C' (fig. 190) las dos rectas dadas. Tírese por el punto O medio de CC' las OB y OB' respectivamente paralelas á las dadas, y tómese por eje de las y la CC' que une las trazas de estas rectas; por eje de las x la traza del plano BOB' sobre el P; y por el de las z la recta que una O con el medio de una paralela BB' á OX. Las ecuaciones de las dos directrices AC y A'C' serán

$$\left.\begin{matrix} y=b \\ x=az \end{matrix}\right\} [R], \quad \left.\begin{matrix} y=-b \\ x=-az \end{matrix}\right\} [R'];$$

las de la generatriz tendrán la forma

$$\left.\begin{matrix} z=p \\ y=mx+q \end{matrix}\right\} \qquad [G'];$$

y las condiciones para que esta generatriz corte á las directrices serán

$$b=map+q,$$

$$b=map-q$$

Eliminando m, p, q entre estas ecuaciones y las [G'] resulta $q=0$, y para ecuacion de la superficie pedida

$$yz=\frac{b}{a}x,$$

que es tambien la de un paraboloide hiperbólico, puesto que representa una superficie de segundo grado sin centro y de generatrices rectilíneas.

544. Es muy conveniente conocer otra forma bajo la cual pueden ponerse las ecuaciones que representan las generatrices rectilíneas del hiperbolóide de una hoja.

Sea
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad [1]$$

la ecuacion de esta superficie. Desde luego puede representarse una de sus generatrices por

$$\frac{x}{a}=m\frac{z}{c}+p, \quad \frac{y}{b}=n\frac{z}{c}+q \qquad [2],$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion de la superficie se hallará que, para satisfacerla independientemente de z, debe verificarse

$$m^2+n^2=1 \;[3], \quad mp+nq=0 \;[4], \quad p^2+q^2=1 \;[5].$$

Haciendo $z=0$ resulta $x=ap$ é $y=bq$, que son las coordenadas de un punto correspondiente á la elipse de garganta; y como sabemos que se halla un punto de esta elipse haciendo

$$x=a\cos\varphi \quad \text{é} \quad y=b\,\text{sen}\,\varphi,$$

siendo φ un ángulo auxiliar, quedará satisfecha la condicion [5] tomando

$$p=\cos\varphi \quad \text{y} \quad q=\text{sen}\,\varphi.$$

De este modo dará la relacion [4]

$$m=-n\,\text{tang}\,\varphi,$$

que sustituido en [3] produce

$$n^2(1+\text{tang}^2\varphi)=1,$$

de donde sale
$$n=\pm\cos\varphi,$$

y en su consecuencia $m=\mp\text{sen}\,\varphi$, debiendo tenerse cuidado de tomar á un mismo tiempo los signos superiores ó los inferiores. Por consiguiente, se tendrá una generatriz rectilínea adoptando los signos superiores, y será

$$\frac{x}{a}=-\frac{z}{c}\operatorname{sen}\varphi+\cos\varphi,$$

$$\frac{y}{b}=+\frac{z}{c}\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi \qquad [6];$$

y las ecuaciones de la otra que pase por el mismo punto resultarán de tomar los signos inferiores, lo que dará

$$\frac{x}{a}=+\frac{z}{c}\operatorname{sen}\varphi+\cos\varphi,$$

$$\frac{y}{b}=-\frac{z}{c}\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi \qquad [7].$$

El análisis precedente manifiesta que las dos generatrices que hemos hallado son las únicas rectas que pueden trazarse en la superficie por el punto (x, y, z).

Debe observarse, y servirá de método mnemónico, que se pasa del primero al segundo sistema cambiando c en $-c$.

545. Por medio de las ecuaciones [6] y [7] se demuestra con mucha facilidad cualquiera de las propiedades de las generatrices rectilíneas del hiperbolóide de una hoja.

Supongamos por ejemplo que se quiera demostrar que la proyeccion de una generatriz sobre el plano de la elipse de garganta es tangente á esta curva. Eliminando z entre las dos ecuaciones de una misma generatriz de cualquiera de los dos sistemas se hallará indistintamente para la proyeccion de que se trate

$$\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\operatorname{sen}\varphi=1 \qquad [8],$$

y elevando esta ecuacion al cuadrado y restándola ordenadamente de la

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1,$$

que representa la elipse de garganta, resultará

$$\left(\frac{x}{a}\operatorname{sen}\varphi-\frac{y}{b}\cos\varphi\right)^2=0,$$

de donde
$$\frac{x}{a}\operatorname{sen}\varphi-\frac{y}{b}\cos\varphi=0 \qquad [9].$$

Ahora bien; como las ecuaciones [8] y [9] no dan mas que un sistema de valores de x y de y, la proyeccion de la generatriz es tangente á la elipse de garganta.

La ecuacion general de un plano que pase por una generatriz del primer sistema es

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{b}\operatorname{sen}\varphi-\cos\varphi\right)+\lambda\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\cos\varphi-\operatorname{sen}\varphi\right)=0;$$

y cuando este plano pasa por el orígen se reduce á

$$\frac{x}{a}\operatorname{sen}\varphi-\frac{y}{b}\cos\varphi+\frac{z}{c}=0;$$

formas muy cómodas para la resolucion de varios problemas.

EJERCICIOS. I. *Dos círculos trazados en una superficie de segundo órden correspondientes á dos sistemas de secciones circulares están sobre una misma esfera.*

II. *Demostrar geométricamente que todo plano corta á un hiperbolóide de revolucion de una hoja por una curva de segundo grado que tiene sus focos en los puntos de contacto de dos esferas tangentes al plano secante y al hiperbolóide.*

III. *Las proyecciones de las generatrices del hiperbolóide de una hoja sobre los planos principales son tangentes á las secciones principales de dicha superficie.*

IV. *El lugar geométrico de los puntos de un hiperbolóide que cumplan con la condicion de que las generatrices que pasan por ellos sean perpendiculares entre sí es la interseccion de la superficie con una esfera concéntrica.*

V. *El lugar de los puntos de un parabolóide hiperbólico en los que las generatrices que pasan por ellos sean perpendiculares entre sí es una hipérbola cuyo plano es perpendicular al director del parabolóide.*

CAPÍTULO VIII.

ECUACIONES NUMÉRICAS.

§ I. — DISCUSION Y REDUCCION DE LAS ECUACIONES NUMÉRICAS DE SEGUNDO GRADO CON TRES VARIABLES POR MEDIO DE LA TRANSFORMACION DE COORDENADAS.

546. Consideraciones generales. — En este párrafo nos proponemos dar el medio de reconocer por la simple inspeccion de una ecuacion numérica el género de superficie que representa y el de sus elementos principales. La solucion de este problema está fundada en lo dicho en los capítulos V y VI; porque se ha visto allí que el género de la superficie depende de los signos de las cantidades L, M, N, coeficientes de los cuadrados de las variables en la ecuacion desembarazada de los rectángulos, y que L, M y N son las raices de una ecuacion de tercer grado

$$s^3 + Ps^2 + Qs + R = 0 \qquad [s],$$

que hemos aprendido á formar, y que teniendo reales todas sus raices, la regla de Descartes bastará para indicar á primera vista el signo de cada una de ellas. Esta ecuacion hará conocer los coeficientes L, M, N, y resolviendo las [A] y [a] del núm. 489 se tendrá la direccion de los ejes principales.

Veamos la marcha que debe seguirse en esta investigacion.

547. Investigacion preliminar. — Por medio de la regla mnemónica muy sencilla dada en el núm. 475 se formará la cantidad R: si se halla $R \gtrless 0$, se deducirá que la superficie admite un centro; y si $R = 0$, ó la superficie admitirá una infinidad de centros ó no tendrá ninguno.

548. Superficies con un solo centro. — Si la superficie admite un solo centro se calcularán las coordenadas de este punto y á él se trasladará el orígen. En esta transformacion los términos de segundo grado no cambian, los de primero desaparecen y el conocido pasa al segundo miembro adquiriendo un nuevo valor que designarémos por T. Entonces, suponiendo primeramente que T es diferente de 0, la ecuacion representará

UN ELIPSÓIDE REAL, si las raices de la ecuacion [s] tienen el mismo signo que T;

UNO IMAGINARIO, si estas raices son de signo contrario al de T;

UN HIPERBOLÓIDE DE UNA HOJA, si dos raices son del mismo signo que T y la tercera de signo contrario;

UNO DE DOS HOJAS, si dos raices son de signo contrario á T y la tercera del mismo signo

Cuando $T=0$, la ecuacion representará

UN PUNTO, si las tres raices de la ecuacion [s] tienen el mismo signo;

UN CONO, si hay por lo menos dos raices de signos contrarios.

549. Superficies que admiten una infinidad de centros. — Si las ecuaciones del centro se reducen á dos distintas, la superficie es un cilindro, y cuando se reducen á una sola, la superficie se compone de un sistema de dos planos paralelos.

En ambos casos la ecuacion [s] es de segundo grado. El cilindro será de base elíptica ó hiperbólica segun que la ecuacion [s] tenga sus raices del mismo signo ó de signo contrario.

Además, la seccion hecha por uno de los planos coordenados nos da á conocer si la superficie es un cilindro elíptico ó hiperbólico, ó tambien si es imaginario.

550. Superficies que no tienen centro. — Tambien en este caso es de segundo grado la ecuacion [s] y representa un parabolóide elíptico ó hiperbólico segun que las dos raices son del mismo signo ó de signo contrario; y será un cilindro de base parabólica cuando una de sus raices sea nula.

551. Superficies de revolucion. — Cuando la superficie es de revolucion la ecuacion [s] tiene dos raices iguales y se reduce á una de segundo grado. Este caso no ofrece dificultad.

552. El método de discusion que acabamos de emplear puede aplicarse aunque los ejes primitivos no sean rectangulares. Desde luego los caractéres por los cuales se conoce que una superficie admite un centro único, una infinidad de centros ó que no admita ninguno son independientes de la direccion de los ejes. En su consecuencia, si MPQO es el polígono de las coordenadas de un punto M perteneciente á una superficie de segundo grado S referida a coordenadas oblicuas, é imaginamos que PQ gira alrededor del punto Q hasta que venga á ser perpendicular al eje de las x, y que MP lo haga alrededor del punto P hasta quedarse perpendicular al plano de las xy, el punto M habrá venido á tomar una posicion M' sin que sus coordenadas hayan cambiado de magnitud: luego el lugar de los puntos M' será una superficie S', que tendrá en coordenadas rectangulares la misma ecuacion que la superficie S. Yo digo que estas dos superficies son del mismo género. Es evidente, en efecto, que si la superficie S es cerrada, se compone de una sola hoja indefinida ó de dos hojas, sucederá lo mismo á S'; por consiguiente la ecuacion (s) hará conocer todavía el género de la superficie; pero la magnitud de los ejes y su posicion con relacion á los de coordenadas no estarán dados por las ecuaciones (s), (A) y (u).

Vamos á aclarar toda esta teoría con ejemplos.

553. Aplicaciones. I. Sea la ecuacion (1)

$$25x^2+22y^2+16z^2+16yz-4zx-20xy+26x-40y-44z+44=0.$$

Por medio del cuadro mnemónico (474)

$$\begin{array}{rrr} 25 & 22 & 16 \\ 8 & -2 & -10 \\ 8 & -2 & -10 \end{array}$$

se halla

$$R=25.8^2+22.2^2+16.10^2-25.22.16-2.8.2.10=-5832;$$

luego la superficie admite un centro. Se hallarán las coordenadas de este punto resolviendo las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} 25x-10y-\ 2z=13 \\ -10x+22y+\ 8z=20 \\ -\ 2x+\ 8y+16z=22 \end{array}\right\} \qquad (C),$$

de donde se deduce

$$x=1, \quad y=1, \quad z=1,$$

y segun la regla del núm. 475

$$T=-44+13+20+22=11.$$

Calculando por medio del cuadro mnemónico los otros coeficientes de la ecuacion (s) se halla

$$P=-25-22-16=-63$$

$$Q=25.22+25.16+22.16-8^2-2^2-10^2=1134;$$

se tiene, pues, $\quad s^3-63s^2+1134s-5832=0 \qquad [s].$

Las tres raices de esta ecuacion son positivas. Luego la superficie (1) es un elipsóide.

Como la ecuacion [s] tiene por raices 9, 18 y 36 se reduce la ecuacion (1) á

$$9x^2+18y^2+36z^2=9$$

ó

$$x^2+2y^2+4z^2=1.$$

Los ejes principales son

$$1,\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad y \quad \tfrac{1}{2}.$$

Si se quiere conocer la direccion de los nuevos ejes con relacion á los antiguos, será necesario llevar sucesivamente las tres raices de la ecuacion [s] á dos de las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} 25l-10m-\ 2n&=ls \\ -10l+22m+\ 8n&=ms \\ -\ 2l+\ 8m+16n&=ns \end{aligned}\right\} \qquad [A].$$

Las dos ecuaciones que se elijan harán conocer las relaciones $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$, y combinadas con la relacion

$$l^2+m^2+n^2=1 \qquad [\alpha]$$

determinarán los cosenos de los ángulos de los nuevos ejes. Conservando las mismas notaciones que en el núm. 430 se halla

$$\begin{aligned} &(x',x)=\ 70^\circ31'50'', && (y',x)=(x',y), && (z',x)=(x',z) \\ &(x',y)=\ 48^\circ11'20'', && (y',y)=(x',x), && (z',y)=(x',y) \\ &(x',z)=131^\circ48'40'', && (y',z)=(x',y), && (z',z)=(x',x). \end{aligned}$$

II. Habiendo enseñado suficientemente nuestro primer ejemplo la marcha del cálculo, en los siguientes entrarémos en ménos detalles.

Sea la ecuacion propuesta

$$2x^2+3y^2+4z^2+8yz+6xz+4xy-6x-8y-14z+20=0 \qquad [1].$$

Se halla $\quad R=1,\quad x_1=1,\quad y_1=2,\quad z_1=-1,\quad T=38,$

$$s^3-9s^2-s+1=0 \qquad [s].$$

La superficie admite un centro y es un hiperboloide de una hoja, porque la ecuacion [s] tiene dos raices del mismo signo que T.

Resolviendo la ecuacion [s] se halla que sus raices son 9,1, 0,3, −0,4; por consiguiente la ecuacion simplificada de la superficie será aproximadamente

$$9{,}1x^2+0{,}3y^2-0{,}4z^2=38 \qquad [\mathrm{H}_1].$$

III. $$x^2+6yz+8zx-4xy+2x+4y-14z+64=0,$$

$$R=77,\quad x_1=1,\quad y_1=1,\quad z_1=0,\quad T=0,$$

$$s^3-s^2-28s+77=0 \qquad [s].$$

La superficie es un cono, puesto que siendo T nulo las raices de la ecuacion [s] no son todas del mismo signo.

Se llega á la misma conclusion notando que la ecuacion da un valor real de z para todo valor de x y de y.

IV. $$5x^2+10y^2+17z^2+26yz+18zx+14xy+6x+8y+10z+64=0 \quad [1],$$

$R=0$; luego la superficie no tiene centro ó admite una infinidad. Para saber cuál de estos dos casos tiene lugar busquemos las ecuaciones del centro

$$\left.\begin{array}{l} 5x+7y+9z=-3 \\ 7x+10y+13z=-4 \\ 9x+13y+17z=-5 \end{array}\right\} \qquad [\mathrm{C}];$$

y como la tercera resulta sumando las dos primeras multiplicadas respectivamente por −1 y +2 se deduce que la superficie es un cilindro.

Traslademos el origen al punto en que la línea de los centros encuentra al plano de las xy; y como se halla para este punto

$$x=-2,\quad y=+1,\quad z=0,$$

se concluye $\quad T=66;$

se tiene además $\quad P=-32,\quad Q=6;$

la ecuacion [s] desembarazada de su raiz nula es entonces

$$s^2-32s+6=0 \qquad [s].$$

y da $\quad s=16\pm5\sqrt{10};$

y como estas dos raices son positivas y T lo es tambien, se deduce que el cilindro es de base elíptica. Su ecuacion mas sencilla es

$$(16+5\sqrt{10})x^2+(16-5\sqrt{10})y^2=66 \qquad [\mathrm{CE}].$$

V. Hemos ya dado en el capítulo V, núm. **478**, ejemplos de ecuaciones que representan dos planos paralelos; por consiguiente el lector debe ocuparse nuevamente de aquellos.

VI. $$5x^2+5y^2+8z^2+4zy+4zx-8xy+6x+6y-3z=0$$

se halla $R=0$, y las ecuaciones del centro son

$$\left.\begin{array}{r} 5x-4y+2z=-3 \\ 4x-5y-2z=3 \\ x+y+4z=\frac{3}{4} \end{array}\right\} \qquad [C].$$

Sumando las dos últimas se reproduce el primer miembro de la primera; pero el segundo es diferente: luego la primera es incompatible con las otras dos, y por lo tanto la superficie es del género paraboloide.

La ecuacion [s] es $$s^2-18s+81=0 \qquad [s],$$

que teniendo sus dos raíces positivas manifiesta que la superficie no puede ser mas que un paraboloide elíptico.

Al resolverla se encuentra que sus dos raíces son iguales á 9; luego el paraboloide es de revolucion, y su ecuacion mas sencilla

$$9y^2+9z^2=2Ux.$$

Para hallar U se cambia en dos de las ecuaciones [C] x en l, y en m y z en n, y se suprime el segundo miembro, lo que da

$$\left.\begin{array}{r} 4l-5m-2n=0 \\ l+m+4n=0 \end{array}\right\} \qquad [A],$$

y si se añade $$l^2+m^2+n^2=1 \qquad [\alpha],$$

se sacará $$l=\frac{2}{3},\quad m=\frac{2}{3},\quad n=-\frac{1}{3};$$

por consiguiente $$G=3.\frac{2}{3}+3.\frac{2}{3}+\frac{3}{2}.\frac{1}{3}=\frac{9}{2}$$

y $$2U=-2G=-9.$$

La ecuacion mas sencilla de la superficie es, pues,

$$y^2+z^2=-x.$$

554. Ejemplos de discusion de las ecuaciones literales.—I. El siguiente ejemplo se propuso en 1861 para su composicion en los exámenes por escrito para el ingreso en la Escuela Politécnica.

Sea $$ax^2+by^2+cz^2+2axy+2bzx+2cz-1=0.$$

En primer lugar observarémos que la superficie representada por esta ecuacion está referida á su centro; y para saber si tiene una infinidad de estos formarémos la funcion R, que es

$$R = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Como esta funcion se reduce á cero haciendo $a = -(b+c)$ es divisible por $a+b+c$, y haciendo la division resulta que se la puede escribir bajo la forma

$$R = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2].$$

Por consiguiente para que pueda haber varios centros en la superficie es preciso que se verifique,

ó que $a+b+c=0$, ó que $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$.

Cuando se verifica la segunda igualdad resulta $a=b=c$; de modo que entonces se reduce la ecuacion propuesta á

$$(x+y+z)^2 = \frac{1}{a};$$

es decir, representa dos planos paralelos.

La ecuacion en s es

$$s^3 - (a+b+c)s^2 - (ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2)s + R = 0.$$

Haciendo $$a+b+c = A$$

$$ab+ac+bc-a^2-b^2-c = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2] = B^2,$$

y observando que $R = AB^2$ resulta

$$s^3 - As^2 - B^2 s + AB^2 = 0.$$

Esta ecuacion queda satisfecha por $s = A$, y por consiguiente sus tres raices son A, B y $-B$.

Por lo tanto la ecuacion de la superficie propuesta referida á sus planos principales es

$$Ax^2 + By^2 - Bz^2 = 1;$$

y como los coeficientes de y^2 y z^2 tienen necesariamente signos contrarios, jamás puede representar un elipsóide.

Las diferentes hipótesis que pueden hacerse sobre A ó sobre $a+b+c$ son

$$A>0,\quad A<0 \quad ó \quad A=0.$$

En el primer caso representa la ecuacion propuesta *un hiperbolóide de una hoja*; en el segundo *uno de dos*, y en el tercero *un cilindro hiperbólico* cuya base es *una hipérbola equilátera*, siendo los ejes rectangulares.

Puede que la superficie sea de revolucion; pero sabemos que para esto es preciso que la ecuacion en s tenga dos raices iguales (496); luego debe tenerse

$$A=\pm B \quad ó \quad A^2=B^2.$$

Esta última igualdad se reduce á la siguiente:

$$ab+ac+bc=0 \quad ó \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0,$$

que es la condicion necesaria para que la superficie representada por la ecuacion propuesta sea de revolucion.

II. $$2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+F=0 \qquad (1),$$

$$R=-2BB'B'',\quad Q=-(B^2+B'^2+B''^2),\quad P=0,$$

$$s^3-(B^2+B'^2+B''^2)s-2BB'B''=0 \qquad (s).$$

Como la ecuacion (s) carece de segundo término no puede tener todas sus raices del mismo signo; y por consiguiente la superficie (1) solamente podrá ser un hiperbolóide si B, B', B'' son diferentes de cero. En este caso sea T el término conocido de la ecuacion reducida; y si BB'B'' tiene el mismo signo que T tendrá la ecuacion s dos raices del mismo signo que T, y la superficie será un *hiperbolóide de una hoja*, y será de dos *hojas* en el caso contrario.

Cuando B=0 la ecuacion (s) viene á ser despues de quitada la raiz cero

$$s^2-(B'^2+B''^2)=0.$$

La superficie es un paraboloide hiperbólico, pues las otras dos raices tienen signos contrarios.

555. Basta con estos ejemplos para conocer la marcha que debe seguirse en la discusion de las ecuaciones numéricas de segundo grado; mas como esta cuestion es complicada hemos formado el siguiente cuadro que presenta al primer golpe de vista el conjunto de las operaciones y todos cuantos casos pueden ocurrir:

CUADRO DE LAS DISCUSIONES REFERENTES Á SUPERFICIES DE SEGUNDO ÓRDEN.

ECUACIONES Y CÁLCULOS.

$\left.\begin{matrix} Ax^2 + 2Byz + 2Cx \\ A'y^2 + 2B'zx + 2C'y \\ A''z^2 + 2B''xy + 2B''z \end{matrix}\right\} + F = 0,$	[4]	Ecuacion propuesta.
$s^3 + Ps^2 + Qs + R = 0,$	[s]	Idem característica.
$P = -A - A' - A''$ $Q = AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2$ $R = AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B''$		Valores de los coeficientes de la ecuacion característica.
$F'_x = Ax + B''y + B'z + C = 0$ $F'_y = B''x + A'y + Bz + C' = 0$ $F'_z = B'x + By + A''z + C'' = 0$	[C]	Ecuaciones que determinan el centro.
$Al + B''m + B'n = ls$ $B''l + A'm + Bn = ms$ $B'l + Bm + A''n = ns$ $l^2 + m^2 + n^2 = 1.$	[A]	Las que hacen conocer la direccion de los ejes.
$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = T$	[I]	Ecuacion reducida de las superficies que tienen centro.
$My^2 + Nz^2 = 2Ux$	[II]	Idem de las que no tienen centro.
$L, M, N,$		Raices de la ecuacion [s].
$T = F + Cx_1 + C'y_1 + C''z_1,$		x_1, y_1, z_1, coordenadas del centro
$U = -Cl - C'm - C''n$		l, m, n, valores sacados de las ecuaciones [A], y correspondientes á $s = 0$.

DISCUSION PROPIAMENTE DICHA.

Superficies con un solo centro $R \gtrless 0$.	Centro no situado en la superficie $T > 0$.	$L > 0, M > 0, N > 0,$	Elipsóide real.
		$L < 0, M < 0, N < 0,$	Idem imaginario.
		$L > 0, M > 0, N < 0,$	Hiperbolóide de una hoja.
		$L > 0, M < 0, N < 0,$	Idem de dos hojas.
	Centro situado en la superficie $T = 0$,	L, M, N no todos del mismo signo.	Cono.
		L, M, N todos del mismo signo.	Punto.
Superficies que tienen una infinidad de centros $R = 0$, $L = 0$.	*En línea recta:* las ecuaciones [C] se reducen á dos.	$M > 0, N > 0,$	$T > 0$ Cilindro elíptico. $T = 0$ Una recta.
		$M < 0, N < 0,$	$T > 0$ Cilindro imaginario. $T = 0$ Una recta.
		$M > 0, N < 0,$	$T > 0$ Cilindro hiperbólico. $T = 0$ Dos planos que se cortan.
	Sobre un plano: las ecuaciones [C] se reducen á una sola.	$M = 0, N > 0,$	$T > 0$ Dos planos paralelos. $T = 0$ Uno solo.
		$M = 0, N < 0,$	$T > 0$ Dos planos imaginarios. $T = 0$ Un solo plano.
Superficies que tienen un solo centro colocado en el infinito $R = 0$, $L = 0$.	Una de las ecuaciones [C] es incompatible con las otras dos.	$M > 0, N > 0,$	Parabolóide elíptico.
		$M > 0, N < 0,$	Idem hiperbólico.
		$M = 0, N \gtrless 0,$	Cilindro parabólico.

§ II. Otros métodos para discutir las ecuaciones numéricas de segundo grado con tres variables.

556. El método espuesto en el párrafo anterior nada deja que desear cuando se quiere conocer, no solamente el género de la superficie, sino además sus elementos principales y su posicion con respecto á los ejes coordenados; pero si el único objeto es saber el género de la superficie se puede abreviar empleando uno ú otro de los dos siguientes:

557. **Primer método.**—Este se funda en ciertas transformaciones algebráicas hechas en el primer miembro de la ecuacion de la superficie propuesta (igualada á cero) y en el lema siguiente:

Lema. *Si* $$X=0,\ Y=0,\ Z=0$$

son las ecuaciones de tres planos que se cortan en un punto, y se toma estos por coordenados, á saber, el primero por el de las $y'z'$, *el segundo por el de las* $x'z'$ *y el tercero por el de las* $x'y'$ *se reducirán las ecuaciones de estos planos á las respectivas siguientes:*

$$lx'=0,\quad my'=0,\quad nz'=0,$$

en que l, m *y* n *son cantidades constantes.*

En efecto, como la ecuacion del plano de las $y'z'$ es $x'=0$, si en $X=0$ se sustituye en vez de x, y y z sus valores en funcion de las nuevas coordenadas x', y', z', la resultante no debe diferenciarse de x' sino en un factor constante; y tendrá por consiguiente la forma $lx'=0$. Por la misma razon las ecuaciones $Y=0$ y $Z=0$ se reducirán á la forma $my'=0$ y $nz'=0$; por lo que el teorema queda demostrado.

558. Para hallar la espresion de los valores de las constantes l, m, n imagínese que por un punto cualquiera M se haya tirado MQ paralela al eje de las x' y MP perpendicular al plano $X=0$; con lo que si la ecuacion de este plano tiene la forma $Ax+By+Cz+D=0$, y si los primeros ejes son rectangulares se tendrá

$$MP=\pm\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Por otra parte, llamando α el ángulo que formen las dos rectas MP y MQ, que es el mismo para todas las posiciones del punto M, se tendrá tambien

$$MP = \pm x' \cos\alpha,$$

de donde $$l = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} . \cos\alpha.$$

Se tomará el signo $+$ ó el $-$ segun el lado hácia el cual esté el punto M con relacion al plano $X = 0$.

Del mismo modo se tiene los valores de m y n.

559. Consideremos ahora la ecuacion

$$\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bzy + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx \\ + 2C'y + 2C''z + F = 0 \qquad [1]. \end{aligned}$$

Las transformaciones que vamos á hacer sobre el primer miembro se fundan en las dos identidades siguientes:

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{a}(ax + b)^2 + c - \frac{b^2}{a}$$

ó $$ax^2 + 2Bx + c = \frac{1}{a}(ax + b)^2 - H, \qquad [2],$$

y $$pq = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 \qquad [3].$$

En la primera, H representa una cantidad independiente de x que puede ser positiva, negativa ó cero, y la cantidad que hay entre paréntesis es la *mitad de la derivada* del primer miembro con relacion á x. En la segunda, p y q designan cualesquiera cantidades.

Bajo este supuesto debemos considerar dos casos:

560. PRIMERO. *Cuando no falten á un mismo tiempo los cuadrados de las tres variables.*

Sea $A \gtreqless 0$.

Ordenando con relacion á x el primer miembro de la ecuacion [1], y considerándole como un trinomio en x, se le podrá escribir en virtud de la identidad [2], bajo la forma

$$\frac{1}{A}(Ax+B'z+B''y+C)^2+ay^2+a'z^2+2byz+2cy+2c'z+f=0.$$

Puede suceder que a *y* a' *no sean al mismo tiempo cero, sino que por ejemplo sea* a $\gtreqless 0$. En este caso por una transformacion semejante á la precedente se podrá escribir el polinomio

$$ay^2+a'z^2+2byz+2cy+2c'z+f \qquad [4]$$

bajo la forma $\frac{1}{a}(ay+bz+c)^2+a_1z^2+2b_1z+f_1$;

y *cuando* $a_1 \gtreqless 0$ se tendrá tambien

$$a_1z+2b_1z+f_1=\frac{1}{a_1}(a_1z+b_1)^2-H;$$

luego la ecuacion [1] puede transformarse definitivamente en

$$\frac{1}{A}(Ax+B'z+B''y+C)^2+\frac{1}{a}(ay+bz+c)^2+\frac{1}{a_1}(a_1z+b_1)^2=H,$$

ó representando por X, Y y Z tres funciones lineales de las variables en

$$\frac{1}{A}X^2+\frac{1}{a}Y^2+\frac{1}{a_1}Z^2=H \qquad [A].$$

Si fuese $a_1=0$, la ecuacion [1] vendria á ser

$$\frac{1}{A}(Ax+B'z+B''y+C)^2+\frac{1}{a}(ay+bz+c)^2+2b_1z+f=0,$$

ó bien
$$\frac{1}{A}X^2+\frac{1}{a}Y^2+\frac{1}{a_1}Z=0 \qquad [B].$$

Cuando á la vez fuesen a$=0$ *y* a'$=0$ el polinomio [4] se convertiria en

$$2byz+2cy+2c'z+f=\frac{1}{2b}(2by+2c')(2bz+2c)-H,$$

en que H representa una constante que puede ser cero. Pero en virtud de la identidad [3] se puede reemplazar el producto $(2by+2c')(2bz+2c)$ por una diferencia de cuadrados; luego la ecuacion [1] puede tomar la forma [A].

Si fueran simultáneamente $a=0$, $a'=0$, $b=0$ se reduciria el polinomio [4] á $2cy+2c'z+f$, y la forma de la ecuacion [1] quedaria comprendida en [B] suponiendo $Y=0$.

561. Segundo caso. — *Cuando* $A=A'=A''=0$ los tres rectángulos de las variables no pueden ser cero á un mismo tiempo.

Si $B \gtreqless 0$ se reduce la ecuacion [1] á

$$2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+F=0 \quad [5],$$

y se puede escribir

$$\frac{1}{2B}(2Bz+2B''x+2C')(2By+2B'x+2C'')-\frac{2B'B''}{B}x^2$$
$$+2\left(C-\frac{B'C'+B''C''}{B}\right)x+F-\frac{2C'C''}{B}=0,$$

en que las cantidades colocadas entre los primeros paréntesis son las derivadas del primer miembro de la ecuacion con relacion á y y á z.

Si $B'B'' \gtreqless 0$ se podrá sustituir el producto que indican los paréntesis por la diferencia de dos cuadrados en virtud de la identidad [3], y el trinomio en x que hay fuera de los paréntesis por la suma de un cuadrado y de una cantidad constante en virtud de la identidad [2]: luego la ecuacion [5] se podrá poner bajo la forma [A].

Cuando $B'B''=0$ volvemos á encontrarnos en la forma [B].

Cualesquiera que sean los casos particulares que puedan presentarse se llegará siempre á escribir la ecuacion numérica propuesta bajo una forma que se hallará comprendida en las [A] ó [B], admitiendo que Z é Y puedan ser idénticamente iguales á cero; y entonces se conocerá el género de superficie que representa operando del siguiente modo:

Tómense por planos coordenados los que representan

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0;$$

y en virtud del *lema* las ecuaciones (A) y (B) vienen á ser respectivamente

$$\frac{1}{A}l^2x'^2+\frac{1}{a}m^2y'^2+\frac{1}{a_1}n^2z'^2=H \qquad \text{(I)}$$

y

$$\frac{1}{A}l^2x'^2+\frac{1}{a}m^2y'^2+\frac{1}{a_1}nz'=0 \qquad \text{(II)}.$$

Suponiendo que sea la ecuacion (I) la que se tenga se presentarán los siguientes casos:

1.° *Que los tres coeficientes* A, a, a_1 *tengan el mismo signo que* H: entonces la ecuacion (I) representa un elipsóide real referido á un sistema de diámetros conjugados.

2.° *Si los tres coeficientes* A, a, a_1 *tienen signo contrario al de* H, la ecuacion representa un *elipsóide imaginario*.

En ambos casos se reduce la superficie á un punto cuando H=0.

3.° *Cuando dos coeficientes tienen el mismo signo que* H *y el tercero contrario*, la ecuacion (I) representa *un hiperbolóide de una hoja*.

4.° En el caso de que *el signo de dos coeficientes sea contrario al de* H, la superficie representada por la ecuacion (I) es *un hiperbolóide de dos hojas*.

En estos dos últimos se reduce la superficie á *un cono* si H=0.

Del mismo modo se discutirá la ecuacion (II).

562. Observaciones. I. Cuando Z sea igual á cero la ecuacion propuesta se reduce á

$$\frac{1}{A}X^2+\frac{1}{a}Y^2=H,$$

y entonces tomando por planos coordenados los X=0, Y=0 y otro que corte á los dos primeros, se podrá poner bajo la forma

$$\frac{1}{A}l^2x'^2+\frac{1}{a}m^2y'^2=H,$$

que representa un *cilindro elíptico* si A y *a* tienen el mismo signo que H; *uno hiperbólico* si uno de dichos coeficientes tiene el mismo signo y otro el contrario que H.

Por último, si Z é Y fuesen idénticamente nulos se reduciria la ecuacion á

$$\frac{1}{A}X^2=H,$$

y representaria dos planos paralelos.

II. Lo que precede supone que los tres planos $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ se cortan en un punto, como efectivamente se verifica cuando la transformacion se efectúa del modo que lo hemos hecho; mas se puede formar arbitrariamente, ó hallar por consecuencia de otro cálculo ecuaciones de la forma (A) ó (B) en que no se cumplan estas condiciones. Es fácil conocer que en este caso la ecuacion propuesta representa un cilindro ó alguna de sus variedades, ya sea que los planos $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ se corten en una misma recta, se confundan ó sean paralelos. En efecto, si los tres planos se cortan en una misma recta, como una de las ecuaciones debe ser consecuencia de las otras dos, se tendrá por ejemplo

$$Z=\alpha X+\beta Y.$$

Cuando no se corten los tres planos ó la interseccion de los dos primeros será paralela al tercero, y se tendrá

$$Z=\alpha X+\beta Y+\gamma,$$

ó los tres serán paralelos, y se verificará que

$$Z=\alpha X+k, \quad Y=\beta X+k'.$$

La ecuacion propuesta será en los dos primeros casos funcion de X é Y, y en el tercero lo será de X solamente. Supongamos que se tenga $f(X, Y)=0$ y que tomamos por planos coordenados los dos $X=0$, $Y=0$ y otro cualquiera que corte á los dos primeros; con esto se convertirá la ecuacion de la superficie en

$$f(lx', my')=0,$$

que representa un cilindro de generatrices paralelas á la interseccion de los planos $X=0$ é $Y=0$.

Cuando se tenga $f(X)=0$, tomando por planos coordenados el

$X=0$ y otros dos cualesquiera que se corten entre sí y al primero se reducirá la ecuacion de la superficie á

$$f(lx')=0,$$

y representará dos planos paralelos al $X=0$; es decir, una de las variedades del cilindro.

III. Cuando la ecuacion propuesta represente un hiperbolóide de una hoja ó un parabolóide hiperbólico, se hallará las ecuaciones de sus generatrices descomponiendo aquella en factores, como se indicó en el § III del capítulo precedente, despues de haberla puesto bajo una de las formas [A] ó [B].

Vamos á esclarecer lo que precede por medio de varios ejemplos.

563. Ejemplos. I. Volvámonos á ocupar de la ecuacion ya tratada en el número **443**

$$25x^2+22y^2+16z^2+16yz-4xz-20xy-26x-40y-44z+44=0.$$

Se principia por escribir el primer miembro bajo la forma

$$\frac{1}{25}(25x-2z-10y-13)^2+22y^2+16z^2+16zy-40y-44z+44$$
$$-\frac{1}{25}(25x-2z-10y-13)^2;$$

despues se reduce la parte que hay fuera del primer paréntesis á

$$18y^2+\frac{396}{25}z^2+\frac{72}{5}zy-\frac{252}{5}y-\frac{1152}{25}z+\frac{931}{25},$$

y se escribe

$$\frac{1}{18}\left(18y+\frac{36}{5}z-\frac{126}{5}\right)^2+\frac{396}{25}z^2-\frac{1152}{25}z+\frac{931}{25}-\frac{1}{18}\left(\frac{36}{5}z-\frac{126}{5}\right)^2.$$

Se reduce igualmente la parte que está fuera del primer paréntesis de este polinomio á

$$\frac{324}{25}z^2-\frac{648}{25}z+\frac{49}{25}\quad \text{ó}\quad \frac{324}{25}(z-1)^2-11.$$

Por consiguiente puede escribirse la ecuacion propuesta como sigue:

$$\frac{1}{25}(25x-2z-10y-13)^2+\frac{1}{18}\left(18y+\frac{36}{5}z-\frac{126}{5}\right)^2+\frac{324}{25}\left(z-1\right)^2=11,$$

y si ahora igualamos á cero las cantidades comprendidas en los paréntesis, resultará

$$25x-2z-10y-13=0,\quad 18y+\frac{36}{5}z-\frac{126}{5}=0,\quad z-1=0,$$

cuyas ecuaciones tienen una solucion única $x=1$, $y=1$, $z=1$. Se puede tomar los tres planos que estas representan por los $y'z'$, $x'z'$, $x'y'$, y se convertirá la ecuacion propuesta en

$$\frac{1}{25}x'^2+\frac{1}{18}y'^2+\frac{324}{25}z'^2=11,$$

bajo cuya forma se ve inmediatamente que representa un elipsóide real, como ya habíamos reconocido por el método espuesto en el párrafo anterior.

11. Si la ecuacion es

$$2x^2+4y^2-z^2-4yz-8xz+4xy+2x-4y-22=0$$

escribiremos su primer miembro como sigue:

$$\frac{1}{2}(2x+2y-4z+1)^2+4y^2-z^2-4yz-4y-22-\frac{1}{2}(2y-4z+1)^2;$$

y como el polinomio que hay fuera del primer paréntesis se puede reducir á

$$2y^2-9z^2+4yz-6y+4z-\frac{45}{2},\ \text{ó sea}\ \frac{1}{2}(2y+2z-3)^2-9z^2+4z-\frac{45}{2}-\frac{1}{2}(2z-3)^2,$$

y la parte colocada en este polinomio fuera del primer paréntesis se reduce á

$$-11z^2+10z-27\quad \text{ó}\quad -\frac{1}{11}(11z+5)^2-\frac{162}{11};$$

la ecuacion propuesta se convierte en

$$\frac{1}{2}(2x-4z+2y+1)^2+\frac{1}{2}(2y+2z-3)^2-\frac{1}{11}(11z+5)^2=\frac{162}{11},$$

y bajo esta forma se reconoce que representa un *hiperbolóide de una hoja*.

Multiplicando por 2 ambos miembros de esta ecuacion se halla que las ecuaciones de las generatrices de este hiperbolóide son

$$2x-4z+2y+1+\sqrt{\frac{2}{11}}(11z+5)=\alpha\left(\frac{18}{\sqrt{11}}+2y+2z-3\right)$$

$$2x-4z+2y+1-\sqrt{\frac{2}{11}}(11z+5)=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{18}{\sqrt{11}}-2y-2z+3\right)$$

y $$2x-4z+2y+1+\sqrt{\frac{2}{11}}(11z+5)=\beta\left(\frac{18}{\sqrt{11}}-2y-2z+3\right)$$

$$2x-4z+2y+1-\sqrt{\frac{2}{11}}(11z+5)=\frac{1}{\beta}\left(\frac{18}{\sqrt{11}}+2y+2z-3\right)$$

III. Sea la ecuacion

$$x^2 - yz = \mathrm{K}.$$

Como se tiene $yz = \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 - \left(\frac{y-z}{2}\right)^2$ se puede reducir á la forma

$$x^2 + \left(\frac{y-z}{2}\right)^2 - \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \mathrm{K},$$

que representará un *hiperboloide de una hoja*, uno *de dos* ó un *cono*, segun que K sea *positivo*, *negativo* ó *cero*.

IV. Cuando nos propongamos la ecuacion

$$y = x + z \pm \sqrt{1 - z^2}, \quad \text{que se reduce á} \quad (y - x - z)^2 + z^2 = 1,$$

verémos que representa un *cilindro elíptico*, cuyas generatrices son

$$y - x - z = \alpha(1 + z), \quad y - x - z = \frac{1}{\alpha}(1 - z).$$

V. Operando sobre

$$4x^2 + 10y^2 + 2z^2 - 8yz + 4zx - 4xy + 4x + 10y + 3z + 9 = 0,$$

como lo hemos hecho en los ejemplos anteriores, hallarémos que se la puede poner bajo la forma

$$(2x - y + z + 1)^2 + (3y - z + 2)^2 + 5z + 4 = 0,$$

que representa un *paraboloide elíptico*.

VI. Finalmente, si la ecuacion es

$$yz + 3xz + 2xy - y + x + 2z + 4 = 0$$

se puede escribir su primer miembro de este modo

$$(z + 2x + 1)(y + 3x + 2) - x + 4 - 6x^2 - 4x - 3x - 2,$$

y reduciendo el polinomio que hay fuera de los paréntesis resulta

$$-6x^2 - 8x + 2, \quad \text{ó sea} \quad -\frac{2}{3}(3x + 2)^2 + \frac{14}{3};$$

y transformando el producto indicado por los paréntesis en una diferencia de cuadrados hallarémos que despues de hechas todas las reducciones se puede convertir la ecuacion propuesta en

$$\left(\frac{5x + y + z + 3}{2}\right)^2 - \left(\frac{z - y - x + 3}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}(3x + 2)^2 = -\frac{14}{3},$$

que representa un *hiperboloide de una hoja*.

564. **Segundo método.** — Se busca primero, como se ha dicho en el núm. 475, si la superficie propuesta admite un centro único, una infinidad de centros ó no admite ninguno. Examinemos sucesivamente estos tres casos.

565. **Superficies con un solo centro.** — Teniendo por hipótesis la superficie un centro único, se sabe ya (509) que no puede ser sino un elipsóide real ó imaginario, un hiperbolóide de una ó dos hojas, un punto ó un cono.

Resolviendo la ecuacion de la superficie con relacion á z se saca una espresion de la forma

$$z=mx+ny+p\pm\sqrt{ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f}.$$

Las coordenadas de los puntos del plano de las xy en que se proyecta la superficie deben satisfacer á la designaldad

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f>0;$$

luego la proyeccion de la superficie sobre este plano está limitada por la curva que tiene por ecuacion

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0. \qquad (1).$$

Considerarémos como evidente que esta curva tendrá un centro ó no la tendrá, segun que la superficie de que proviene le tenga ó no: luego en el caso de las superficies con centro no podrá jamás representar una parábola; y bajo este supuesto hay que examinar tres casos.

566. 1.° *La curva* (1) *es una elipse.* Estando la proyeccion de la superficie limitada por una elipse no puede ser sino un elipsóide ó un hiperbolóide de una hoja: será un elipsóide si la superficie se proyecta en el interior de la elipse (1), y un hiperbolóide de una hoja si se proyecta en el esterior. Se conocerá que uno ú otro caso tiene lugar buscando si la z que corresponde á las coordenadas x é y del centro de la elipse es real ó imaginario. Si este valor de z es real la superficie se proyectará evidentemente en el interior de la elipse y no podrá ser mas que un elipsóide, y si es imaginario la superficie se proyectará en el esterior de la elipse y será un hiperbolóide de una hoja.

EJEMPLOS. I. Tomemos la ecuacion de que ya hemos tratado en los números **515** y **563**, á saber:

$$25x^2+22y^2+16z^2+16yz-4xz-20xy-26x-40y-44z+44=0.$$

Como se ha reconocido que la superficie tiene un centro único, y se saca de la ecuacion propuesta

$$z=\frac{2x-8y+22\pm\sqrt{-288y^2+288xy-396x^2+504x+288y-220}}{16},$$

la proyeccion de la superficie sobre el plano de las xy está limitada por la curva que tiene por ecuacion

$$288y^2-288xy+396x^2-504x-288y+220=0 \qquad (E).$$

Esta curva es una elipse cuyo centro tiene por coordenadas $x=1$, $y=1$, y ademas la z que corresponde á estos valores de x y de y es real; luego proyectándose la superficie propuesta en el interior de una elipse (E) es un elipsóide.

II. Sea la ecuacion

$$2x^2+4y^2-z^2+4yz-8xz-4xy+2x-4y-22=0.$$

Por medio de la tabla mnemónica

$$\begin{array}{ccc} 2 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \end{array}$$

se encuentra

$$H=2.2^2+4.2^2-1.4^2+2.4.1-2.2.2.4=-16;$$

luego la superficie tiene un centro único. De la ecuacion propuesta se saca

$$z=2(y-2x)\pm\sqrt{8y^2-20xy+18x^2-4y+2x-22};$$

por consiguiente, la proyeccion de la superficie sobre el plano de las xy está limitada por la curva que tiene por ecuacion

$$8y^2-20xy+18x^2-4y+2x-22=0.$$

Pero esta curva es una elipse, cuyo centro tiene por coordenadas $x=\frac{3}{11}$, $y=\frac{13}{22}$; y como el valor de z es imaginario, se deduce que la superficie se proyecta en el exterior de la elipse, y que por lo tanto es un hiperbolóide de una hoja.

OBSERVACION. Si la elipse se reduce á un punto, la superficie no puede ser mas que un cono ó un punto. En efecto, el radical que entra en el valor de z debe ser entonces de la forma

$$\sqrt{m[(x-x')^2+(y-y')^2]},$$

y si m es negativo z no tendrá otro valor real que el correspondiente á $x=x'$, $y=y'$: luego la superficie será un punto.

Si m es positivo, z será real para todos los valores de x y de y; de modo que la proyeccion de la superficie cubrirá todo el plano de las xy: luego la superficie será un cono, puesto que contiene el centro.

567. 2.ª *La ecuacion* [1] *representa una hipérbola.* En este caso la superficie no puede ser un elipsóide; únicamente puede ser un hiperbolóide de una ó dos hojas. Si la proyeccion de la superficie contiene el centro de la hipérbola será un hiperbolóide de una hoja, y será de dos cuando no le contenga. Se reconoce fácilmente cual de estos dos casos tiene lugar buscando si el valor de z, que corresponde al centro de la hipérbola, es real ó imaginario.

Ejemplos. I. Sea la ecuacion

$$2x^2+y^2+z^2+4yz-2xz-2xy+2y-3=0.$$

Aplicando la regla conocida se ve que la superficie tiene un centro; y como de la ecuacion propuesta se saca

$$z=x-2y\pm\sqrt{3y^2-2xy-x^2-2y+3},$$

la proyeccion de la superficie está limitada por la hipérbola

$$3y^2-2xy-x^2-2y+3,$$

cuyo centro tiene por coordenadas $x=-\frac{3}{4}$, $y=\frac{1}{4}$; y siendo real el valor de z se deduce que la superficie propuesta es un hiperbolóide de una hoja.

II. Si la ecuacion es

$$x^2-2y^2+z^2+2xy-4xz+4y+4z-9=0,$$

el lector conocerá fácilmente por un cálculo análogo al que acabamos de hacer que esta ecuacion representa un hiperbolóide de dos hojas.

Observacion. Si la hipérbola que limita la proyeccion de la superficie se reduce á dos líneas rectas, la superficie será evidentemente un cono.

568. 3.ª *La ecuacion* [1] *representa una curva imaginaria.* En este caso el primer miembro de la ecuacion [1] es siempre positivo ó negativo, cualesquiera que sean los valores de x y de y.

Si tiene lugar el primer caso, el valor de z sacado de la ecuacion propuesta es siempre real, y la superficie se compone por consiguiente de dos hojas separadas por el plano diametral

$$z=mx+ny+p;$$

luego es un hiperbolóide de dos hojas. Cuando el primer miembro sea constantemente negativo, el valor de z será siempre imaginario, y la superficie tambien imaginaria.

569. Caso particular.—En lo que precede se supone que la ecuacion propuesta contiene á lo menos el cuadrado de una de las variables; porque si no fuera así, resolviéndola con relacion á una cualquiera de ellas, se obtendria una espresion que no tendria radical.

Aunque este caso particular se ha examinado ya (354, II) vamos á tratarle de nuevo, á fin de hacer este segundo método de discusion independiente del primero; para lo cual nos fundarémos en el teorema del núm. **533**, que dice: *el hiperbolóide de una hoja contiene siempre una paralela á una generatriz cualquiera de su cono asintótico*; propiedad que no pertenece al hiperbolóide de dos hojas.

Sea

$$2Byz+2B'xz+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+F=0 \quad (1)$$

la ecuacion propuesta, que por hipótesis representa una superficie con centro. Esta no puede ser un elipsóide, porque para todo valor real de x y de y el sacado de la ecuacion (1) es tambien real; luego la proyeccion de la superficie cubre todo el plano de las xy, lo que no puede convenir al elipsóide. Así la superficie propuesta no puede ser mas que un hiperbolóide de una ó dos hojas ó un cono. Ahora, para distinguir el género de la superficie, trasportarémos el origen al centro, lo que hará tomar á la ecuacion propuesta la forma

$$Byz+B'xz+B''xy=T.$$

Si $T=0$, la ecuacion representará un cono por ser homogénea. Si T es diferente de *cero*, la superficie será un hiperbolóide cuyo cono asintótico tendrá por ecuacion

$$Byz+B'xz+B''xy=0.$$

Como el eje de las z es evidentemente una generatriz de este cono la superficie deberá contener una paralela al eje de las z, si es un hiperbolóide de una hoja. Pero si se hace

$$x=\alpha,\quad y=\beta$$

en la ecuacion reducida se tendrá

$$(B\beta+B'\alpha)z+B''\alpha\beta=T,$$

ecuacion que no puede satisfacerse cualquiera que sea z, sino teniendo al mismo tiempo

$$B\beta+B'\alpha=0 \quad \text{y} \quad \alpha\beta=\frac{T}{B''},$$

de donde
$$\alpha^2=-\frac{B'}{BB''}.T.$$

Este valor de α es real ó imaginario, segun que $\frac{B'}{BB''}$ es de signo contrario á T ó del mismo signo. En el primer caso la superficie será un hiperbolóide de una hoja, y en el segundo uno de dos.

570. Superficies que admiten una infinidad de centros. — Este caso no ofrece ninguna dificultad; porque si las ecuaciones del centro se reducen á dos distintas, la superficie es un cilindro; y si á una sola, se compone de dos planos paralelos.

Hallando la seccion de la superficie por uno de los planos coordenados, podrémos conocer si esta superficie es un cilindro elíptico ó hiperbólico, ó tambien si es imaginario.

571. Superficies que no tienen centro. — Este tercer caso no ofrece tampoco dificultad; pues ya se sabe (513) que la superficie no puede ser sino un parabolóide elíptico, un parabolóide hiperbólico ó un cilindro parabólico, y la naturaleza de las secciones hechas por los tres planos coordenados nos dará á conocer el género de la superficie.

En efecto, si entre las tres secciones hay elipses, la superficie será un parabolóide elíptico; porque el parabolóide hiperbólico y el cilindro parabólico no admiten secciones elípticas (511 y 512).

Si entre las secciones hay una hipérbola, la superficie será un parabolóide hiperbólico; porque el parabolóide elíptico y el cilindro parabólico no admiten secciones hiperbólicas (434).

En fin, si las tres secciones son parábolas la superficie será un cilindro parabólico; porque los paraboloides no pueden dar secciones parabólicas sino por planos paralelos á su eje.

Ejemplos. I. Sea la ecuacion de que ya hemos tratado en el núm. **565**, VI, á saber:

$$5x^2+5y^2+8z^2+4zy+4zx-8xy+6x+6y-3z=0.$$

Hemos visto que la superficie representada por esta ecuacion no tiene centro. Pero si se hace $z=0$ resulta

$$5x^2-8xy+5y^2+6y+6x=0.$$

Esta ecuacion representa una elipse, de donde se deduce que la superficie propuesta es un *paraboloide elíptico*, como ya lo habiamos reconocido por el primer método.

II. Sea la ecuacion

$$x^2+y^2+2z^2+2yz+2xz+2xy-4x-2y-2z=0.$$

Como resulta $H=0$, y además las ecuaciones del centro

$$\left.\begin{array}{l} x+y+\ z=2 \\ x+y+\ z=1 \\ x+y+2z=1 \end{array}\right\}$$

son incompatibles, la superficie no tiene centro.

Haciendo $z=0$, se tiene

$$y^2+2xy+x^2-2y-4x=0,$$

que representa una parábola, y no nos enseña nada de la naturaleza de la superficie; pero haciendo $y=0$

$$x^2+2xz-2z^2-4x+2z=0$$

es la ecuacion de una hipérbola; luego la superficie es un *paraboloide hiperbólico*.

III. $$x^2+y^2+9z^2+6yz-6xz-2xy+2x-4z=0.$$

Se encuentra que la superficie no tiene centro; y como las secciones hechas por los tres planos coordenados son tres parábolas, se deduce que es un *cilindro parabólico*.

572. Aconsejamos á los lectores que reasuman la discusion precedente de la ecuacion de segundo grado con tres variables y formen un cuadro análogo al del núm. **555**; y que determinen las condiciones á que deben satisfacer los coeficientes a, b, ..., f para que la ecuacion

$$z=mx+ny+p\pm\sqrt{ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f}$$

represente: 1.° un *cilindro elíptico*, uno *parabólico* ó uno *hiper-*

bólico; 2.° un elipsóide; 3.° un hiperbolóide de una ó dos hojas; 4.° un parabolóide elíptico ó hiperbólico; 5.° dos planos que se corten ó que sean paralelos.

EJERCICIOS. *Cuando la ecuacion general de segundo grado representa un parabolóide, y se hace desaparecer el rectángulo de las variables, tambien desaparece uno de los cuadrados.*

Si la suma de los términos de segundo grado de una ecuacion del mismo con tres variables forma un cuadrado perfecto, la superficie es un cilindro parabólico.

Averiguar lo que representa la ecuacion $P^2 + AQ = 0$ *en la hipótesis de que* P *y* Q *sean funciones lineales de* x, y, z. — *La posicion de los planos* $P = 0$ *ó* $Q = 0$ *con relacion á esta superficie.*

En la ecuacion $AP^2 + BPQ + CP^2 = 0$ *son* P *y* Q *funciones lineales de* x, y, z; *se quiere averiguar la condicion necesaria para que represente dos planos paralelos.*

¿Qué representan las ecuaciones

$$z = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F \quad ó \quad z^2 = Ay^2 + \dots + F$$

suponiendo que $B^2 - 4AC = 0$, $B^2 - 4AC > 0$ *ó* $B^2 - 4AC < 0$?

Hallar el lugar de los centros de las superficies representadas por la ecuacion

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2pxz + 2qyz - 2ax - 2by + 2cz = 0,$$

en que a, b, c *son números positivos conocidos: 1.° suponiendo que* p *y* q *varien de todas las maneras posibles; 2.° en la hipótesis de que las variaciones de* p *y* q *satisfagan las condiciones necesarias para que la ecuacion propuesta represente un cono. Ademas, se indicará la parte del lugar que corresponda á los hiperbolóides de una hoja y la correspondiente á los de dos.*

EJEMPLOS:

$$10x^2 + 13y^2 + 13z^2 + 8yz - 4zx - 4xy + 20x - 4y - 4z + 1 = 0,$$
$$3x^2 + 5y^2 - 4z^2 - 12zy - 12zx + 24xy + 6x + 8y - 12z + 12 = 0,$$
$$3x^2 - 3y^2 - 12z^2 + 12zy - 8xy - 6x - 6y + 3z = 0,$$
$$12x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 12yz + 12zx + 24x + 12z + 3 = 0,$$
$$4x^2 - 2y^2 + 9z^2 - 4yz + 20zx - 16xy + 8x - 16y + 20z - 5 = 0,$$
$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4yz + 8zx + 4xy + 14x + 10y + 6z + 10 = 0,$$
$$11x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 20yz + 4zx + 16xy + 22x + 16y + 4z + 11 = 0,$$
$$10x^2 + 13y^2 + 13z^2 + 8yz - 4zx - 4xy + 20x - 4y - 4z + 10 = 0,$$
$$10x^2 + 13y^2 + 13z^2 + 8yz - 4zx - 4xy + 20x - y - 4z + 19 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2zx + 2xy + x + y + z - 2 = 0.$$

CAPÍTULO IX.

PLANOS TANGENTES.

573. Cuando se hace que por un punto dado en una superficie pasen varias curvas que todas estén en ella, y se tira las tangentes á las mismas por el punto que se considera, todas las tangentes están por regla general en un plano único. En los cursos de Geometría Descriptiva se demuestra geométricamente esta propiedad, pero tambien puede hacerse por medio de consideraciones analíticas.

Suponiendo que sean M el punto de que se trate, x, y, z sus coordenadas, y $f(x, y, z) = 0$ [1] la ecuacion de la superficie, puede considerarse que una de las cantidades x, y ó z, por ejemplo la última, sea una funcion de las otras dos, que serán en este caso las variables independientes. Pero trazando por el punto M una curva situada en la superficie, y representando por x, y, z las coordenadas de un punto cualquiera de esta curva, dos de estas, por ejemplo las x é y, serán funciones de la tercera. Sean $x+h$, $y+k$, $z+l$ las coordenadas de un punto M' tomado en esta curva y próximo al M; las ecuaciones de la secante MM' que tenga por coordenadas generales X, Y, Z serán

$$X - x = \frac{h}{l}(Z - z)$$

ó

$$Y - y = \frac{k}{l}(Z - z) \qquad [2].$$

Suponiendo que el punto M' se vaya aproximando indefinidamente al M, la secante MM' tendrá por límite la tangente tirada á la curva por el punto M; y se podrá establecer que

$$\lim.\frac{h}{l} = x'$$

y

$$\lim.\frac{k}{l} = y',$$

con lo que las ecuaciones de la tangente seran

$$X - x = x'(Z - z)$$

ó

$$Y - y = y'(Y - z) \qquad [3].$$

Además, se ha visto en el Álgebra que mirando en $f(x, y, z)$ á x é y como funciones de z, la derivada de la funcion con relacion á z es

$$x'f_x'(x, y, z)+y'f_y'(x, y, z)+f_z'(x, y, z);$$

y que si la funcion es constantemente igual á cero, como espresa la ecuacion de la superficie, tambien lo ha de ser su derivada, verificandose

$$x'f_x'+y'f_y'+f_z'=0 \qquad [4].$$

Sustituyendo en esta relacion en vez de x' é y' sus valores sacados de las ecuaciones [3], y quitando el denominador, se tendrá

$$(X-x)f_x'+(Y-y)f_y'+(Z-z)f_z'=0 \qquad [5],$$

que es la ecuacion de un plano que pasa por el punto M.

Este plano, que encierra las tangentes tiradas en el punto M á todas las curvas que pasen por el mismo y estén situadas en la superficie, es el que se llama *tangente* á la superficie en el punto M, así como M se llama punto de *contacto* ó de *tangencia*.

574. Hemos dicho que el lugar de estas tangentes era *generalmente* un plano; y es porque la demostracion anterior sería defectuosa cuando las derivadas f_x', f_y', f_z' se redujesen simultáneamente á cero, en cuyo caso la ecuacion [4] quedaría satisfecha por sí misma. Esto sucede en un cono de segundo grado cuando el punto que se considera es el vértice, porque este punto es al mismo tiempo centro de la superficie; esto tiene lugar mas generalmente en los puntos singulares análogos que reciben el nombre de *puntos salientes*. Si, por ejemplo, se hace girar alrededor de su eje la evoluta de una parábola, resulta una superficie que tiene un punto saliente en el vértice de la evoluta. El lugar de las tangentes en un punto de esta clase no es un plano, sino una superficie cónica de un grado mas ó menos superior, que se determina por métodos que no debemos detallar aquí.

575. Puede ocurrir que el plano tangente á una superficie en un punto no tenga mas que este comun con aquella, que es lo que se verifica en el elipsóide y en gran número de superficies cerradas; mas puede suceder que la corte, y tambien que el

punto de contacto pertenezca á la seccion, como tiene lugar en el hiperbolóide de una hoja y en el parabolóide hiperbólico, segun vamos á ver.

Cuando una superficie tiene generatrices rectilíneas, el plano tangente contiene la que pasa por el punto de contacto, porque esta es tangente de sí misma en aquel punto; mas por lo general no es uno mismo el plano tangente en los diferentes puntos de aquella generatriz, pues á medida que el punto de contacto va recorriéndola, el plano tangente va girando alrededor de ella sin dejar de contenerla. Cuando por un punto de una superficie pasan dos generatrices rectilíneas determinan un plano, que no es otro que el tangente, pero que al mismo tiempo es secante.

576. Como dos rectas que se cortan bastan para determinar un plano, se tiene por lo general el tangente á una superficie en un punto dado tirando por este las tangentes á dos curvas que pasen por el mismo y estén trazadas en la superficie, y haciendo pasar un plano por aquellas dos tangentes. Cuando la superficie es de revolucion se elige ordinariamente las tangentes al meridiano y al paralelo.

Debe observarse que en toda superficie de revolucion el plano tangente es perpendicular al del meridiano, pues contiene la tangente al paralelo, y esta es perpendicular al meridiano.

577. Se llama *normal* la perpendicular al plano tangente tirada por el punto de contacto. Es muy fácil hallar sus ecuaciones; pues toda recta que pase por el punto de contacto ha de estar representada por

$$X-x=m(Z-z)$$

ó

$$Y-y=n(Z-z),$$

y suponiendo que las coordenadas sean rectangulares debe verificarse para que esta recta sea perpendicular al plano tangente que

$$m=\frac{f_x'}{f_z'} \quad \text{y} \quad n=\frac{f_y'}{f_z'};$$

de modo que las ecuaciones de la normal serán

$$X-x=\frac{f_x'}{f_z'}(Z-z) \quad Y-y=\frac{f_y'}{f_z'}(Z-z),$$

ó sean
$$\frac{X-x}{f'_x}=\frac{Y-y}{f'_y}=\frac{Z-z}{f'_z} \qquad [6].$$

Se llama *plano normal* todo el que pasa por esta recta.

578. Aplicando estas nociones á la esfera cuya ecuacion es

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

tendrémos $\quad f'_x=2x,\ \ f'_y=2y,\ \ f'_z=2z,$

y la ecuacion del plano tangente será despues de suprimir el factor 2

$$(X-x)x+(Y-y)y+(Z-z)z=0,$$

ó bien teniendo en cuenta la de la esfera

$$Xx+Yy+Zz=R^2 \qquad [7].$$

Las de la normal son

$$\frac{X-x}{x}=\frac{Y-y}{y}=\frac{Z-z}{z}$$

ó
$$X=\frac{x}{z}Z \quad \text{é} \quad Y=\frac{y}{z}Z \qquad [8],$$

que representan una recta tirada desde el origen al punto de contacto. De esto se deduce que la normal pasa por el centro y que *el plano tangente es perpendicular en el estremo del radio que va al punto de contacto.*

579. Como la ecuacion del elipsóide es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

se tendrá $\quad f'_x=\frac{2x}{a^2},\ \ f'_y=\frac{2y}{b^2},\ \ f'_z=\frac{2z}{c^2};$

para ecuacion del plano tangente

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}=1 \qquad [9];$$

y para la normal

$$X-x=\frac{c^2x}{a^2z}(Z-z) \quad ó \quad Y-y=\frac{c^2y}{b^2z}(Z-z) \qquad [10].$$

La primera de estas ecuaciones unida con $Y=y$ representa la normal á la seccion causada por un plano tirado por el punto de contacto paralelamente al de las zx; y la segunda junta con $X=x$ la normal á la seccion que produjese un plano tirado por el mismo punto paralelamente al de las yz. Esta observacion es aplicable á la esfera.

580. *El plano tangente á un elipsóide es paralelo al diametral conjugado del diámetro que pasa por el punto de contacto.* Supongamos que la superficie esté referida á un sistema de diámetros conjugados, que uno de estos sea el que pasa por el punto de contacto y que le tomemos por eje de las x: tendrémos $x=0$, $y=0$, $z=0$, y la ecuacion [9] del plano tangente se reducirá á $X=\frac{a^2}{x}$, que es la de uno paralelo al de las yz, y demuestra la proposicion.

581. Cuando se quiere tirar un plano tangente al elipsóide por un punto tomado en la superficie, la ecuacion [9] resuelve el problema y demuestra que es siempre posible.

Si el plano tangente se ha de tirar por un punto esterior á la superficie queda indeterminado el problema, como es muy fácil conocer; pero el *lugar de los puntos de contacto es la interseccion del elipsóide con un plano paralelo al diametral conjugado del diámetro cuya prolongacion pase por el punto esterior dado.* En efecto, refiriendo la superficie á un sistema de diámetros conjugados que uno, por ejemplo el de las x, pase por el punto dado, y llamando α la abscisa de este punto, la ecuacion [9] del plano tangente debe quedar satisfecha por $X=\alpha$, $Y=0$, $Z=0$, lo cual exige que

$$\frac{\alpha x}{a^2}=1 \quad ó \quad x=\frac{a^2}{\alpha}.$$

Por consiguiente el lugar de los puntos de contacto es la interseccion de la superficie con un plano paralelo al de las yz, que es conjugado del eje de las x: lo que demuestra la proposicion.

Tambien es indeterminado el problema cuando se quiere tirar un plano tangente que sea paralelo á una recta dada; mas *en este caso el lugar de los puntos de contacto es la interseccion causada en el elipsóide por el plano diametral conjugado con la direccion de la recta dada*. Refiriendo la superficie á un sistema de diámetros conjugados, de los que el de las x, por ejemplo, sea paralelo á la recta dada, como el plano tangente ha de ser paralelo á este eje, no deberá tener su ecuacion término alguno en X, lo que exige que $x=0$; por consiguiente el lugar de los puntos de contacto es la interseccion de la superficie con el plano de las yz: que es lo que se queria demostrar.

582. Para tener una solucion determinada de este problema, nos propondrémos tirar un plano tangente que sea paralelo á otro dado ó que pase por una recta fija.

En el primer caso, si la ecuacion del plano conocido es

$$Ax+By+Cz=0,$$

será preciso que se verifique

$$\frac{x}{Aa^2}=\frac{y}{Bb^2}=\frac{z}{Cc^2},$$

y estas dos ecuaciones unidas á la que represente la superficie determinarán las coordenadas del punto de contacto. El problema será posible siempre y tendrá dos soluciones.

En el segundo caso supondrémos que

$$x=\alpha z+p \quad \text{ó} \quad y=\beta z+q$$

sean las ecuaciones de la recta dada, y como esta ha de hallarse en el plano tangente, se tiene que verificar

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{z}{c^2}=0 \quad \text{y} \quad \frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}-1=0,$$

cuyas ecuaciones juntas con la correspondiente á la superficie de que se trate determinarán las coordenadas del punto de contacto. Para que el problema sea posible es necesario que la recta dada no corte á la superficie. Habrá dos soluciones cuando la recta sea esterior, y solo una si es tangente á la superficie.

583. Del mismo modo se trataria cualquiera cuestion relativa á planos tangentes del hiperbolóide ya sea de una ó de dos hojas. Como en el de una hoja todo plano tangente es paralelo al diametral conjugado del diámetro que pasa por el punto de contacto será á la vez tangente y secante, pues ya sabemos que corta á la superficie por dos rectas.

Recíprocamente: todo plano que pase por dos generatrices de diferente sistema es tangente á la superficie en el punto donde se cortan aquellas. El plano que pasa por dos generatrices paralelas pertenecientes, segun ya sabemos, á diferente sistema, es tangente en un punto situado en el infinito.

Es fácil conocer que el plano tangente á un hiperbolóide no puede ocupar cualquier posicion en el espacio, estando limitadas por las tangentes al cono asimtótico. Esto quiere decir que para tirar á un hiperbolóide un plano tangente paralelo á otro dado, es preciso que otro paralelo á este último y que pase por el centro corte ó sea tangente al cono asimtótico. En este último caso el plano tangente no toca á la superficie dada sino en el infinito, y es comun á esta y al cono asimtótico.

584. Calculando del mismo modo que ya lo hemos hecho anteriormente hallarémos que la ecuacion del plano tangente al parabolóide elíptico

$$\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=x \qquad [10]$$

es

$$\frac{Yy}{2p}+\frac{Zz}{2q}=\tfrac{1}{2}(X+x) \qquad [11].$$

Cambiando Q en $-Q$ resulta la del plano tangente al parabolóide hiperbólico.

Es sabido que tomando por orígen un punto cualquiera de la superficie, y por eje de las x el diámetro que pase por él, se puede elegir en el plano conjugado de este diámetro una infinidad de sistemas de los otros dos ejes para que la ecuacion de la superficie conserve la forma [10]. Cuando se busca el plano tangente en el orígen se echa de ver que haciendo $x=0$, $y=0$, $z=0$ en la ecuacion [11] queda $X=0$: esto quiere decir que el plano tangente es el de las yz. Por lo tanto *la direccion del plano tangente al parabolóide en un punto cualquiera es conjugada del diámetro* *que pasa por el punto de contacto*; es decir, que este plano es paralelo á las secciones por cuyos centros pasa dicho diámetro.

En el parabolóide hiperbólico el plano tangente tomado por el de las yz es á la vez secante; pues haciendo en la ecuacion de la superficie $x=0$ para hallar la interseccion de esta con aquel, resulta

$$\frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}=0, \quad \text{ó sea} \quad y=\pm z\sqrt{\frac{p}{q}},$$

que representa dos rectas.

585. Las siguientes cuestiones pueden servir para aplicar cuanto dejamos dicho acerca de los planos tangentes y de las normales:

I. *Hallar el lugar geométrico de los puntos en que las normales de una superficie de segundo grado sean paralelas á un plano dado.*

II. *Determinar el lugar geométrico de los vértices de todos los triédros trirectángulos cuyas caras sean tangentes á un elipsóide ó á un hiperbolóide.*

III. *El lugar de los puntos pertenecientes á un hiperbolóide de una hoja por los que pasan dos generatrices rectilíneas perpendiculares entre sí (referido al problema anterior).*

IV. *Por dos rectas dadas que no estén en un mismo plano se hace pasar un parabolóide hiperbólico; se tira un plano tangente á esta superficie y paralelo á otro dado; se pide el lugar del punto de contacto.*

V. *Hallar el lugar de las normales á un hiperbolóide de una hoja ó de un parabolóide elíptico tiradas por los diferentes puntos de una misma generatriz rectilínea.*

CAPÍTULO X.

SUPERFICIES CÓNICAS Y CILÍNDRICAS

586. Superficies cilíndricas. — Se da por regla general el nombre de *superficie cilíndrica* á la engendrada por una recta que resbala sobre una línea dada y se conserva durante todo el movimiento paralela á una misma direccion. La línea fija se llama *directriz*, y la recta móvil *generatriz* de la superficie.

Vamos á hallar la ecuacion general de las superficies cilíndricas; y para esto sean

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,z)=0 \\ f_1(x,y,z)=0 \end{array}\right\} \qquad [D]$$

las ecuaciones de la directriz, teniendo las que representa la generatriz la forma

$$\left.\begin{array}{l} x=az+p \\ y=bz+q \end{array}\right\} \qquad [G],$$

en que a y b son números dados y p y q parámetros que varien con la posicion de la generatriz. El problema que nos proponemos viene á ser evidentemente lo mismo que hallar una relacion entre x, y, z independiente de p y de q, y que sea una consecuencia de las ecuaciones [D] y [G]. Ahora bien, para que la generatriz encuentre siempre á la directriz, es preciso que p y q satisfagan la relacion que se obtenga eliminando x, y, z entre [D] y [G]; pero si

$$\varphi(p,q)=0 \qquad [1]$$

es esta relacion, eliminando p y q entre [G] y [1] resultará

$$\varphi(x-az,\ y-bz)=0 \qquad [2],$$

que es la ecuacion general de todas las superficies cilíndricas.

Recíprocamente, cualquiera que sea la funcion φ, la ecuacion [2] representará siempre una superficie cilíndrica cuyas generatrices sean paralelas á la recta que tiene por ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x=az \\ y=bz \end{array}\right\} \qquad [3]$$

Porque haciendo

$$x-az=p,\quad y-bz=q$$

se convierte la ecuacion [2] en

$$\varphi(p\,,q)=0 \qquad [4];$$

y tomando por p y q los valores que verifiquen esta ecuacion, las rectas

$$\left.\begin{aligned} x&=az+p \\ y&=bz+q \end{aligned}\right\}$$

estarán constantemente situadas en la superficie [2]; y como además la direccion de estas rectas es siempre la misma será cilíndrica la superficie [2].

Observaciones. I. Sacando de la ecuacion [4] el valor

$$p=\psi(q),$$

la ecuacion general de las superficies cilíndricas toma la forma

$$x-az=\psi(y-bz).$$

II. La marcha que debe seguirse para hallar la ecuacion de un cilindro se simplifica notablemente cuando se toma por directriz la traza de aquel sobre el plano de las xy. Porque teniendo en este caso las ecuaciones de la directriz la forma

$$f(x\,,y)=0\,, \quad z=0\,,$$

y siendo $f(p\,,q)=0$ la condicion entre p y q necesaria para que la generatriz

$$\left.\begin{aligned} x&=az+p \\ y&=bz+q \end{aligned}\right\}$$

encuentre siempre á la directriz, la ecuacion de la superficie cilíndrica será

$$f(x-az\,,\, y-bz)=0.$$

Por lo tanto podemos decir que si la directriz es la traza del cilindro sobre el plano de las xy, para hallar la ecuacion de esta superficie es preciso sustituir en la que representa la traza por x é y los valores $x-az$, $y-bz$, en que a y b son los coeficientes angulares de la generatriz

Aplicando esta regla á las ecuaciones

$$x^2+y^2=r^2, \quad y^2=2px, \quad y=e^x, \quad \text{etc}$$

se tiene

$$(x-az)^2+(y-bz)^2=r^2, \quad (y-bz)^2=2p(x-az), \quad y-bz=e^{x-az}, \quad \text{etc.},$$

que representan cilindros circulares, hiperbólicos, logarítmicos, etc.

587. *Dada la ecuacion*

$$f(x, y, z)=0 \qquad [1],$$

reconocer si la superficie que representa es cilíndrica.

La traza de la superficie [1] sobre el plano de las xy tiene por ecuacion

$$f(x, y, 0)=0,$$

y segun lo que precede todas las superficies cilíndricas que tengan por directriz esta traza se hallan representadas por

$$f(x-az, y-bz, 0)=0 \qquad [2];$$

luego es preciso y suficiente para que la superficie [1] sea cilíndrica que haya valores reales de a y b capaces de hacer idénticas las ecuaciones [1] y [2]. Cuando sea posible esta identificacion representará la ecuacion [1] una superficie cilíndrica cuya generatriz sea paralela á la recta

$$\left.\begin{aligned} x&=az \\ y&=bz \end{aligned}\right\}.$$

EJEMPLO. *Averiguar si es cilíndrica la superficie*

$$f(x, y, z)=x^2+y^2+2z^2-2xz+2yz-1=0.$$

Tenemos en este caso

$$f(x-az, y-bz, 0)=(x-az)^2+(y-bz)^2-1;$$

y para que esta ecuacion sea idéntica á la propuesta es preciso que sean

$$a=1,$$
$$b=-1,$$
$$a^2+b^2=2;$$

mas como estas condiciones son compatibles, la superficie propuesta es un cilindro que tiene sus generatrices paralelas á la recta

$$\left.\begin{array}{l} x=z \\ y=-z \end{array}\right\}.$$

Del mismo modo se verá que la ecuacion

$$4x^2+9y^2+97z^2-16zx-54zy=36$$

es la de un cilindro cuyas generatrices son paralelas á la rect.

$$\left.\begin{array}{l} x=2z \\ y=3z \end{array}\right\}.$$

588. *Hallar la ecuacion de un cilindro circunscripto á una superficie dada conociendo la direccion de su generatriz.*

Sean $$f(x, y, z)=0$$

la ecuacion de la superficie dada, y

$$\left.\begin{array}{l} x=az+p \\ y=bz+q \end{array}\right\}$$

las que representan la generatriz. Es evidente que esta cuestion se reduce á encontrar la relacion que debe existir entre p y q para que las generatrices del cilindro sean siempre tangentes á la superficie propuesta; porque si esta relacion fuese

$$\varphi(p, q)=0$$

la ecuacion del cilindro circunscripto á la superficie dada seria (586)

$$\varphi(x-az, y-bz)=0.$$

Se hallará esta relacion espresando que si se corta la superficie por un plano cualquiera que pase por la generatriz, esta recta será tangente á la interseccion causada por el plano; y para mayor sencillez se elegirá por plano secante uno de los que proyecten la generatriz, por ejemplo el

$$y=bz+q \qquad (1),$$

y se espresará que la recta

$$x=az+p$$

es tangente á la proyeccion sobre el plano de las xz de la interseccion de la superficie con el plano [1], cuya proyeccion está representada por

$$f(x, bz+q, z)=0.$$

EJEMPLO. *Hallar la ecuacion del cilindro que está circunscripto á la esfera*

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

y que tenga sus generatrices paralelas á la recta

$$\left.\begin{array}{l} x=az \\ y=bz \end{array}\right\}.$$

En el caso presente será

$$f(x, bz+q, z)=x^2+(bz+q)^2+z^2-r^2=0 \qquad [1];$$

y para que la recta $\qquad x=az+p \qquad [2]$

sea tangente á la línea [1] se necesitará que la ecuacion

$$(a^2+b^2+1)z^2+2(ap+bq)z+p^2+q^2-r^2=0$$

que resulta de eliminar x entre [1] y [2] tenga sus raíces iguales. Por lo tanto se debe tener

$$(aq-bp)^2+p^2+q^2=a^2+b^2-r^2;$$

y la ecuacion del cilindro que se busca tendrá que ser

$$[a(y-bz)-b(x-az)]^2+(x-az)^2+(y-bz)^2=a^2+b^2-r^2,$$

ó despues de simplificada

$$\left.\begin{array}{c} (b^2+1)x^2+(a^2+1)y^2+(a^2+b^2)z^2 \\ -2abxy-2axz-2byz \end{array}\right\}=(a^2+b^2+1)r^2.$$

589. *El plano tangente á un cilindro lo es en toda la longitud de la generatriz que pasa por el punto de contacto.*

Si $\qquad \varphi(x-az, y-bz)=0$

es la ecuacion del cilindro, y (x_0, y_0, z_0) el punto de contacto, la del plano tangente será

$$(x-x_0)\varphi'_{x_0}+(y-y_0)\varphi'_{y_0}+(z-z_0)\varphi'_{z_0}=0 \qquad [0]$$

con la relacion $\varphi(x_0, y_0, z_0)=0$. Haciendo

$$x-az=u, \quad y-bz=v$$

para calcular φ'_{x_0}, φ'_{y_0}, φ'_{z_0} resulta por ecuacion del cilindro $\varphi(u, v)=0$, y teniendo presente que u y v son funciones de x y de y, y recordando las reglas de las funciones compuestas y de las funciones de funciones, resultará

$$\varphi'_x=\varphi'_u(u, v), \quad \varphi'_y=\varphi'_v(u, v), \quad \varphi'_z=\varphi'_u(u, v)(-a)+\varphi'_v(u, v)(-b).$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion [θ] y hechas todas las reducciones se tiene

$$(x-az-u_0)\varphi'_{u_0}+(y-bz-v_0)\varphi'_{v_0}=0,$$

que es la ecuacion de un plano en que está la generatriz

$$x-az-u_0=0, \quad y-bz-v_0=0,$$

que pasa por el punto de contacto: con lo que se demuestra la proposicion enunciada.

590. Superficies cónicas. — Se llama en general *superficie cónica* la engendrada por una recta que pasa constantemente por un punto fijo llamado *vértice*, y se apoya sobre una línea dada que toma el nombre de *directriz*.

Propongámonos hallar la ecuacion general de las superficies cónicas, y para esto sean

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y, z)=0 \\ f_1(x, y, z)=0 \end{array}\right. \qquad [D]$$

las que representa la directriz, y x', y', z' las coordenadas del vértice. La generatriz estará representada por ecuaciones de la forma

$$\left.\begin{array}{l} x-x'=a(z-z') \\ y-y'=b(z-z') \end{array}\right\} \qquad [G],$$

en que los coeficientes a y b variarán con la posicion de esta recta; y tambien en este caso está reducido el problema á buscar una relacion entre x, y, y z que sea independiente de a y b. Sea

$$\varphi(a, b)=0 \qquad [1]$$

la relacion entre a y b que haya resultado de eliminar x, y y z entre [D] y [G], la cual espresa que la generatriz encuentra siempre á la directriz. Eliminando a y b entre las ecuaciones [1] y [G se halla

$$\varphi\left(\frac{x-x'}{z-z'}, \ \frac{y-y'}{z-z'}\right)=0 \qquad [2],$$

que es la ecuacion general de las superficies cónicas.

Recíprocamente, la ecuacion [2] representa una superficie cónica, sea cualquiera la forma de la funcion φ; porque haciendo

$$\frac{x-x'}{z-z'}=a, \quad \frac{y-y'}{z-z'}=b,$$

y tomando para a y b los valores que verifique la ecuacion

$$\varphi(a,b)=0$$

las rectas
$$\left.\begin{array}{l} x-x'=a(z-z') \\ y-y'=b(z-z') \end{array}\right\}$$

que pasan por el punto (x', y', z') se hallarán colocadas en la superficie que representa la ecuacion [2], y esta será por consiguiente un cono.

Observaciones. I. Sacando de [1]

$$a=\psi(b)$$

resulta para las superficies cónicas la forma

$$\frac{x-x'}{z-z'}=\psi\left(\frac{y-y'}{z-z'}\right).$$

II. Cuando se toma el vértice por origen de las coordenadas se convierten las ecuaciones del cono en

$$\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0 \quad \text{ó} \quad \frac{x}{z}=\psi\left(\frac{y}{z}\right) \qquad [2].$$

Como las ecuaciones [2] son los tipos de las homogéneas que tienen tres variables, *cualquiera ecuacion homogénea con tres variables representa un cono que tiene su vértice en el origen, y recíprocamente.*

III. Si la directriz dada fuese la traza del cono sobre el plano de las xy tendria por ecuaciones

$$f(x,y)=0, \quad z=0;$$

la [1] se transformaria en

$$f(x'-az', y'-bz')=0;$$

y la del cono seria

$$f\left(\frac{x'z-z'x}{z-z'},\ \frac{y'z-z'y}{z-z'}\right)=0 \qquad (3).$$

Esto hace ver que para hallar la ecuacion de la superficie cónica basta sustituir en la ecuacion de su traza sobre el plano de las xy en vez de x é y las respectivas espresiones $\frac{x'z-z'x}{z-z'}$ é $\frac{y'z-z'y}{z-z'}$, siempre que x', y', z' representen las coordenadas del vértice del cono.

EJEMPLO. El cono que tiene por vértice el punto (x', y', z') y por traza sobre el plano de las xy el círculo

$$x^2+y^2=r^2$$

está representado por la ecuacion

$$(x'z-z'x)^2+(y'z-z'y)^2=r^2(z-z')^2.$$

Si fuese recto tendriamos que ser $x'=0$, $y'=0$, y su ecuacion se reduciria á

$$x^2+y^2=\frac{r^2}{z'^2}(z-z')^2.$$

591. *Dada la ecuacion de una superficie reconocer si esta es un cono.*

Si la ecuacion es

$$F(x, y, z)=0 \qquad [1],$$

para que pueda representar un cono se necesita que sea homogénea ó que lo pueda ser cambiando el origen de las coordenadas (590, OBS. III). En el primer caso la (1) representa un cono real ó imaginario que tendrá su vértice en el orígen dado, ó alguna de las variedades de este género; y en el segundo uno cuyo vértice será el orígen nuevo, ó alguna de las variedades de aquel. El cono será real ó imaginario segun que la seccion hallada, cortándole por un plano cualquiera, sea una curva real ó imaginaria. Para simplificar debe tomarse por plano secante uno que sea paralelo á cualquiera de los coordenados.

Tambien se podria reconocer si la superficie propuesta es un cono examinando si hay valores reales de x', y', z' que hagan idénticas (590, OBS. III) las ecuaciones (1) y

$$F\left(\frac{x'z-z'x}{z-z'},\ \frac{y'z-z'y}{z-z'}\right)=0.$$

EJEMPLO. La ecuacion

$$3x^2+2y^2-2xz+4yz-4x-8z-8=0$$

no es homogénea, pero cambiando el origen de las coordenadas, sustituyendo al efecto en vez de x, y, z los valores $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$ se halla que por

$$x'=0,\quad y'=2,\quad z'=-2$$

se convierte en $\qquad 3x^2+2y^2-2xz+4yz=0;$

y como esta es homogénea representa un cono real ó imaginario. Cortándolo por el plano $x=1$ resulta la seccion

$$2y^2+4yz-2z+3=0$$

que es una curva real, y demuestra que tambien lo es la superficie representada por la ecuacion propuesta.

592. *Hallar la ecuacion de un cono que tenga su vértice en un punto dado y sea tangente á una determinada superficie.*

Este problema se resuelve por las mismas consideraciones que hicimos en el núm. 588.

EJEMPLO. *Hallar la ecuacion de un cono que tenga su vértice en el orígen de las coordenadas y sea tangente á la esfera*

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2.$$

Las ecuaciones de la generatriz del cono tienen en este caso la forma

$$\left.\begin{array}{l} x=az \\ y=bz \end{array}\right\};$$

y la proyeccion sobre el plano de las xz de la curva que resulta de cortar la esfera por el plano

$$y=bz$$

está representada por $\quad (x-\alpha)^2+(bz-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2.$

Para que la recta $\qquad x=az$

sea tangente á esta proyeccion debe verificarse que

$$(a\alpha+b\beta+\gamma)^2=(a^2+b^2+1)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2);$$

y se tendrá por consiguiente

$$(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=(x^2+y^2+z^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2$$

para la ecuacion del cono que se buscaba.

Cuando el centro se hallase á la distancia r del orígen se tendria $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=r^2$ y quedaria el cono reducido á un plano, como era fácil haber previsto.

593. *El plano tangente á un cono lo es en cualquier punto de la generatriz que pasa por el de contacto.*

La demostracion es la misma que se dió para el cilindro (**589**).

CAPÍTULO XI.

NÚMERO DE CONDICIONES NECESARIAS PARA DETERMINAR UNA SUPERFICIE DE SEGUNDO GRADO. — ECUACIONES GENERALES DE TODAS LAS SUPERFICIES DE SEGUNDO GRADO QUE SATISFACEN Á CONDICIONES DADAS. — CONDICIONES PARA QUE UNA SUPERFICIE DE ESTE ÓRDEN SEA DE REVOLUCION. — INTERSECCION DE SUPERFICIES DE ESTE GRADO

594. **Número de condiciones necesarias para determinar una superficie de segundo grado.** — *Una superficie de segundo grado queda por lo general determinada cuando se la sujeta á condiciones geométricas que den lugar á nueve ecuaciones diferentes formadas por los coeficientes de su ecuacion general.*

Esto resulta de que no conteniendo realmente la ecuacion general de segundo grado con tres variables

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Bzy+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z$$
$$+F=0 \qquad [1]$$

mas que nueve coeficientes, se necesitará de nueve ecuaciones para determinarlos cuando sean desconocidos.

OBSERVACION. *El paraboloide, cono, cilindro elíptico, cilindro hiperbólico y el parabólico* no pueden jamas quedar sujetos á nueve condiciones arbitrarias, en atencion á las que ya existen entre los coeficientes de la ecuacion [1] cuando esta representa alguna de dichas superficies.

Por ejemplo, para que la ecuacion [1] represente un cono es preciso que la verifiquen las coordenadas del centro, y esto da ya una condicion; por consiguiente y en lo general quedará determinado un cono por *ocho* condiciones arbitrarias.

Tambien un *paraboloide* queda generalmente determinado por *ocho* condiciones arbitrarias; porque es necesario, para que la ecuacion [1] le represente, que las tres ecuaciones que determinan las coordenadas del centro sean incompatibles, y esto da la condicion $R=0$ [477].

Los *cilindros elíptico é hiperbólico* están determinados comunmente por *siete* condiciones; porque teniendo estas superficies una infinidad de centros en línea recta, para que la ecuacion [1] represente una de ellas, es preciso que las ecuaciones del centro se reduzcan á dos solas; lo cual da ya dos relaciones.

Finalmente, el *cilindro parabólico* queda por regla general determinado por *seis* condiciones arbitrarias; pues como las secciones causadas en esta superficie por los planos coordenados deben ser parábolas, resultan tres condiciones. Al mismo resultado se llega espresando que son paralelos todos los planos diametrales.

Reasumiendo debemos decir que no hay mas que el *elipsóide*, el *hiperbolóide de una hoja* y el *de dos* que puedan por lo general sujetarse á *nueve* condiciones arbitrarias.

Vamos ahora á indicar el número de relaciones que debe haber entre los coeficientes de la ecuacion (1), segun las condiciones geométricas impuestas a las superficies que esta represente.

595. Sujetar una superficie de segundo grado á que pase por un cierto punto equivale á una relacion; y se halla esta espresando que las coordenadas del punto verifican la ecuacion de la superficie.

Si este punto fuese alguno de los notables, como un centro, vértice, etc., equivaldria á *tres* condiciones que resultarian de igualar las coordenadas de este punto con ellas mismas espresadas en funcion de los coeficientes de la ecuacion dada.

596. Hacer que una superficie de segundo grado pase por una recta dada equivale á *tres* condiciones, que son las resultantes de igualar á cero los tres coeficientes de la ecuacion en z, resultado de la eliminacion de x é y entre las de la recta y de la superficie; cuyos coeficientes se igualan á cero porque esta ecuacion ha de verificarse cualquiera que sea el valor de z.

Si la recta es alguna de las notables la condicion de que la superficie pase por ella equivale á *cuatro*; y se hallan estas identificando las ecuaciones dadas con las generales de la recta en cuestion.

Finalmente, cuando se determina la direccion de una recta notable ó alguno de sus puntos se introduce con esto solo *dos* condiciones.

597. Cuando se sujeta una superficie de segundo grado á que pase por dos rectas dadas, esta sola condicion equivale á *seis*, si las rectas pertenecen al mismo sistema de generatrices rectilíneas, en cuyo caso no se cortan; y á *cinco* si se cortan.

Hacer que la superficie pase por tres rectas pertenecientes á un mismo sistema de generatrices, es decir que no se corten, equivale á sujetarla á *nueve* condiciones. Si de las tres rectas dos fuesen de un mismo sistema de generatrices rectilíneas y del otro la tercera no darian mas que *siete* condiciones; pues como una de las rectas cortaria á las otras dos quedaria determinada por una sola condicion.

598. La condicion de que una superficie de segundo grado sea tangente á un cierto plano equivale á *una sola*, que resulta de identificar las ecuaciones del plano dado y del tangente á la superficie, y de eliminar las coordenadas del punto de contacto entre las ecuaciones de condicion halladas y la de la superficie. Cuando sean conocidos á un mismo tiempo el plano tangente y el punto de contacto tendrémos *tres* condiciones: la una resulta de espresar que las coordenadas del punto de contacto verifican la ecuacion de la superficie; y las otras dos de identificar la ecuacion del plano tangente con la del dado.

599. Hacer que un *paraboloide* tenga por plano director uno dado es lo mismo que establecer *dos* condiciones; y para hallarlas no hay mas que espresar que las generatrices rectilíneas de uno de los dos sistemas son paralelas á dicho plano.

600. Sujetar á una superficie de segundo grado á que pase por una curva del mismo órden equivale á fijar *cinco* condiciones. Porque haciendo que la superficie pase por cinco puntos cualesquiera de la curva se tiene cinco relaciones entre los coeficientes de la ecuacion (1), y no se aumentan porque toda la curva quede en la superficie; pues si una curva de segundo grado tiene cinco de sus puntos en la superficie está toda ella en la misma, á causa de que la curva queda determinada por cinco puntos y estos pertenecen tambien á la interseccion de la superficie con el plano de la curva.

601. La condicion de que una superficie de segundo grado pase por dos curvas del mismo órden cuyos planos se corten no da mas que *ocho*: pues cortándose los planos de las curvas tienen estas dos puntos comunes reales ó imaginarios colocados en la interseccion de los planos.

Si las dos curvas se hallasen en planos paralelos no seria posible en general que una superficie pasara por ellas: pues las secciones paralelas de una superficie de segundo grado tienen que ser semejantes, y han de tener sus centros colocados en línea recta.

602. A *ocho* condiciones equivale la de que un *hiperbolóide* tenga por asintótico un cono dado; pues todos los coeficientes de la ecuacion de la superficie deben ser iguales á los correspondientes de la del cono, escepto F.

Mas adelante verémos que sujetar una superficie de segundo grado á que sea de revolucion viene á ser lo mismo que establecer *dos* condiciones.

603. Ecuaciones generales de todas las superficies de segundo grado que satisfacen á ciertas condiciones geométricas dadas. — *Dadas las ecuaciones de dos superficies de segundo grado hallar la general de todas las del mismo que pasen por la interseccion de las dos primeras.*

Si $f=0$ [1] y $\varphi=0$ [2]

son las ecuaciones de las dos superficies dadas,

$$f+\lambda\varphi=0 \qquad [3],$$

en que λ es un parámetro arbitrario, representa la que se busca.

Es evidente que todas las superficies comprendidas en la ecuacion [3] pasan por la interseccion de las propuestas sin tener con ellas otros puntos comunes: por lo tanto solo falta demostrar que toda superficie de segundo grado que pase por la interseccion de las [1] y [2] queda representada por la [3], con tal que se determine convenientemente la cantidad λ.

Sean S una superficie de segundo grado que pase por la interseccion de las [1] y [2], M uno de sus puntos que no esté en dicha interseccion, y λ_1 el valor de λ sacado de la ecuacion [3] despues de sustituir las coordenadas del punto M; la ecuacion

$$f+\lambda_1\varphi=0 \qquad [4]$$

representará la superficie S. En efecto, el punto M se halla en la superficie [4], porque las coordenadas de aquel satisfacen á la ecuacion de esta. Tirando por él un plano P que corte á las superficies [1] y [2] en curvas que llamarémos A y B, el mismo cortará á la S por una de segundo grado C que pasará por M y por los cuatro puntos reales ó imaginarios comunes á A y á B; pero tambien el plano P cortará á la superficie representada por [4], segun una curva C′ de segundo grado que pasará igualmente por el punto M y por los cuatro de interseccion de A y B, pues [4] pasa por todos los comunes á [1] y [2]; luego C y C′ tienen cinco puntos comunes, y como son curvas de segundo grado se confunden y forman una sola. De aquí resulta que todo plano tirado por M corta á las superficies S y [4] en curvas que de dos en dos son idénticas: luego S y [4] coinciden, y [4] representa á S.

604. *Dada la ecuacion de una superficie de segundo grado y las de dos planos hallar la general de todas las del mismo que pasen por las intersecciones de aquella con estos.*

La resolucion de este problema se deduce del precedente: porque si $f=0$ es la ecuacion de la superficie, $P=0$ y $P'=0$ las de los dos planos, como se puede considerar que $PP'=0$ representa una superficie de segundo grado, la ecuacion que se pide será

$$f+\lambda PP'=0.$$

Si $Q=0$ y $Q'=0$ representan otros dos planos,

$$QQ'+\lambda PP'=0$$

será *en general la superficie de segundo grado que pase por las cuatro rectas intersecciones de los planos* $Q=0$, $Q'=0$ *con los* $P=0$, $P'=0$.

605. *Hallar la ecuacion general de las superficies de segundo grado que toquen á otra dada del mismo segun una curva determinada del propio grado.*

Si $f=0$ es la ecuacion de la superficie conocida, y $P=0$ el plano de la curva de contacto, en virtud de lo que precede será la ecuacion pedida

$$f+\lambda P^2=0.$$

Porque la superficie que representa $f+\lambda PP'=0$ queda tangente á la propuesta $f=0$ cuando los dos planos $P=0$ y $P'=0$ se confunden en uno solo.

606. Para que sirva de ejemplo buscarémos *la ecuacion del cono que tenga su vértice en un punto determinado y esté circunscripto á un cierto elipsóide.*

Sean
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad [1]$$
la ecuacion del elipsóide, y (α, β, γ) el punto que ha de servir de vértice al cono que se busca.

El lugar de los puntos de contacto de este cono con el elipsóide es el mismo en que tocan á este elipsóide los planos tangentes tirados por el punto (α, β, γ), planos que tambien son tangentes al cono. Pero llamando x, y, z las coordenadas del punto de contacto de los planos tangentes, el último lugar citado será la curva de segundo grado en que el plano
$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=1 \qquad [2]$$
corta al elipsóide. Además, la ecuacion de todas las superficies de segundo grado tangentes al elipsóide en esta curva es
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1+\lambda\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}-1\right)^2=0 \quad [3];$$
y como el cono es la única superficie de segundo grado cuyos planos tangentes pasan todos por un mismo punto, se deduce que para hallar la ecuacion del que se busca no hay mas que poner en la ecuacion [3] el valor de λ sacado de la última, despues de sustituir x, y y z por las coordenadas α, β y γ del vértice.

607. *Dadas las ecuaciones de una curva de segundo grado hallar la de todas las superficies del mismo órden que pasen por aquella.*

Como se puede concebir que la curva ha resultado de la interseccion de un plano con una superficie de segundo grado estará bien representada por
$$f=0 \quad [1] \qquad \text{y} \quad P=0 \quad [2],$$

siendo la primera la ecuacion de la superficie y la segunda la del plano. La que se busca será bajo este supuesto

$$f + (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) P = 0 \qquad [3],$$

en que α, β, γ y δ son cuatro parámetros arbitrarios; y en efecto la ecuacion [3] es de segundo grado, y todas las superficies que representa pasan por la curva propuesta, porque dicha ecuacion se verifica por las soluciones comunes á las [1] y [2]. Además, representa todas las superficies de dicho grado que pasan por aquella curva. Para demostrarlo tomarémos una superficie S que pase por cinco puntos de la curva y por otros cuatro situados fuera de esta, y será posible determinar los parametros α, β, γ, δ de modo que la superficie [3] que ya pasa por los cinco puntos de la curva dada contenga tambien los otros cuatro: por lo tanto las superficies S y [3] satisfarán ambas á nueve condiciones diferentes, y coincidirán. Por consiguiente la ecuacion [3] representa cuantas superficies pasan por la curva dada.

Así dirémos que la ecuacion general de las superficies de segundo grado que pasen por la interseccion del elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

y del plano $mx + ny + pz + q = 0$ es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 + (mx + ny + pz + q)(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0.$$

Puede pedirse que los parámetros α, β, γ, δ satisfagan á la condicion de que la superficie representada por esta ecuacion sea de segundo grado y de una determinada especie. Si por ejemplo se quiere que sea un cono que tenga su vértice en un punto dado, bastará espresar que las coordenadas de este punto verifican la ecuacion de la superficie y las que determinan el centro; pero debemos observar que la resultante puede representar un cono real, imaginario ó alguna de sus variedades; á saber: un punto ó una recta.

608. Condiciones para que una ecuacion de segundo grado represente una superficie de revolucion. — *Hallar las condiciones* *que deben existir en los coeficientes de una ecuacion de segundo grado para que la superficie que esta represente sea de revolucion.*

Suponiendo que los ejes sean rectangulares, si la superficie

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy+2Cx+2C'y$$
$$+2C''z+F=0 \qquad [1]$$

es de revolucion, describiendo una esfera desde un centro (x_1, y_1, z_1) tomado en su eje y con un radio R que esté comprendido entre límites convenientes, la interseccion de esta esfera con la superficie de que se trata se compondrá de dos circunferencias de círculo, cuyos planos serán paralelos como perpendiculares al eje.

Recíprocamente, cuando una superficie de segundo grado está cortada por dos planos paralelos segun círculos que tengan sus planos perpendiculares á la recta que une sus centros será de revolucion: pues todos los planos paralelos á estos cortarán á la superficie en círculos cuyos centros se hallarán en la recta que une los primeros, en virtud de que ya sabemos que las secciones hechas en una superficie de segundo grado por planos paralelos son curvas semejantes que tienen sus centros en línea recta (523 y 524).

Esto supuesto cuando se quiera hallar las condiciones necesarias para que la superficie dada sea de revolucion no habrá mas que espresar que la ecuacion general

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Bzy+\ldots+F$$
$$+\lambda[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2-R^2]=0 \qquad [2]$$

de las superficies de segundo grado que pasen por la interseccion de la [1] con la esfera

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2$$

representa dos planos paralelos.

Para que así sea es necesario que se pueda disponer de los parámetros arbitrarios para que reduzcan á una sola las tres ecuaciones que determinan las coordenadas del centro (478, 2.º); pero estas se pueden reducir á una de varios modos, pues ó son las tres equivalentes, ó alguna de ellas es una identidad y las otras dos equivalentes, ó dos son idénticas. Las que determinan el centro de la superficie [1] son

$$Ax + B''y + B'z + C + \lambda(x - x_1) = 0,$$

$$B''x + A'y + Bz + C' + \lambda(y - y_1) = 0,$$

$$B'x + By + A''z + C'' + \lambda(z - z_1) = 0,$$

y para que se reduzcan á una es necesario que se tenga

$$\frac{A+\lambda}{B''} = \frac{B''}{A'+\lambda} = \frac{B'}{B} = \frac{C-\lambda x_1}{C'-\lambda y_1} \text{ y } \frac{A+\lambda}{B'} = \frac{B''}{B} = \frac{B'}{A''+\lambda} = \frac{C-\lambda x_1}{C''-\lambda z_1},$$

de donde sale igualando los valores de λ

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{BB''}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''} \qquad [3];$$

y como estas dos relaciones deben verificarse por sí mismas, pues no dependen de R ni de x_1, y_1, z_1, son las condiciones necesarias para que la superficie representada por la ecuacion propuesta sea de revolucion.

Decimos que son suficientes, pues cuando se verifican, la ecuacion [2] representa dos planos paralelos, y como los valores de λ y de x_1, y_1, z_1 son independientes de R se podrá siempre describir una esfera desde el punto (x_1, y_1, z_1) como centro y con un radio R tal que la esfera corte á la superficie propuesta siempre que esta sea real. Por consiguiente, pudiéndose cortar dicha superficie dada por dos planos paralelos que causen círculos será de revolucion.

Cuando quedan satisfechas las condiciones [3], las ecuaciones del eje de la superficie de revolucion son

$$\frac{C-\lambda x_1}{B'B''} = \frac{C'-\lambda y_1}{BB''} = \frac{C''-\lambda z_1}{BB'},$$

en las que habria que poner el valor de λ.

609. Lo que dejamos dicho supone que ninguno de los coeficientes B, B', B'' sea cero. Ahora vamos á examinar los diferentes casos particulares que pueden presentarse.

Si $B=0$, las ecuaciones del centro son

$$(A+\lambda)x+B''y+B'z+C-\lambda x_1=0$$
$$B''x+(A'+\lambda)y+C'-\lambda y_1=0$$
$$B'x+(A''+\lambda)z+C''-\lambda z_1=0;$$

y para que puedan las tres reducirse á una sola es menester, que al mismo tiempo que sea $B=0$, lo sea B', ó B'' ó B' y B'': porque es evidente que de lo contrario ni podria ser la primera una identidad, ni identificarse al mismo tiempo á cada una de las otras dos.

Supongamos que $B'=0$. En este caso puede ocurrir ó que $B''=0$ ó que $B''\gtreqless 0$.

Cuando $B''=0$ las ecuaciones del centro se reducen á

$$(A+\lambda)x+C-\lambda x_1=0$$
$$(A'+\lambda)y+C'-\lambda y_1=0$$
$$(A''+\lambda)z+C''-\lambda z_1=0;$$

y como estas ecuaciones representan planos respectivamente paralelos á los ejes no se puede identificar una con otra: luego es preciso para que se reduzcan á una sola que dos de ellas se verifiquen por sí mismas. Si fuesen las dos últimas se tendria

$$A'+\lambda=0,\quad C'-\lambda y_1=0 \quad y \quad A''+\lambda=0,\quad C''-\lambda z_1=0,$$

y de aquí resultaria la condicion

$$A'=A''.$$

Bajo esta hipótesis el eje de la superficie de revolucion tiene por ecuaciones

$$C'-\lambda y_1=0,\quad C''-\lambda z_1=0.$$

Si fueran idénticas las ecuaciones primera y segunda, ó la primera y la tercera, se tendria

$$A=A' \quad ó \quad A=A''.$$

610. Finalmente, cuando $B''\gtreqless 0$ queda determinado el centro por

$$(A+\lambda)x+B''y+C-\lambda x_1=0$$
$$B''x+(A'+\lambda)y+C'-\lambda y_1=0$$
$$(A''+\lambda)z+C''-\lambda z_1=0.$$

La tercera de estas ecuaciones no puede ser idéntica á ninguna de las otras dos, porque representa un plano paralelo al de las xy: por consiguiente es preciso que sea una identidad, y que una de las dos primeras esté comprendida en la otra, lo que da

$$A''+\lambda=0,\quad C''-\lambda z_1=0\quad \text{y}\quad \frac{A+\lambda}{B''}=\frac{B''}{A'+\lambda}=\frac{C-\lambda x_1}{C'-\lambda y_1};$$

de donde resulta la condicion

$$B''^2=(A-A'')(A'-A'').$$

Cuando se verifique esta ecuacion las del eje de la superficie serán

$$C''+A''z_1=0,\quad (C'+A''y_1)(A-A'')=B''(C+A''x_1).$$

Reasumiendo debemos decir que si ha de ser de revolucion la superficie representada por (1) es necesario que sus coeficientes satisfagan á una de las siguientes condiciones:

1.ª Cuando ninguno de los coeficientes B, B', B'' sea cero debe verificarse

$$A-\frac{B'B''}{B}=A'-\frac{BB''}{B'}=A''-\frac{BB'}{B''}.$$

2.ª Si $$B=B'=B''=0$$

ha de ser $$A'=A'',\quad A=A'\quad \text{ó}\quad A=A''.$$

3.ª Finalmente, segun que se tenga

$$\left.\begin{array}{l} B=0,\ B'=0,\ B''\gtreqless 0\\ \quad\text{ó}\\ B=0,\ B''=0,\ B'\gtreqless 0\\ \quad\text{ó}\\ B'=0,\ B''=0,\ B\gtreqless 0\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{será preciso que}\\ \text{se verifique...}\end{array}\left\{\begin{array}{l} B''^2=(A-A'')(A'-A'')\\ \\ B'^2=(A-A')(A''-A')\\ \\ B^2=(A'-A)(A''-A).\end{array}\right.$$

Puede servir de ejemplo la investigacion de las condiciones necesarias para que sea de revolucion un cono circunscripto al elipsóide representado por la ecuacion dada en el núm. **606**.

OBSERVACION. Se llega á las mismas condiciones cortando la superficie propuesta $f=0$ por dos planos paralelos $P=0$, $P'=0$, y espresando que representa una esfera la ecuacion $f+\lambda PP'=0$ que comprende todas las superficies de segundo grado que pasan por las intersecciones de la propuesta y los dos planos.

611. Interseccion de dos superficies de segundo grado.—*Esta curva es por lo general de doble curvatura y se proyecta sobre los planos coordenados segun otras del grado cuarto.* Esto resulta de que eliminando cualquiera de las variables x, y ó z entre las ecuaciones de dos superficies de segundo grado se llega por lo general á una de cuarto entre las otras dos.

Hay sin embargo casos en que dos superficies de segundo grado se cortan por dos líneas planas; y sobre este particular son muy importantes los dos siguientes teoremas, cuyo principal interés se reconoce en Geometría descriptiva. Nos limitamos á dar su enunciado, y no su demostracion, porque esta no ofrece dificultad.

612. *Cuando dos superficies de segundo grado tienen una curva de interseccion que sea plana han de tener necesariamente otra tambien plana.*

Si dos superficies de segundo grado tienen comun uno de sus planos principales, y se proyecta la interseccion de las superficies sobre otro paralelo á este principal, la proyeccion será una curva de segundo grado.

Este segundo teorema es tambien cierto cuando se trate de un plano diametral cualquiera, con tal que las proyecciones se hagan en sentido paralelo á las cuerdas conjugadas de este.

613. EJERCICIOS. *Hallar el lugar geométrico de todos los puntos del espacio cuyas distancias á dos fijos den una suma ó una resta constante: 1.º geométricamente; 2.º por el cálculo.—Demostrar la identidad de los dos resultados.*

El lugar d l punto medio de una recta cuya longitud sea constante y cuyos extremos resbalen sobre otras dos cualesquiera. Deducir de este el caso en que las dos directrices estén en un mismo plano y sean perpendiculares entre sí: 1.º geométricamente; 2.º por medio del cálculo.

Dada una parábola $z=0$, $y^2=2px$ y un punto (α, β, γ), y tomando éste por vértice de un cono que tenga su base en aquella, se quiere hallar la ecuacion de este cono y averiguar si puede ser de revolucion.

Lo mismo sustituyendo la parábola por una elipse ó hipérbola.

Determinar el lugar de los puntos equidistantes de dos rectas que se corten.

Idem cuando las dos rectas no estén situadas en un mismo plano.

Hallar el lugar que describe la arista de un ángulo diedro recto, cuyas caras pasan constantemente por dos rectas dadas que no estén en un mismo plano.

El de los puntos que sus distancias á dos ejes rectangulares den por suma una recta conocida.

El de aquellos que tengan constante la razon de sus distancias á una recta y á un plano fijos.

El de los centros de todas las esferas tangentes exteriormente á dos dadas. Idem á tres, siendo rectangulares las coordenadas.

El de todos los puntos que la suma de los cuadrados de sus distancias á otros m fijos sea constante.

El lugar descrito por una recta que resbale sobre otras dos no situadas en un mismo plano formando en cada instante ángulos iguales con ambas.

Idem por una recta que resbale sobre dos círculos paralelos y sobre una perpendicular á los dos.

Idem por una circunferencia de círculo cuando gira alrededor de una recta situada en su plano y sin cortarla (toro).

La ecuacion del elizoide desarrollable.

El lugar de todos los puntos que la distancia de cada uno de ellos á otro cualquiera de una elipse dada sea una funcion racional de las coordenadas de este último.

Demostrar que si una elipse y una hipérbola tienen sus planos perpendiculares, y los vértices de la una son focos de la otra, todo cono que tenga por base la elipse y por vértice un punto de la hipérbola es de revolucion.

Cortando un elipsoide de revolucion por un plano cualquiera el cono que tenga su base en la seccion resultante y por vértice un foco del elipsoide es tambien de revolucion.

Una circunferencia C cuyo radio es R rueda en lo interior de otra fija de radio igual á 2R, y arrastra consigo otra C' que tiene un diámetro AB comun con C, siendo el plano de C' perpendicular á los de C y de la fija. Se quiere hallar: 1.º la línea engendrada en el espacio por un punto cualquiera ligado con las circunferencias C y C'; 2.º á qué curvas son tangentes las proyecciones hechas sobre el plano de la circunferencia fija de todas las diferentes líneas descritas por los puntos de C'; 3.º la superficie engendrada por C'.

APÉNDICE.

INTERPOLACION.

614. Definicion.—Cuando el valor de una funcion $y=f(x)$ está conocido solamente para ciertos valores aislados y_0, y_1, y_2,... y_n, correspondientes á otros x_0, x_1, x_2,... x_n de la variable, valores que supondrémos crecientes y sujetos á una cierta ley, puede necesitarse determinar el valor que tomará la funcion y por uno de x comprendido entre x_0 y x_1, ó entre x_1 y x_2, ó entre x_2 y x_3... ó en general entre x_{n-1} y x_n; y esto es lo que se llama *interpolar*. Vamos á ocuparnos en este apéndice de los métodos de interpolacion que se usan con mas frecuencia.

615. Método gráfico.—Este es uno de los mas generalmente empleados por los ingenieros, y para darle á conocer supongamos que se haya trazado dos ejes rectangulares y construido con arreglo á escala todos los puntos que tengan por coordenadas x_0 é y_0, x_1 é y_1, x_2 é y_2,... x_n é y_n, por cuyos puntos se podrá trazar á mano una curva continua. Hecho esto, para hallar el valor de y correspondiente á otro cualquiera dado á x y comprendido entre x_0 y x_n, ó aunque sea algo menor que x_0 ó mayor que x_n, bastará medir sobre el dibujo la ordenada del punto de la curva que tenga por abscisa el valor dado á x.

La aproximacion obtenida por este método basta en muchos casos de los que ocurren en la práctica.

OBSERVACIONES. I. Cuando la funcion sea susceptible de un máximo ó de un mínimo en el intérvalo de x_0 á x_n el dibujo le dará á conocer; y para determinar este máximo ó mínimo no hay mas que buscar el punto de la curva en que la tangente sea paralela al eje de las x (110), y medir sus coordenadas: la abscisa será el valor de la variable que hace tomar á la funcion el máximo ó mínimo, y la ordenada el mismo valor máximo ó mínimo de la funcion.

II. Desde luego se echa de ver que el problema de la interpolacion es indeterminado, porque se puede hacer pasar una infinidad de curvas por todos los puntos dados, y cualquiera de ellas llenará el objeto. Cuando la funcion que se considere se refiera á fenómenos físicos la misma continuidad que se observa generalmente en la naturaleza induce á escoger aquella curva que tenga menos sinuosidades y que mas se aproxime á la línea quebrada que une cada dos de los puntos dados.

Lo mismo se hace cuando la funcion es puramente matemática, ya sea algebráica ó trascendente, con tal que sea continua y que los valores consecutivos dados estén bastante próximos para que se pueda creer que la funcion no se aparta notablemente de la curva que pase por ellos.

616. Método de Lagrange. — Tambien se puede hacer la interpolacion por medio del cálculo, y uno de los métodos mas ingeniosos es el debido á Lagrange. Para darle mejor á conocer empezarémos suponiendo que únicamente sean conocidos un corto número de valores de la funcion, por ejemplo cinco

$$y_0, \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad y_4$$

correspondientes á los

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \quad \text{de} \quad x,$$

y que se quiere hallar una funcion que se reduzca á y_0 cuando $x=x_0$, á y_1 cuando $x=x_1$, á y_2 si $x=x_2$, á y_3 si $x=x_3$, y finalmente á y_4 dando á x el valor x_4.

Tómense los cinco binomios $x-x_0$, $x-x_1$, $x-x_2$, $x-x_3$, $x-x_4$, y fórmese uno de sus productos de 4 á 4, por ejemplo el

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \qquad [1].$$

Este producto se reduce á cero haciendo $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$ ó $x=x_4$; pero haciendo $x=x_0$ toma el valor finito.

$$(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4) \qquad [2];$$

de modo que el cociente de los dos productos [1] y [2] se reduce á la unidad cuando se da á x el valor x_0, por lo cual multiplicándole por y_0 se hallará una espresion

$$y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)},$$

que se reducirá á y_0 cuando x tome el valor x_0, y á cero dando á x cualquiera de los valores x_1, x_2, x_3 ó x_4.

Considerando igualmente el producto

$$(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \qquad [3],$$

y haciendo $x=x_1$, saldrá

$$(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4) \qquad [4];$$

y dividiendo el producto [3] por el [4], y multiplicando el cociente por y_1, resulta la espresion

$$\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)},$$

que se reduce á y_1 haciendo $x=x_1$, y á cero cuando x toma el valor x_0, x_2, x_3, ó x_4.

Las otras combinaciones darán espresiones análogas á estas y en las que figurarán y_2, y_3 ó y_4.

Resulta de la naturaleza de estas espresiones que sumándolas se tendrá una funcion que se reducirá á y_0 si á x se da el valor x_0, á y_1 haciendo $x=x_1$, á y_2 si $x=x_2$, y así sucesivamente; de modo que esta suma será la funcion que se busca. Por lo tanto la fórmula que se necesitaba hallar para la interpolacion es

$$\begin{aligned}
y = y_0 &\cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} \\
+ y_1 &\cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \\
+ y_2 &\cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \\
+ y_3 &\cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \\
+ y_4 &\cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}.
\end{aligned}$$

La curva que representa esta ecuacion es de cuarto grado.

617. Si en vez de cinco valores de la funcion hubiera $n+1$ se formarian los binomios $x-x_0$, $x-x_1$, ... $x-x_n$, se consideraria separadamente cada una de las combinaciones de estos binomios tomados n á n, y resultaria como antes una série de espresiones dotadas de la propiedad siguiente: que todas se reducirian á cero haciendo $x=x_0$ menos una que se reduciria á y_0; todas á cero cuando $x=x_1$ escepto una que se convertiria en y_1; todas á cero por el valor $x=x_2$ á escepcion de una que se reduciria á y_2, y así sucesivamente.

Sumando estas espresiones se tendrá la funcion que se busca, é igualándola á y resultará la fórmula que se necesita para la interpolacion.

La curva que representa es del grado n, y se llama *parábola del grado* n^{mo}.

618. Ejemplo. Supongamos que los valores de x sean

$$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

y que á estos correspondan los

$$y=1,\ 4,\ 5,\ 3,\ 2\cdot$$

sustituyéndolos en la fórmula del núm. **616** resultará

$$y=1.\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{-1.-2.-3.-4}+4.\frac{x(x-2)(x-3)(x-4)}{1.-1.-2.-3}$$

$$+5.\frac{x(x-1)(x-3)(x-4)}{2.1.-1.-2}+3.\frac{x(x-1)(x-2)(x-4)}{3.2.1.-1}$$

$$+2.\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4.3.2.1}$$

ó bien desarrollando y simplificando

$$y=\frac{1}{24}(5x^4-34x^3+43x^2+58x+24),$$

cuya funcion llena completamente las condiciones propuestas.

619. Simplificacion del método de Lagrange. — La fórmula debida á este autor, aunque muy elegante, es penosa en la práctica cuando el número de valores dados para la funcion es bastante grande; pero hay un caso particular que merece examinarse separadamente. Este tiene lugar cuando se conocen tres valores de la funcion correspondientes á otros tantos de la variable que formen progresion aritmética, ó lo que es lo mismo, cuando se quiere hacer pasar una curva por tres puntos dados, que tengan equidistantes sus ordenadas sucesivas.

Entonces se puede hacer pasar el eje de las y por el primer punto dado, y llamando δ al intérvalo que haya entre dos ordenadas consecutivas se tendrá $x_0=0$, $x_1=\delta$, $x_2=2\delta$; de modo que la fórmula de Lagrange, que en el caso de que sean 3 los puntos dados se reduce á

$$y=y_0\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$
$$+y_2\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

se convierte en el presente en

$$y=y_0\cdot\frac{(x-\delta)(x-2\delta)}{-\delta\,.-2\delta}+y_1\cdot\frac{x(x-2\delta)}{\delta\,.-\delta}+y_2\cdot\frac{x(x-\delta)}{2\delta\,.\delta},$$

ó bien desarrollando los cálculos, simplificando y ordenando, á

$$y=y_0-\frac{(3y_0-4y_1+y_2)}{2\delta}\cdot x+\frac{y_0-2y_1+y_2}{2\delta^2}x^2,$$

cuya ecuacion representa una parábola de segundo grado que tiene su eje paralelo al de las y.

Aun se puede presentar esta ecuacion bajo una forma mas sencilla. Hágase $y_1-y_0=\Delta_1$, $y_2-y_1=\Delta'_1$, $\Delta'_1-\Delta_1=\Delta_2$, en cuyas hipótesis Δ_1 y Δ_2 no son otra cosa que las diferencias primera y segunda, y tendrémos

$$y_1=y_0+\Delta_1$$

é

$$y_2=y_1+\Delta'_1=y_0+2\Delta_1+\Delta_2,$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion de la curva daran

$$y=y_0+\frac{2\Delta_1-\Delta_2}{2\delta}x+\frac{\Delta_2}{2\delta^2}x^2.$$

EJEMPLO. Sean $y_0=3,\quad y_1=15,\quad y_2=7,\quad \delta=1,$

y tendrémos $\Delta_1=12,\quad \Delta'_1=-8,\quad \Delta_2=-20,$

y por consiguiente $y=3+22x-10x^2.$

620. Para hallar la ordenada intermedia á y_0 ó y_1 hay que hacer $x=\frac{1}{2}\delta$ en la ecuacion de la curva, lo que da

$$y=y_0+\tfrac{1}{2}\Delta_1-\tfrac{1}{8}\Delta_2 \qquad [1].$$

Se usa con mucha frecuencia de esta fórmula en los problemas de la interpolacion, y se la traduce al lenguaje ordinario del modo siguiente: *cuando se conocen tres ordenadas equidistantes se halla la intermedia añadiendo á la primera la mitad de la primera diferencia y quitando de la suma la octava parte de la diferencia segunda.*

Haciendo aplicacion al ejemplo anterior se hallaria

$$y=3+\tfrac{1}{2}.12-\tfrac{1}{8}(-20)=11\tfrac{1}{2}.$$

621. **Interpolacion por medio de las diferencias.** — Si todos los valores x_0, x_1, x_2,... x_n de la variable correspondientes á los y_0, y_1, y_2,... y_n dados para la funcion se hallan en progresion aritmética, ó lo que es lo mismo, si los $n+1$ puntos dados tienen equidistantes sus ordenadas, se puede hallar una fórmula muy sencilla para la interpolacion haciendo uso de las diferencias de los diversos órdenes.

En Álgebra se demostró que llamando Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4,... Δ_n á las diferencias de primero, segundo, tercero, etc., órdenes se verifica que

$$y_n=y_0+n\Delta_1+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta_2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta_3+\ldots+\Delta_n.$$

Hágase pasar el eje de las y por el primer punto, que equivale á hacer $x_0=0$, y supóngase $x=n\delta$, cuya fórmula reproducirá las abscisas de todos los puntos dados haciendo en ella sucesivamente $n=0$, $n=1$, $n=2$, etc., y de la que se saca $n=\frac{x}{\delta}$: sustituyendo este valor en el de y_n, y suprimiendo el índice n de y, se tendrá

$$(1)\quad y=y_0+\frac{x}{\delta}\cdot\Delta_1+\frac{\frac{x}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}-1\right)}{1.2}\Delta_2+\frac{\frac{x}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}-1\right)\left(\frac{x}{\delta}-2\right)}{1.2.3}\Delta_3+\text{etc.}$$

Esta fórmula da por $x=0\ldots\ldots y=y_0$,

$$x=\delta\ldots\ldots y=y_0+\Delta_1=y_1,$$

$$x=2\delta\ldots\ldots y=y_0+2\Delta_1+2\Delta_2=y_2,$$

$$x=3\delta\ldots\ldots y=y_0+3\Delta_1+3\Delta_2+\Delta_3=y_3,$$

....

y por $\qquad x=n\delta\ldots\ldots y=y_n$.

Por consiguiente esta fórmula es la de interpolacion, con tal que se considere á x por la variable, pues representa una curva que pasa por los $n+1$ puntos dados. Esta curva es una parábola de n^{mo} grado, y por lo tanto idéntica á la que daria la fórmula de Lagrange; pues como una parábola de este grado solo tiene $n+1$ parámetros, queda completamente determinada cuando se la obliga á pasar por $n+1$ puntos dados.

Si, por ejemplo, se vuelve á tomar los datos del núm. **618**, á saber:

$$y_0=1,\quad y_1=4,\quad y_2=5,\quad y_3=3,\quad y_4=2,\quad \delta=1$$

se deducirá de ellos que

$$\Delta_1=+3,\quad \Delta_2=-2,\quad \Delta_3=-1,\quad \Delta_4=+5;$$

por consiguiente la fórmula de interpolacion será en este cas

$$y=1+\frac{x}{1}3+\frac{x(x-1)}{1.2}(-2)+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}(-1)+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}5.$$

Desarrollando los cálculos y haciendo la simplificacion resulta

$$y=\frac{1}{24}(5x^4-34x^3+43x^2+58x+24),$$

lo mismo que en el número citado.

Observaciones. I. La fórmula de la interpolacion por medio de las diferencias es mas sencilla que la de Lagrange, pero menos general, porque supone que las ordenadas conocidas estén equidistantes.

II. Cuando estas ordenadas no son mas que tres se reduce la fórmula á

$$y=y_0+\frac{x}{\delta}\Delta_1+\frac{\frac{x}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}-1\right)}{1 \cdot 2}\Delta_2 \qquad [1],$$

ú ordenando con relacion á x

$$y=y_0+(\Delta_1-\tfrac{1}{2}\Delta_2)\frac{x}{\delta}+\tfrac{1}{2}\Delta_2\frac{x^2}{\delta^2},$$

que es la del núm. 619 presentada bajo otra forma.

III. Cuando sea $x=\frac{1}{2}\delta$ dará

$$y=y_0+\tfrac{1}{2}\Delta_1-\tfrac{1}{8}\Delta_2,$$

que es la fórmula del núm. 620.

622. Por regla general se puede despreciar las terceras diferencias cuando los valores dados para la funcion están equidistantes y muy próximos unos á otros; y en este caso y valiéndose de la fórmula anterior se puede interpolar,

$$y=y_0+(\Delta_1-\tfrac{1}{2}\Delta_2)\frac{x}{\delta}+\tfrac{1}{2}\Delta_2\frac{x^2}{\delta^2},$$

lo que equivale á suponer que el arco de curva que pasa por tres puntos consecutivos se confunde sensiblemente con una parábola de segundo grado. Hay que tener entendido que es preciso contar el valor de x desde el pié de la primera ordenada de las tres que se considere y que estén determinadas por Δ_1 y Δ_2.

EJEMPLO. Supongamos que se trata de calcular el logaritmo del seno de 2°1′20″ por medio de una tabla que solamente dé los de las líneas trigonométricas de minuto en minuto, y hallarémos

$$y_0=8{,}5464218,\quad \Delta_1=0{,}0035730,\quad \Delta'_1=0{,}0035438,$$

de donde resulta $\quad \Delta_2=-0{,}0000292;\quad$ además $\quad \delta=60''$;

por consiguiente será

$$y=8{,}5464218+(0{,}0035730+0{,}0000146)\cdot\frac{20}{60}-0{,}0000146\left(\frac{20}{60}\right)^2.$$

Sustituyendo $\frac{1}{3}$ en vez de $\frac{20}{60}$ y efectuando los cálculos indicados se hallará

$$y=8{,}5476161,$$

que en efecto es el logaritmo del seno de $2°1'20''$, como se encuentra en las tablas que tienen calculados los arcos de $10''$ en $10''$

623. Cuando tambien las diferencias segundas son tan pequeñas que se las puede desechar se reduce la formula á

$$y=y_0+\Delta_1\frac{x}{\delta} \quad \text{ó} \quad y-y_0=\Delta_1\frac{x}{\delta},$$

y entonces se hace la interpolacion como si el arco de curva que reune dos puntos consecutivos se confundiera con su cuerda.

En la formula $y-y_0=\Delta_1\frac{x}{\delta}$ se reconoce la regla ordinaria de las partes proporcionales que se sigue en el uso de las tablas de logaritmos; porque puede enunciarse diciendo que: *para hallar la diferencia $y-y_0$ entre el logaritmo que se busca y el que le sea inmediatamente inferior en las tablas hay que multiplicar la diferencia tabular Δ_1 por la x que haya entre el número ó arco que se considera y el número ó arco inmediatamente inferior á este que contengan las tablas y dividir el producto por la diferencia constante δ que hay entre dos números ó arcos consecutivos en la tabla.*

Esta regla seria inexacta cuando las diferencias segundas no fueran tan pequeñas que se pudieran despreciar. Aplicándola, por ejemplo, á la cuestion propuesta en el número precedente se hallará

$$y=8{,}5464218+0{,}0035730\cdot\frac{20}{60}=8{,}5476128,$$

valor que se diferencia del verdadero en 0,0000033.

Observacion. Tambien puede servir la fórmula (4) del número 621 para apreciar de antemano el límite del error que se comete al aplicar la regla de las partes proporcionales; pero no es este lugar oportuno de entrar en estas consideraciones, que son mas bien propias del Álgebra.

FIN.

TABLA DE MATERIAS.

SEGUNDA PARTE.

GEOMETRÍA ANALÍTICA DE TRES DIMENSIONES.

FIN DE LA TABLA.

METODO DE AHN.

PRIMER CURSO DE FRANCES con un *Compendio de Gramática francesa.—Vigésimasegunda edicion.*—Madrid, 1883. Un tomo en 12.º
Precio: 2 pesetas.

Segundo curso de Francés con un *Compendio de Gramática francesa* y con un *Diccionario francés-español* de todas las voces empleadas en los dos cursos.—*Décimaquinta edicion.*—Madrid, 1883. Un tomo.
Precio: 2 pesetas.

Clave de Temas del Primero y Segundo curso de Francés.—Décimacuarta edicion.—Madrid, 1883. Un tomito. Se da *gratis* á los que toman los dos *Cursos de Francés*, y por separado á 50 cént. de peseta.

Clave para el estudio de todos los Verbos franceses, con las reglas, excepciones y ejemplos. Dedicada á la juventud española: por Francis NAVONE, caballero de la Real órden de Isabel la Católica.—*Complemento al Método de Ahn.—Segunda edicion.* Madrid, 1883. Precio en toda España: 50 céntimos de peseta.

Sin el estudio constante y profundo de las *Conjugaciones de los verbos*, es imposible hablar bien el idioma. — (*De Sévigné*).

ADVERTENCIA.—A los que compren el *Primero y Segundo curso de Francés* solo costará un real.

NOTA.—**El Primero y Segundo curso**, con la Clave de Temas y la Clave de los verbos franceses, encartonados en un tomo, 4,75 pesetas.

CURSO DE INGLES, precedido de reglas y ejercicios de lectura, y seguido de un apéndice gramatical, con listas de voces, diálogos, etc.—*Sexta edicion.*—Madrid, 1883. Un tomo, 2,50 pesetas.

Clave de Temas del Curso de Inglés.—Quinta edicion.—Madrid, 1882.
Precio: 1 peseta.

PRIMER CURSO DE ITALIANO.—*Segunda edicion.*—Madrid 1878. Un tomo. Precio en toda España, 1,50 pesetas.

Segundo curso de Italiano.—Segunda edicion.—Madrid, 1883. Un tomo. Precio en toda España, 1,50 pesetas.

Primero y Segundo Curso de Italiano, encartonados en un solo tomo. Precio: 3,50 pesetas.

PRIMERO Y SEGUNDO CURSO DE PORTUGUES *con la Clave de Temas.* Madrid, 1876. Un tomo en 12.º, 3 pesetas.

PRIMER CURSO DE ALEMAN.—Nuevo método para aprender el idioma aleman segun el sistema de F. AHN: por D. Camilo VALLES.—Leipzig, 1875.—Un tomo, 1,25 pesetas.

Segundo curso de Aleman.—Nuevo método para aprender el idioma aleman segun el sistema de F. AHN: por D. Camilo VALLES. —Leipzig, 1875. Un tomo, 1,50 pesetas.

Tercer curso de Aleman.—Nuevo método para aprender el idioma aleman segun el sistema de F. AHN: por D. Camilo VALLES. Trozos escogidos de literatura alemana, acompañados de notas explicativas. Leipzig, 1875. Un tomo, 1,25 pesetas.

Clave para los ejercicios de traduccion del primero y segundo curso de Aleman: por D. Camilo VALLES. Leipzig, 1875. Un t., 0,75 pesetas.

ADVERTENCIA.—Los métodos de Ahn, reconocidos como los mas sencillos para el estudio de las lenguas, se hallan hoy adoptados en todas las Universidades, Seminarios, Institutos, Colegios y demás establecimientos de enseñanza de todas las naciones.

Novísima guía de conversaciones modernas en español, francés é inglés para uso de los viajeros y de aquellas personas de uno y otro sexo que se dedican al estudio de estas lenguas. Contiene además: Nuevas conversaciones sobre viajes á Madrid, Paris y Londres. Cartas familiares y de comercio. Modelos de letras de cambio, recibos, pagarés, etc. La reduccion recíproca de las monedas francesas, españolas é inglesas. Una noticia histórica sobre las corridas de toros, etc. *Nueva edicion.* Madrid. Un tomo en 18.º, encartonado, 2 pesetas en toda España.

Novísima guía de conversaciones modernas en español é inglés. *Nueva edicion* segun Pardal, Ochoa, Richard, Corona y Sadler. Madrid. Un tomo en 18.º de bolsillo, encart., 1,50 pesetas en toda España.

Novísima guía de conversaciones modernas en español y Francés. *Nueva edicion* segun Pardal, Ochoa, Richard, Corona y Sadler. Madrid. Un tomo en 18.º de bolsillo, encart., 1,50 pesetas en toda España.

Curso elemental de Mecánica, teórica y aplicada, escrito en francés por el catedrático M. Ch. DELAUNAY; traducido de la última edicion francesa, y completado en su texto y láminas, con cálculos, tablas, estudios teóricos, aplicaciones y todos los nuevos aparatos inventados y admitidos en la práctica industrial: obra acomodada á las necesidades de las Escuelas y Establecimientos públicos, por D. José Canalejas y Casas, ingeniero mecánico, antiguo pensionado en el extranjero por el Ministerio de Marina, etc., etc. Madrid, 1879. Un magnífico tomo en 8.º prolongado, ilustrado con 577 magníficos grabados intercalados en el texto. Precio: 10 pesetas en Madrid y 11 en provincias, franco de porte.

Tratado práctico de Fotografía ó sea Química fotográfica, que contiene: Los elementos de Química explicados por medio de ejemplos aplicados á la Fotografía.—Los procedimientos sobre cristal (colodion húmedo, seco ó albuminado), sobre papel y sobre placa. —El modo de preparar por sí mismo, ensayar y emplear todos los reactivos y de utilizar los residuos: por BARRESWIL Y DAVANNE; traducido al castellano y aumentado con los procedimientos conocidos hasta el dia, por D. Benito de Cereceda. Madrid, 1864. Dos tomos en 8.º, ilustrados con 93 magníficos grabados en madera intercalados en el texto, 10 pesetas en Madrid y 12 en provincias, franco de porte.

Manual de Evaluacion de los solares y fincas urbanas. Contiene las fórmulas y tablas necesarias á este objeto, siendo de utilidad inmediata para los Arquitectos, Ingenieros, Maestros de obras, Propietarios, Empresas constructoras y toda persona que se dedique á la edificacion y especulacion de fincas urbanas: por D. Manuel MARTINEZ NUÑEZ, arquitecto de la Real Academia de nobles artes de San Fernando. Madrid, 1867. Un tomo en 8.º, en rústica, 5 pesetas en Madrid y 5,50 en provincias, franco de porte.

Nuevo sistema legal de Pesas y Medidas.—Décimatercera edicion, reformada y adicionada con un Prólogo histórico de las pesas y medidas, y la concordancia con los de América, acompañada de un metro en una cinta. Madrid, 1876. Precio: 2,50 pesetas en Madrid y 3 en provincias, franco de porte.

NUEVAS LAMINAS MURALES

DE

HISTORIA NATURAL

POR

P. GERVAIS

Miembro del Instituto, profesor del Museo de Historia natural de Paris.

CON SU TEXTO EXPLICATIVO

TRADUCIDO

Por el Dr. D. Joaquin GONZALEZ HIDALGO

Individuo de número de la Real Academia de Ciencias de Madrid, etc., etc.

(*Tercera edicion de la Coleccion de Aquiles Comte*)

Las *Nuevas Láminas murales de Historia natural* han sido ideadas y ejecutadas siguiendo el plan y las condiciones materiales que han hecho tan célebre la coleccion de Aquiles Comte; pero son, *sin embargo*, **una obra enteramente nueva** puesta al corriente de la ciencia y de las necesidades de la enseñanza.

Se ha modificado considerablemente la composicion de las láminas, y los asuntos en ellas representados se han tomado de las mejores obras ó se han copiado, siempre que ha sido posible, de los originales que existen en el Museo de Paris.

El texto ha sido tambien objeto de mejoras é innovaciones importantes, *incluyendo* en él una **reduccion fotográfica de cada lámina** con su explicacion al frente; de esta manera PUEDE SEGUIR EL DISCIPULO *con mas facilidad la leccion del Profesor*, y podrá tambien consultar con provecho las figuras que han servido para la demostracion, una vez terminada la clase.

Las *explicaciones* de las láminas van además *precedidas* de **un corto resúmen acerca del objeto** y de los puntos principales de la leccion á que está destinada cada lámina; por todo lo cual el *texto sirve* de **guia en la enseñanza** y es útil á la vez para el repaso de los alumnos.

Esta coleccion se compone de 62 láminas (de 70 cent. por 90 cent. cada una) impresas en fondo negro é iluminadas con gran esmero.

Es indispensable para las clases de Historia natural de Facultad, para los Institutos de segunda enseñanza, los Seminarios, las Escuelas normales, de Institutrices, de Comercio, etc., y algunas de las láminas para las Escuelas de primera enseñanza.

CONTENIDO DE LAS LÁMINAS.

ZOOLOGIA.

LÁMINAS.
I á IV.—Clasificacion del reino animal.
V.—Órganos elementales.
VI y VII.—Aparato digestivo del hombre.
VIII.—Vasos linfáticos y circulacion de la linfa.
IX.—Sistema dentario y composicion vertebral del cráneo en el hombre.
X.—Sistema dentario de los mamíferos.
XI.—Aparato digestivo en los animales.
XII.—Corazon y circulacion central del hombre.
XIII.—Aparato circulatorio en la serie animal.
XIV.—Aparato respiratorio del hombre.
XV.—Aparato respiratorio en los animales.
XVI y XVII.—Esqueleto del hombre.
XVIII.—Miologia del hombre.
XIX.—Esqueleto de los mamíferos.
XX.—Esqueleto de los vertebrados ovíparos.

LÁMINAS.
XXI.—Esqueleto de los vertebrados analantoideos.
XXII.—Sistema cutáneo.
XXIII.—Órgano del gusto.
XXIV.—Órgano del olfato.
XXV.—Aparato de la vision en el hombre.
XXVI.—Aparato de la vision en los animales.
XXVII.—Aparato auditivo.
XXVIII.—Órgano de la voz.
XXIX.—Sistema nervioso cerebro espinal del hombre.
XXX.—Sistema nervioso simpático del hombre.
XXXI.—Sistema nervioso en la serie animal.
XXXII.—Óvulo y desarrollo del óvulo en los vertebrados.
XXXIII.—Metamorfosis de los insectos.
XXXIV.—Insectos y arácnidos perjudiciales.

BOTANICA.

LÁMINAS.
I y II.—Clasificacion del reino vegetal.
III.—Clasificacion de Linneo.
IV y V.—Órganos elementales.
VI.—Órganos de los vegetales.
VII.—Órganos de la nutricion.—Raíces.
VIII.—Órganos de la nutricion.—Tallo.
IX.—Ingertos é instrumentos para ingertar.

LÁMINAS.
X.—Órganos de nutricion.—Hojas.
XI.—Órganos de reproduccion.—Inflorescencia.
XII.—Órganos de reproduccion.—Flores.
XIII.—Órganos de reproduccion.—Óvulo y fruto.
XIV.—Fecundacion.

GEOLOGIA.

LÁMINAS.
I y II.—Carta geológica de Francia.—Cortes geológicos.
III.—Terrenos silúrico y devónico.
IV.—Terreno carbonífero.
V.—Terreno pérmico (terreno triásico).
VI.—Terreno jurásico (vegetales y animales invertebrados característicos).
VII.—Terreno jurásico (animales vertebrados).
VIII.—Terreno cretáceo (fósiles característicos).

LÁMINAS.
IX.—Terreno terciario (vegetales y animales invertebrados).
X.—Terreno terciario (vertebrados del periodo eoceno y del mioceno).
XI.—Terreno terciario (vertebrados del periodo plioceno).
XII.—Terreno cuaternario (fósiles característicos).
XIII.—Pozos artesianos. Grutas.
XIV.—Volcanes. Heleros.

CONDICIONES DE LA PUBLICACION.

La coleccion de las *Nuevas láminas murales de Historia natural* comprende 62 láminas (Zoología, 34.—Botánica, 14.—Geología, 14), impresas en fondo negro é iluminadas con gran esmero: su tamaño es de 70 centímetros por 90.

PRECIOS:

Zoología,	Botánica y Geología, 62 láminas en papel con su texto explicativo.	180,00	pesetas.
—	La misma coleccion sobre tela y cañas, y su texto.	399,00	—
Zoología,	34 láminas en papel.	102,00	—
—	La misma sobre tela y cañas.	221,00	—
Botánica,	14 láminas en papel.	42,00	—
—	La misma sobre tela y cañas.	91,00	—
Geología,	14 láminas en papel.	42,00	—
—	La misma sobre tela y cañas.	91,00	—
Cada lámina suelta en papel.		3,50	—
— — —	sobre tela y caña.	7,00	—
Texto de la Zoología, Botánica y Geología, 3 tomos.		3,00	—
Zoología (edicion económica).		1,50	—
Botánica (edicion económica).		1,00	—
Geología (edicion económica).		1,00	—

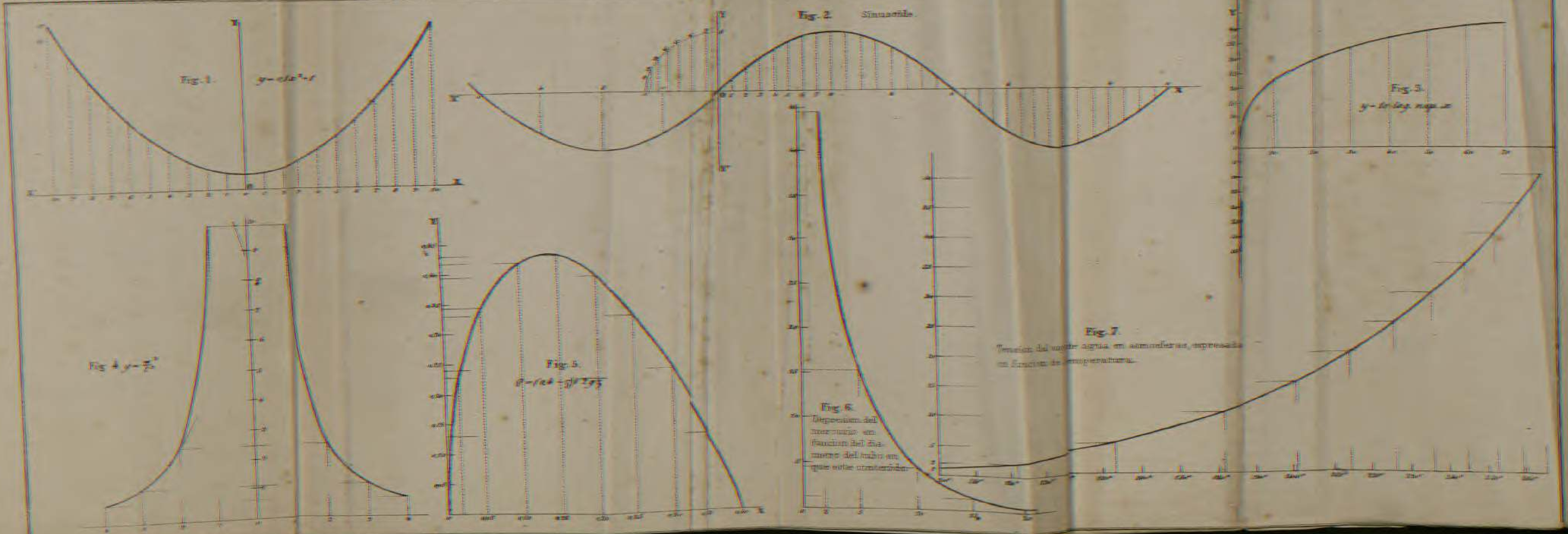


Fig. 1.
Fig. 2. Sinusoide
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Depresion del mercurio en funcion del diametro del tubo en que esta contenido.
Fig. 7.
Tension del vapor de agua en atmosferas, expresada en funcion de temperatura.

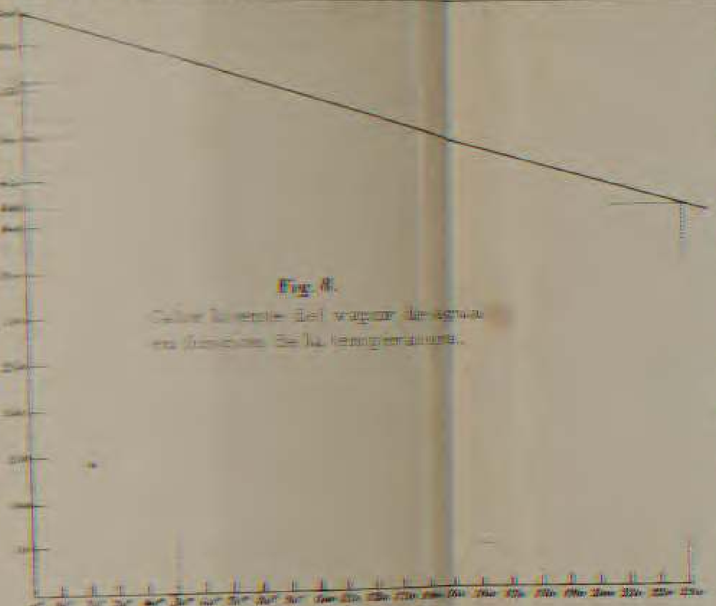


Fig. 8.
Calor latente del vapor de agua en funcion de la temperatura.

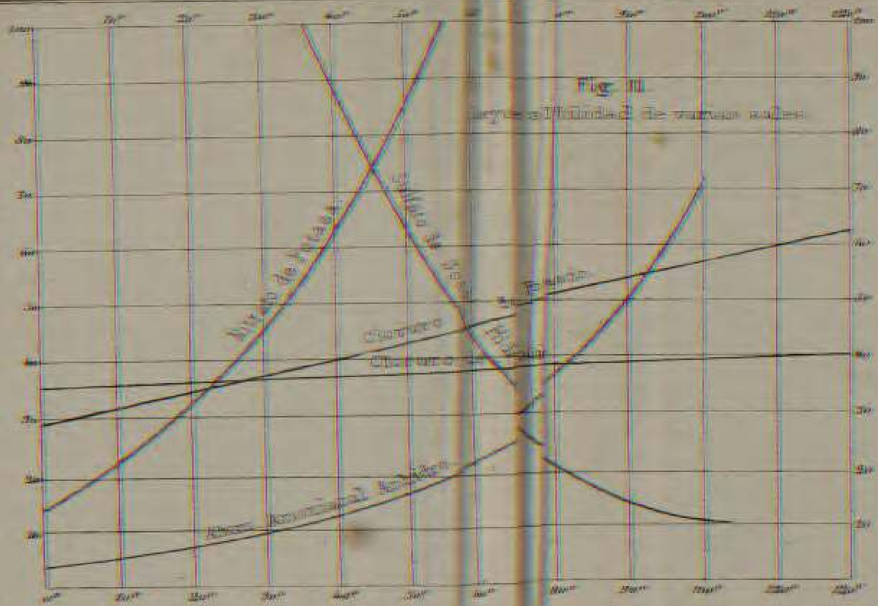


Fig. 11.
Ley de solubilidad de varias sales.

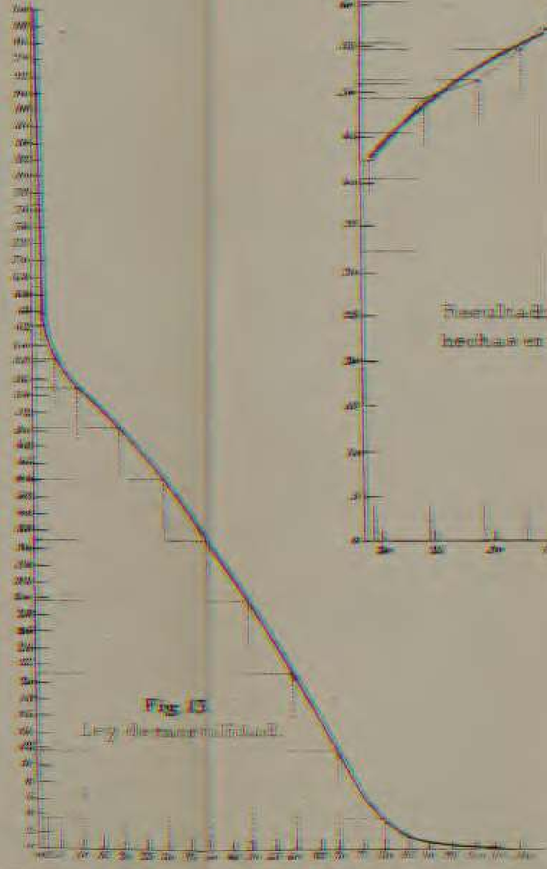


Fig. 13.
Ley de mortalidad.

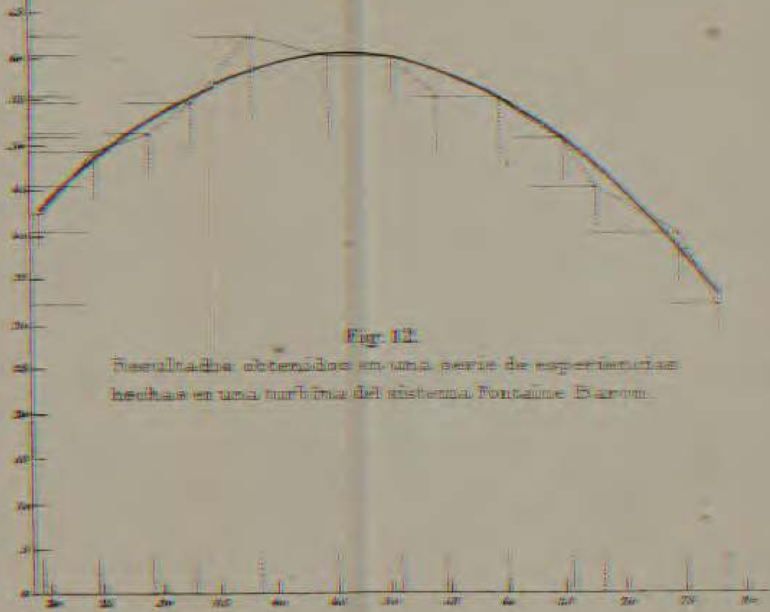


Fig. 12.
Resultados obtenidos en una serie de experiencias hechas en una turbina del sistema Fontaine Baron.

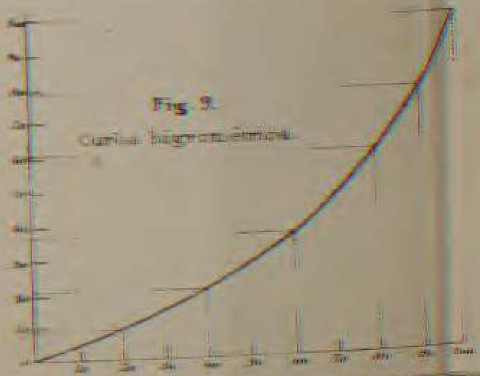


Fig. 9.
Curva hygrometrica.

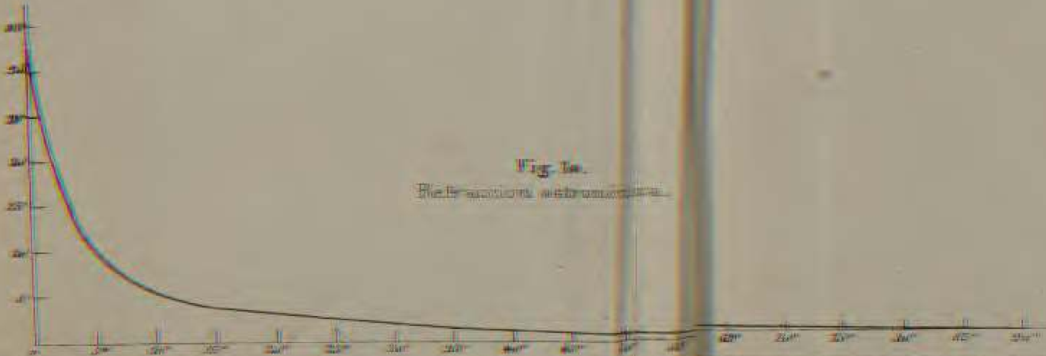



Fig. 10.
Refraccion astronómica.

dante de obras públicas y miembro de la Asociacion científica de Francia. Madrid, 1870. Un tomo en 8.º, con grabados intercalados en el texto: en rústica, 5 pesetas en Madrid y 5,50 en provincias, franco de porte.

Docimasia ó Arte de ensayar los minerales. Extractada del Berthier, ampliada con las lecciones de esta asignatura que se explican en la Escuela especial de ingenieros de minas y con los métodos volumétricos y analíticos mas usuales, é ilustrada con 137 grabados intercalados en el texto, para uso de los Ingenieros de minas é industriales, Auxiliares y Capataces de minas, Mineros, Fundidores, Fabricantes, Metalurgistas, etc., etc.; por D. José María SOLER, ingeniero de minas. Madrid, 1873. Un tomo en 8.º, 7,50 pesetas en Madrid y 8,50 en provincias, franco de porte.

Medicina Homeopática doméstica ó Guía de las familias, para que sus individuos puedan tratarse por sí mismos homeopáticamente en la mayoría de casos, y en los urgentes y graves prestar auxilios eficaces á los enfermos hasta la llegada de un médico homeópata; por el doctor C. HERING. *Novena edicion* española, arreglada á la última edicion publicada por el mismo autor (y que difiere en mucho de las anteriores) y á la cuarta edicion francesa; traducida al español, revisada, corregida, anotada y considerablemente aumentada por D. Angel Alvarez de Araujo y Cuellar, miembro honorario de la Sociedad médica homeopática de Francia, etc.—La parte aumentada contiene: una breve exposicion de las doctrinas médicas: nociones generales de higiene; noticias sobre el clima de las Antillas y Filipinas; reglas higiénicas y de aclimatacion que deben observarse en las mismas por los europeos; alimentos que les son permitidos y prohibidos estando enfermos; tratamiento que conviene seguir en las enfermedades mas temibles de aquellos países, de la América en general, Asia y costa de Africa, y en algunos otros casos de enfermedades comunes en ciertas provincias de España, como son la *suelta*, etc.; antropología, temperamentos y medicamentos que les son apropiados, así como á las diferentes edades y sexos; profilaxis de las enfermedades hereditarias. —*Obra única en su clase.* Madrid, 1875. Un volúmen en 8.º, 6 pesetas en Madrid y 7 en provincias, franco de porte.

Tetuan de Chamartin.—Imprenta de D. Carlos Bailly-Bailliere.